1

# Géométrisation de la Correspondance de Langlands locale

$E$ corps local (valuation discrète) $\mathcal{O}_E/\pi = \mathbb{F}_q$ $\nearrow \mathbb{F}_q((\pi))$ $\searrow [E:\mathbb{Q}_p]<+\infty$

$\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q} = \mathbb{F}_q$-espaces perfectoïdes + topologie pro-étale

$\cup$

$S \rightsquigarrow X_S = E$-espace adique = "famille de courbes $(X_{b(s)})_{s\in S}$"

Courbe définie dans notre travail en commun avec Fontaine

<u>Ex:</u> $*$ $E=\mathbb{F}_q((\pi))$ $\quad X_S = \mathbb{D}^*_S/\varphi^{\mathbb{Z}}$

$$\mathbb{D}^*_S = \{0<|\pi|<1\} \subset \mathbb{A}^1_S$$

$\varphi = \mathrm{Frob}_S$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{D}^*_S \arrow[loop above, "\varphi"] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ S & & \mathbb{D}^*_{\mathbb{F}_q} = \mathrm{Spa}\, E \end{tikzcd}$$

pas loc de type fini - morphisme structurel qui nous intéresse

loc type fini
morphisme structurel usuel
mais <u>pas $\varphi$-invariant</u>

$*$ $E|\mathbb{Q}_p$ $\quad X_S = Y_S/\varphi^{\mathbb{Z}}$ $\quad Y_S =$ analogue de $\mathbb{D}^*_S$ - Si $S = \mathrm{Spa}(R,R^+)$ on remplace $R^\circ[[\pi]]$

par $W_{\mathcal{O}_E}(R^\circ) = \left\{ \sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n \mid x_n \in R^\circ \right\}$

$\circlearrowright$

$\varphi$ = Frobenius usuel des vecteurs de Witt

$* \; \overline{\mathbb{F}_q} | \mathbb{F}_q$ $\qquad L = \widehat{E^{nr}} = \begin{cases} \overline{\mathbb{F}_q}((u)) \\ W_{\mathcal{O}_E}(\overline{\mathbb{F}_q})_{\mathbb{Q}} \circlearrowleft \sigma \end{cases}$

$\circlearrowright$
$\sigma$

$\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_L$ = Isocristaux $= \{(D, \varphi)\}$ (Dieudonné – Manin)

$D$ : $L$-e.v. de dim. finie

$\varphi$ : iso. semi-linéaire

$S \to \mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}_q})$

$\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_L \longrightarrow \mathrm{Fib}_{X_S}$ réalisation géométrique

$(D, \varphi) \longmapsto \mathcal{E}(D, \varphi)$

$Y_S \overset{*}{\times}_{\varphi} D$

$\downarrow$

$Y_S / \varphi^{\mathbb{Z}} = X_S$

<u>Th</u> (F. – Fontaine) : $S = \mathrm{Spa}(F)$ $F$ alg. clos (point géométrique). Le foncteur est essentiellement surjectif.

Via Dieudonné – Manin : $\forall \mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_{X_F}$ $\quad \mathcal{E} \simeq \bigoplus_i \underbrace{\mathcal{O}(\lambda_i)}_{\text{stable pente } \lambda_i}$ , $\lambda_i \in \mathbb{Q}$

$*$ $G$ groupe réductif $/E$ — $S/\mathbb{F}_q$

$$B(G) = G(L)/\sigma\text{-conj.} \quad (\text{Kottwitz})$$

$b \in G(L)$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}(G) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "G\text{-fibré } \mathcal{E}_b \text{ sur } X_S"'] & \varphi\text{-Mod}_L \arrow[r, "\mathcal{E}(-)"] & \mathrm{Fib}_{X_S}
\end{tikzcd}$$

G-isocrystal

$$(V, \rho) \longmapsto (V_L, \rho(b)\sigma)$$

<u>Th</u>: $S = \mathrm{Spa}(F)$ $F$ alg. clos. $\quad B(G) \xrightarrow{\sim} H^1_{ét}(X_F, G)$

$$[b] \longmapsto [\mathcal{E}_b]$$

$b$ basique $\iff$ $\mathcal{E}_b$ semi-stable.

généralisation de isocline

<u>Le champ $\mathrm{Fib}_G$</u>. $\mathrm{Fib}_G$ = champ sur $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ + topologie pro-étale

$$\mathrm{Fib}_G(S) = \{ G\text{-fibrés sur } X_S \}$$

(Résultat précédent $\Rightarrow$) $\boxed{B(G) \xrightarrow{\sim} |\mathrm{Fib}_{G,\overline{\mathbb{F}}_q}|}$

