

(1)

Motivation:

- * Ma Conjecture de géométrisation est connue dans le cas abélien i.e. pour un tore (cf. article de revue sur ma page web) en utilisant le c.d.c. local.
- * Je vais expliquer comment démontrer directement ma Conjecture dans le cas GL_1 par les méthodes du programme de Langlands géo. \Rightarrow nouvelle preuve du c.d.c. local (méthode géo. pas arithmétique).
 \rightarrow cf. note informelle sur ma page web "trying to understand loc. c.f.t."

Rappels sur le c.d.c. géométrique

k corp X/k Courbe propre et lisse géo. connexe.

$$\text{Pic} = \coprod_{d \in \mathbb{Z}} \text{Pic}^d \quad \text{schéma de Picard}$$

$$\mathcal{E} = \overline{\mathbb{Q}_e}\text{-sys. loc. rg. 1}/X \quad \text{puis } \text{Aut}_{\mathcal{E}} = \overline{\mathbb{Q}_e}\text{-sys. loc. de rg. 1 sur Pic}$$

vérifiant: * $m^* \mathcal{E} \simeq \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{E}$ si $m: \text{Pic} \times \text{Pic} \rightarrow \text{Pic}$

$$* \text{ si } k = \mathbb{F}_q \quad \text{Pic}(\mathbb{F}_q) = k^x \backslash A_K^x / \prod_v G_{K_v}^x$$

$$K = k(X)$$

fct. trace de Frob. de $\text{Aut}_\xi =$ Caractère de Frobe associé à ξ via c.d.c.
 \updownarrow
 $\text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_e^*$ partout N.R.

Construction de Aut_ξ :

\rightarrow Suffit de construire $\text{Aut}_\xi |_{\text{Pic}^d}$ pour $d \gg 0$.

$d \geq 1$ $\text{Sym}^d X := X^d / \mathfrak{S}_d = \text{Div}^d =$ schéma de Hilbert des diviseurs effectifs de degré d .

$\pi^{(d)}: X^d \rightarrow \text{Div}^d$ (morphisme de symétrisation)