## Composantes connexes

Kottwitz : $\kappa : B(G) \longrightarrow \pi_1(G)_\Gamma$ $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$

$$\begin{tikzcd} B(G) \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\wr"] & \pi_1(G)_\Gamma \\ |\mathrm{Fib}_{G,\overline{\mathbb{F}}_q}| \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

localement constante

première classe de Chern d'un fibré

$G = GL_n$, $\kappa = -$degré

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Fib}_G = \coprod_{\alpha \in \pi_1(G)_\Gamma} \mathrm{Fib}_G^\alpha$

sous-champ ouvert/fermé

## Stratification de Harder-Narasimhan

lieu semi-stable

$\mathrm{Fib}_G^{ss}$ = ouvert de $\mathrm{Fib}_G$

De plus (Kottwitz) $\kappa_{|B(G)_{\text{basique}}} : B(G)_{\text{basique}} \xrightarrow{\sim} \pi_1(G)_\Gamma$

$\Rightarrow \forall \alpha \in \pi_1(G)_\Gamma$ $|\mathrm{Fib}_{G,\overline{\mathbb{F}}_q}^{\alpha, ss}|$ = un seul point

3

## Uniformisation du lieu semi-stable

$b$ basique. $J_b = G$-centralisateur de $b$
$= $ forme intérieure de $G$

$\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{E}_b) = $ faisceau sur $\mathrm{Perf}_{\overline{\mathbb{F}}_q} = \underline{J_b(E)}$

Ex: $\mathcal{E}_1 = G$-fibré trivial $\mathrm{Aut}(\mathcal{E}_1) = \underline{G(E)} \rightarrow$ différent du cas classique où $\mathrm{Aut}(G\text{-fibré trivial})$ $=$ $G$ comme groupe alg.

Th: $\mathcal{E}_b$ définit un isomorphisme

$$\boxed{x_b : \left[\mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)/\underline{J_b(E)}\right] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fib}_{G,\overline{\mathbb{F}}_q}^{\kappa(b),ss}}$$

i.e. si $S \in \mathrm{Perf}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ et $\mathcal{E}/X_S$ a toutes les fibres géo. $\simeq \mathcal{E}_b$

alors $\exists \tilde{S} \to S$ pro-étale tq. $\mathcal{E}_{|X_{\tilde{S}}} \simeq \mathcal{E}_b$

Correspondances de Hecke: $\mathrm{Spa}(E)^\diamond = \begin{cases} \mathrm{Spa}(E) \text{ si } E = \mathbb{F}_q((\pi)) \\ \text{faisceau des débasculements}/E \\ \text{si } E|\mathbb{Q}_p \end{cases}$

$$\mathrm{Spa}(E)^\diamond(S) = \{(S^\#, \iota)\}/\sim$$

$S^\#$ perfectoïde$/E$

$\iota : S \xrightarrow{\sim} S^{\#,b}$

Si $S^\#$ = débasculement de $S/E$ ⇝ définit un diviseur de Cartier $S^\# \hookrightarrow X_{S'}$

Si $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$, $S^\# = \mathrm{Spa}(R^\#, R^{\#,+})$

$$\left(X_S\right)^{\wedge}_{/S^\#} = \mathrm{Spf}\left(B^+_{dR}(R^\#)\right)$$

⇝ Correspondances de Hecke

un élément dans une chambre de Weyl positive

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hecke}_\mu \arrow[dl, "\overleftarrow{h}"'] \arrow[dr, "\overrightarrow{h}"] & \\
\mathrm{Fib}_G & & \mathrm{Fib}_G \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond
\end{tikzcd}$$

paramètre des modifications bornées par $\mu$ en le diviseur de Cartier $S^\#$

fibration localement triviale en $\mathrm{Gr}^{B_{dR}}$

$$\begin{array}{c} \mathrm{Gr}^{B_{dR}} \\ \downarrow \\ \mathrm{Spa}(E)^\diamond \end{array}$$