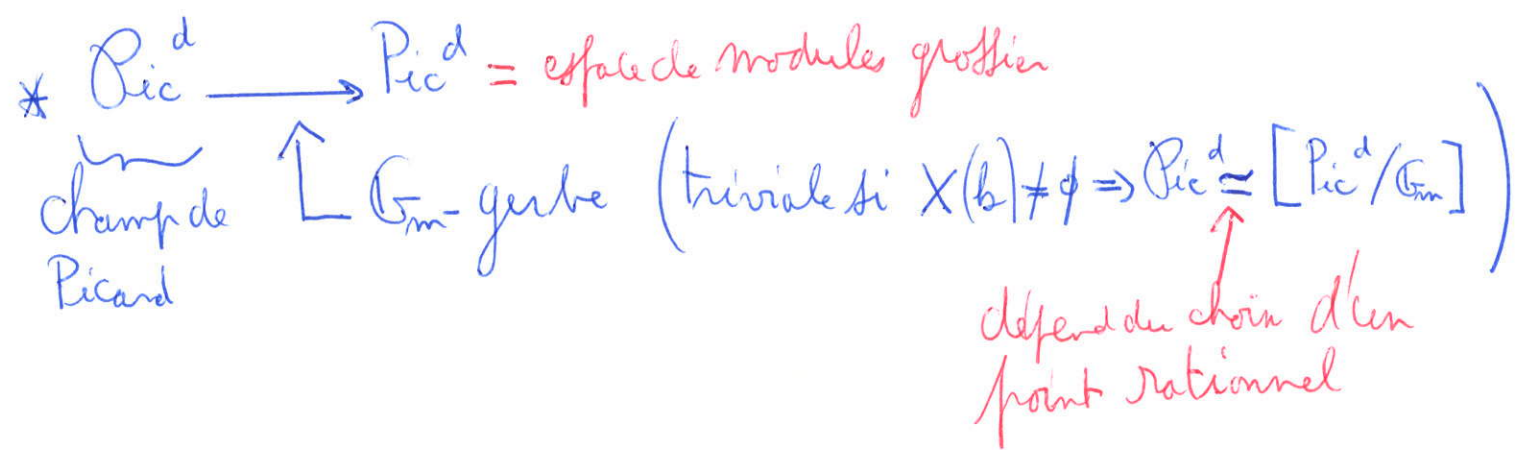
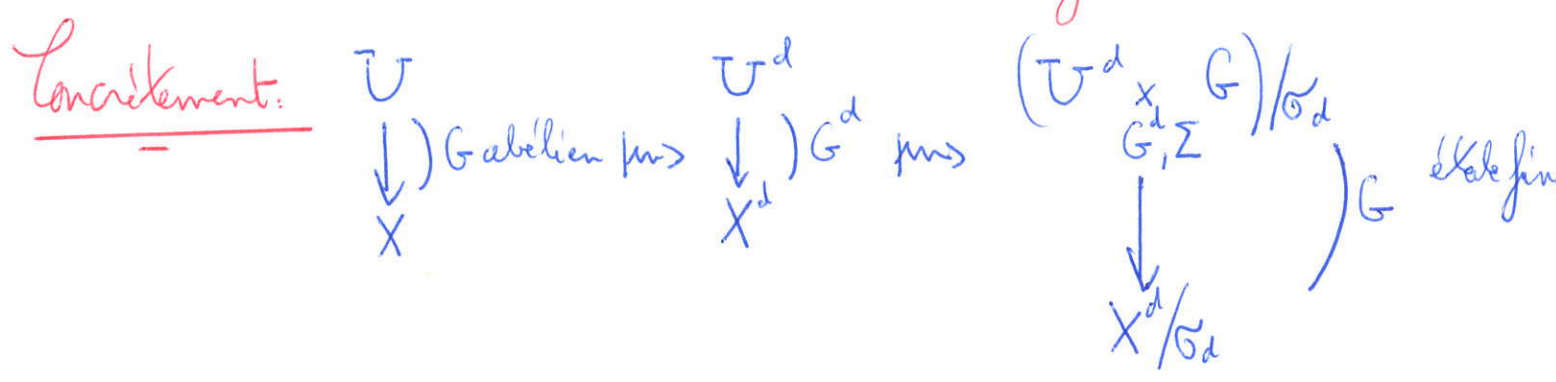
$\mathcal{F}_\xi^{(d)} = \left(\pi_*^{(d)} \xi^{\boxtimes d} \right)^{\mathfrak{S}_d} = \bar{\mathbb{Q}}_e$ -sys. loc. de rg. 1
 penser en général si $\text{rg } \xi > 1$

$\rightarrow \pi_1(\text{Div}^d) = \pi_1(X)^{\text{ab}}$ si $d > 1$ (SGA1. exp. IX Rem. 5.8)

$\pi_1(Y/\Gamma) =$ plus grand quotient de $\pi_1(Y)$ sur lequel $(\Gamma/\bar{y})|_{\bar{y}} \rightarrow Y$ agit trivialement.
 \uparrow quasi-proj. \uparrow fini \uparrow groupe d'inertie au point géo. \bar{y}

$\Rightarrow \pi_1(X^d/\sigma_d) =$ plus grand quotient de $\pi_1(X^d) = \pi_1(X)^d$ sur lequel σ_d agit trivialement

inertie le long de la diagonale



AJ^d: $\text{Div}^d \xrightarrow{\quad} \text{Pic}^d \xrightarrow{\quad} \text{Pic}^d$ Abel-Jacobi

$D \longmapsto G(D)$

$d > 2g-2$, L fibré en droites/ X_S de degré d $f: X_S \rightarrow S$

$f_* L = Rf_* L =$ fibré vectoriel

Complexe parfait

mais définit $\mathcal{R} =$ fibré vectoriel de $rg. d+1-g$ sur Pic^d

$$\text{Div}^d = \{ L \in \text{Pic}^d + \text{section non nulle fibre à fibre / } \pi \text{ de } L \} / \sim$$

$$= "P(X) = W(X) \cdot \text{tot} / G_m"$$

$\text{End}(X)$ descend en une algèbre d'Azumaya \mathcal{A} sur Pic^d

$$[\mathcal{A}] \in \text{Br}(\text{Pic}^d)$$

"classe de la G_m -gerbe $\text{Pic}^d \rightarrow \text{Pic}^d$ "

pas \mathcal{A} en général sauf si X a un point rat. (et encore, la descente de \mathcal{A} n'est pas canonique
contrairement à celle de $\text{End}(X)$)

Alors $\boxed{\text{Div}^d = \text{SB}(\mathcal{A})}$

Severi-Brauer

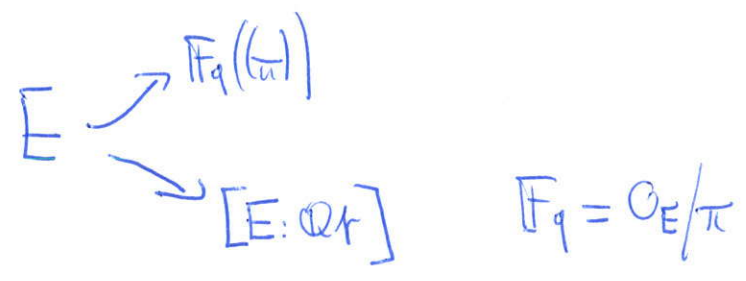
$\Rightarrow A \mathcal{J}^d : \text{Div}^d \rightarrow \text{Pic}^d$ fibration étale loc. trivial en espaces projectifs.

Espaces proj. simplement connexes $\Rightarrow \pi_1(\text{Div}^d) = \pi_1(\text{Pic}^d)$

$\Rightarrow \mathcal{J}^d$ descend canoniquement en $\text{Aut}_{\mathcal{E}} / \text{Pic}^d$

□

Le Cas de ma Courbe



$S \in \text{Perf}_{\mathbb{F}_q} + \text{top. pro-étale}$

$$X_S = Y_S / \varphi^{\mathbb{Z}} \quad \text{E-espace adique}$$



= "famille de courbes $(X_{b(s)})_{s \in S}$ "

$$\underline{\text{Ex:}} \quad E = \mathbb{F}_q(\!(t)\!)$$

$$Y_S = \mathbb{D}_S^* = \{0 < |t| < 1\} \subset \mathbb{A}_S^1$$

$\varphi = \text{Frob}_S$

$$X_S^\diamond = (S \times \text{Spa}(E)^\diamond) / \varphi_S^{\mathbb{Z}}$$

Def: $d \geq 1$

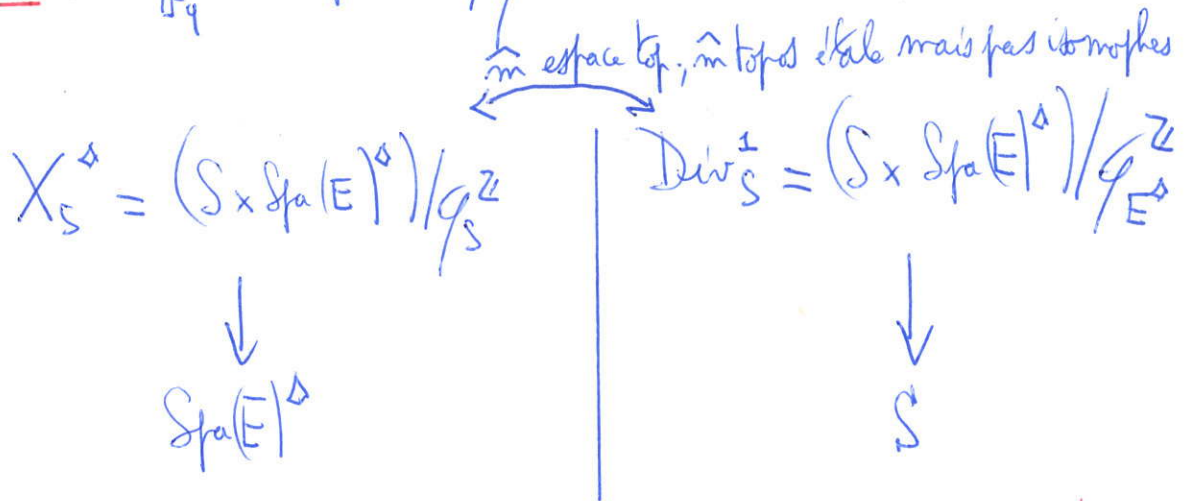
$$\text{Div}_{\mathbb{F}_q}^d : S \longmapsto \left\{ (\mathcal{L}, \mathcal{f}) \mid \begin{array}{l} \mathcal{L} \text{ fibré en droites de degré } d / X_S \text{ et } \mathcal{f} \in H^0(X_S, \mathcal{L}) \\ \forall s \in S \quad \mathcal{f}|_{X_{b(s)}} \neq 0 \end{array} \right\} / \sim$$