Conjecturalement : Satake géométrique pour $\mathrm{Gr}^{B_{dR}}$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ IC_\mu = \text{Complexe d'intersection de } \mathrm{Gr}^{B_{dR}, \leq \mu} \\ \updownarrow \\ r_\mu \in \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}({}^L G) \end{array}$$

rep. de plus haut poids $\mu$

$\rightsquigarrow$ faisceau $IC_\mu$ sur $Hecke_\mu$ = noyau

$\rightsquigarrow$ Correspondances cohomologiques entre faisceau sur $Bun_G$

et $Bun_G \times Spa(E)^\diamond$

$$\mathcal{F} \longmapsto \overrightarrow{h}_! \left( \overleftarrow{h}^* \mathcal{F} \otimes IC_\mu \right)$$

La Conjecture: $\quad {}^LG$ = dual de Langlands $/ \overline{\mathbb{Q}_\ell}$

(devrait être défini intrinsèquement via Satake géométrique pour $B_{dR}^+$)

$\varphi : W_E \longrightarrow {}^LG$ paramètre

$S_\varphi = \{ g \in \hat{G} \,/\, g \varphi g^{-1} = \varphi \}$ automorphismes de $\varphi$

$\cup$

$Z(\hat{G})^\Gamma$

$\varphi$ discret i.e. $S_\varphi / Z(\hat{G})^\Gamma$ est fini.

On dit que de plus $\varphi$ est cuspidal si $\varphi(I_E) \subset \hat{G}$ est fini

- On fixe une donnée de Whittaker -

Conjecture: $\exists \mathcal{F}_\varphi$ "faisceau pervers" de Weil sur $Bun_{G, \overline{\mathbb{F}_q}}$

muni d'une action de $S_\varphi$ tel que:

(1) $\forall \alpha \in \pi_1(G)_\Gamma$ l'action de $Z(\hat{G})^\Gamma \subset S_\varphi$ sur

$\mathcal{F}_{\varphi | \mathrm{Bun}_{G,\overline{\mathbb{F}}_q}^{\alpha}}$ est donnée par $\alpha$ via $\pi_1(G)_\Gamma = X^*(Z(\hat{G})^\Gamma)$

(2) Si $\varphi$ est cuspidal et $j : \mathrm{Bun}_G^{ss} \hookrightarrow \mathrm{Bun}_G$ alors

$$\mathcal{F}_\varphi = j_! j^* \mathcal{F}_\varphi$$

(3) $\forall b$ basique via $x_b : [\mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q) / \underline{J_b(E)}] \hookrightarrow \mathrm{Bun}_{G,\overline{\mathbb{F}}_q}$

$$x_b^* \mathcal{F}_\varphi = \bigoplus_{\substack{\rho \in \widehat{S_\varphi} \\ \rho|_{Z(\hat{G})^\Gamma} = \kappa(b)}} \rho \otimes \pi_{\varphi, b, \rho}$$

$\circlearrowleft$ $S_\varphi \times J_b(E)$

où $\{\pi_{\varphi,b,\rho}\}_\rho$ = L-paquet d'une correspondance de Langlands locale pour la forme intérieure $J_b$ de $G$.

~~(4)~~ $\pi_{\varphi,1,1}$ = l'unique élément générique du L-paquet

(4) $\mathcal{F}_\varphi$ est vecteur propre de $\mathrm{Hecke}_\mu$ avec comme valeur propre $r_\mu \circ \varphi$ = rep. $\ell$-adique de $W_E$ = système local de Weil sur $\mathrm{Spa}(E^\diamond) \times \mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)$

(5) Propriété de faisceau caractère.

$\{G(E)\}_{ell} \longrightarrow B(G)_{basique}$ via $G(E) \subset G(L)$

Si $\delta \in G(E)_{ell\text{-}reg}$ alors $x_\delta$ est défini sur $\mathbb{F}_q \Rightarrow x_\delta^* \mathcal{F}_\varphi \circlearrowleft \mathrm{Frob}$

[ $\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}, x_\delta^* \mathcal{F}_\varphi) = T_\varphi(\delta)$

↑ distribution stable sur $G(E)$ associée à $\varphi$

si $\delta \in G(E_n)$ $\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}^n, x_\delta^* \mathcal{F}_\varphi) = (BC_{E_n/E} T_\varphi)(\delta)$

$T_\varphi|_{G(E)_{ell\text{-}reg}}$ = fonction trace de Frobenius.

(6) Compatibilité local/global avec le faisceau de Caraiani-Scholze

* Conjecture vraie pour $GL_1$ équivalente à la théorie du c.d.c. local
* Conjecture $\Rightarrow$ le calcul de la partie supercuspidale de la coho. des espaces de R.Z. basiques tel que décrit par Kottwitz