||

module des diviseurs de Cartier effectifs de degré d / X_S

(si $Y \rightarrow T$ morphisme de schémas, un div. de Cartier effectif relatif de Y/T est la même chose qu'un couple $(L, f)/\sim$ où L fibre en droites H^0 et $f \in H^0(Y, L)$ vérifie $\forall t \in T, f|_{Y_t} \neq 0$)

Prop. $\text{Div}_{\mathbb{F}_q}^1 = \text{Spa}(E)^\diamond / \varphi^{\mathbb{Z}} = \text{diamant}$ $\nearrow \text{Car}(\varphi_S^\circ \varphi_E^\diamond) = \text{Frob. absolu}$



→ différent du cas usuel : espace de module des diviseurs effectifs de degré 1 sur X n'est pas X lui-même mais la "courbe miroir"

$$\text{Spa}(E)^\diamond \longrightarrow \text{Div}_{\mathbb{F}_q}^1$$

$S^\#$ débasement de S sur E vers $S^\# \hookrightarrow Y_S$ diviseur de Cartier

$\Downarrow \varphi^{\mathbb{Z}}$ -périodisation

Div. de Cartier sur $X_S = Y_S / \varphi^{\mathbb{Z}}$.

Th. $\text{Sym}^d \text{Div}_{\mathbb{F}_q}^1 := \left(\text{Div}_{\mathbb{F}_q}^1 \times \dots \times \text{Div}_{\mathbb{F}_q}^1 \right) / \mathcal{O}_d \xrightarrow{\sim} \text{Div}_{\mathbb{F}_q}^d$

quotient pro-étale
(mais pas étale)

$$\Rightarrow \text{Div}_{\mathbb{F}_q}^d = \left(\text{Spa}(E)^\Delta \times \dots \times \text{Spa}(E)^\Delta \right) / \left(\mathcal{O}_{E^\Delta}^{\otimes d} \times \dots \times \mathcal{O}_{E^\Delta}^{\otimes d} \right) \times \mathcal{O}_d$$

Champ de Picard

$$\text{Pic}(S) = \{ \text{fibres en disques} / X_S \}$$

$$\text{Pic} = \coprod_{d \in \mathbb{Z}} \text{Pic}^d$$

$$\text{Pic}^d \xrightarrow{\sim} \left[\text{Spa}(\mathbb{F}_q) / \underline{E}^x \right]$$

$$L \longmapsto \left[\text{Isom}(\mathcal{O}(d), L) \right]$$

$$\underline{E}^x = \text{Aut}(\mathcal{O}(d))$$

Application d'Abel-Jacobi

$B =$ faisceau en anneaux sur $\text{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ - $B(S) = \mathcal{O}(Y_S)$

$$\varphi \quad B_{\mathbb{F}_q}^{\varphi = \pi^d} = H^0(\mathcal{O}(d))$$

"
espace de Beorch-Colmez "absolu" du \mathbb{F}_q

$\forall S \in \text{Perf}_{\mathbb{F}_q} \quad \downarrow \varphi = \pi^d$
 $B_S = B_{\mathbb{F}_q}^{\varphi = \pi^d} \times S$ est
 un diamant mais $B_{\mathbb{F}_q}^{\varphi = \pi^d}$ n'en n'est pas un

$\text{Div}_{\mathbb{F}_q}^d = \left(B_{\mathbb{F}_q}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\} \right) / \underline{E}^x = \text{espace projectif sur B.C.}$
 espace à Pic^d = $[\cdot / \underline{E}^x]$ B.C. espace absolu = diament

$$\left(B_{\mathbb{F}_q}^{\varphi=\bar{u}} \setminus \{0\} \right)^d / \underline{\Delta} \times \sigma_d \xrightarrow{\sim} B_{\mathbb{F}_q}^{\varphi=\bar{u}^d} \setminus \{0\}$$

↑
produit

$$\text{ou } \underline{\Delta} = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in (\underline{E}^x)^d \mid \prod_{i=1}^d \lambda_i = 1 \right\}$$

$$+ B_{\mathbb{F}_q}^{\varphi=\bar{u}} \setminus \{0\} = \text{Spa}(\mathbb{F}_q((T^{-1}/t^{\infty})))$$

$$AJ^d : \text{Div}_{\mathbb{F}_q}^d = \left(\text{Spa}(\underline{E}^\diamond / \varphi^2) \right)^d / \sigma_d = \left(B_{\mathbb{F}_q}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\} \right) / \underline{E}^x \longrightarrow \left[\text{Spa}(\mathbb{F}_q) / \underline{E}^x \right]$$

||
Pic^d_{mathbb{F}_q}

Systemes locaux

$$\check{E} = \widehat{E^m}$$

loc. Krivnaun pour le top. pro-étale

$$\overline{\mathcal{O}_E}\text{-sys. loc. sur } \text{Div}_{\mathbb{F}_q}^1 = \underbrace{\left(\text{Spa}(\underline{E}^\diamond) \times \text{Spa}(\overline{\mathbb{F}_q}) \right)}_{\text{Spa}(\check{E}^\diamond)} / \mathcal{G}_{\underline{E}^\diamond}$$

$$= \overline{\mathcal{O}_E}\text{-sys. locaux } \mathcal{G}_{\overline{\mathbb{F}_q}}\text{-éq. sur } \text{Spa}(\check{E}^\diamond)$$

$$\uparrow \quad \sigma \in \text{Gal}(\check{E}|\underline{E})$$

$$\mathcal{G}_{\underline{E}^\diamond} \circ \mathcal{G}_{\overline{\mathbb{F}_q}} = \text{Fibr. absolu de } \text{Spa}(\underline{E}^\diamond)$$

$$= \text{Ref}_{\bar{\mathbb{Q}}_e} (W_E)$$

$\chi: W_E \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_e^x$ sur Z_X $\bar{\mathbb{Q}}_e$ -fys. local de rg. 1 sur $\text{Div}_{\bar{\mathbb{F}}_q}^1$

et $\forall d \geq 1$ $Z_X^{(d)} = \left(\pi_*^{(d)} Z_X^{\otimes d} \right)^{\otimes d}$ sur $\text{Div}_{\bar{\mathbb{F}}_q}^d$

ou $\pi^{(d)}: (\text{Div}^1)^d \longrightarrow \text{Div}^d$

Lien avec le torseur de Lubin-Tate et la théorie du c.d.c.

\mathcal{T}_{LT}
↓) $\bar{\mathbb{Q}}_E^x$ -torseur de Lubin-Tate

$\text{Sta}(E)^\Delta$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{LT} = \left(\mathcal{T}_{LT} \times_{\bar{\mathbb{Q}}_E^x} \bar{E}^x \right) \otimes_E \bar{E}^c$$

+ donnée de descente canonique effective

$$\sigma^* \tilde{\mathcal{T}}_{LT} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{T}}_{LT}$$

$$AJ^1: \text{Div}_{\bar{\mathbb{F}}_q}^1 \longrightarrow \text{Pic}_{\bar{\mathbb{F}}_q}^1 = [\text{Sta}_{\bar{\mathbb{F}}_q} / \bar{E}^x]$$

$$(AJ^1)^* (\bar{E}^x\text{-torseur canonique}) = \tilde{\mathcal{T}}_{LT} + \text{donnée de descente } \pi^{-1} \times \text{can. non-effective}$$

$$f: W_E^{ab} \longrightarrow E^x$$

$$\tau \longmapsto \chi_{\text{ét}}(\tau) \pi^{-v(\tau)} \quad \text{où } \text{red}(\tau) = \text{Frob}_q^{v(\tau)}$$

Si $\chi: E^x \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^x \rightsquigarrow \mathcal{J}_\chi^{(d)} \overline{\mathbb{Q}}^x$ - sys. loc. de rg. 1 sur

$$\text{Pic}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^d = [\text{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q) / \underline{\mathbb{E}}^x]$$

Alors via $AJ^d: \text{Div}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^d \longrightarrow \text{Pic}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^d$

$$(AJ^d)^* \mathcal{J}_\chi^{(d)} = \mathcal{L}_{\chi \circ f}$$

\Rightarrow Prop.: La théorie du c.d.c. local (i.e. $f: W_E^{ab} \xrightarrow{\sim} E^x$) est équivalente à ce que $\forall \chi: W_E \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^x$ pour $d \gg 0$ $\mathcal{L}_\chi^{(d)}$ descend le long AJ^d .

Puisque $AJ^d: (\mathbb{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\tau^d} \setminus \{0\}) / \underline{\mathbb{E}}^x \longrightarrow [\text{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q) / \underline{\mathbb{E}}^x]$

Cela se déduit du théo. suivant.

Th.: Si $d > 1$, resp. $d > 2$ si $E|_{\mathbb{Q}_p}$, alors $\mathbb{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\tau^d} \setminus \{0\}$ est simplement connexe.

Le Cas $E = \mathbb{F}_q((t))$

(6)

Dans ce cas là $B_{\mathbb{F}_q}^{\varphi = \pi^d}$ représente par un schéma formel parfait

$$Y_S = D_S^* \quad \text{avec } \varphi = \text{Frob}_S$$

$$\Rightarrow B_{\mathbb{F}_q}^{\varphi = \pi^d}(R) = \left\{ \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda_i \pi^{md+i} \mid \lambda_0, \dots, \lambda_{d-1} \in R^{\circ\circ} \right\}$$

$$Y_d = \widehat{G}_a^d / \mathbb{F}_q$$

$$\begin{array}{c} \hookrightarrow \\ \mathbb{F}_q[[\pi]] \end{array} \text{ via } \pi \mapsto [(k_0, \dots, k_{d-1}) \mapsto (F(k_{d-1}), k_0, \dots, k_{d-2})]$$

$$\widetilde{Y}_d = \varprojlim_{\times \pi} Y_d = \text{Spf}(\mathbb{F}_q[[k_0^{1/\pi^\infty}, \dots, k_{d-1}^{1/\pi^\infty}]]) = E\text{-e.v. formel}$$

$$B_{\mathbb{F}_q}^{\varphi = \pi^d} = t(\widetilde{Y}_d) \text{ espace adique } \underline{\text{non-analytique}} \quad (\Rightarrow \text{pas perfectoïde})$$

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{F}_q}^{\varphi = \pi^d} \setminus \{0\} &= \text{Spa}(\mathbb{F}_q[[k_0^{1/\pi^\infty}, \dots, k_{d-1}^{1/\pi^\infty}]])_a = \text{Spa}(-) \setminus V(k_0, \dots, k_{d-1}) \\ &= \text{espace perfectoïde propre} / \mathbb{F}_q \end{aligned}$$

Th (GAGA): Rmoethérien I-adique

$$(1) \text{ Fib. vect.} / \underbrace{\text{Spa}(R, R) \setminus V(I)}_{} \xleftarrow{\sim} \text{Fib. vect.} / \text{Spec}(R) \setminus V(I)$$

$$(2) \text{ Ét. finis / } \text{Spec}(A) \setminus V(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \text{ Ét. finis / } \text{Spa}(R, R)_a$$

\Rightarrow si k sép. clos et $d > 1$ $\text{Spa}(k[[x_0, \dots, x_{d-1}]])_a$ simplement
 connexe car (propriété de Zariski-Nagata + Hensel)

$\text{Spec}(k[[x_0, \dots, x_{d-1}]]) \setminus V(x_0, \dots, x_{d-1})$ est S.C.

$\Rightarrow \mathbb{B}_{\mathbb{F}_q}^{p=n^d} \setminus \{0\}$ est S.C. \square

Le cas $E|Q_p$: Point essentiel précédemment:
points de Zariski-Nagata.

Prop. Si $\bar{U} \xrightarrow{\text{ét. fini}} B_{\bar{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\bar{u}^d} \setminus \{0\}$ s'étend en un revêtement étale fini de $B_{\bar{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\bar{u}^d}$ alors celui-ci est trivial.

$\rightarrow B_{\bar{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\bar{u}^d} \setminus \{0\} = (B_{\bar{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\bar{u}} \setminus \{0\})^d / \Gamma$ $\Gamma = \underline{\Delta} \times \sigma^d$

tiré en arrière à $(B_{\bar{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\bar{u}^d} \setminus \{0\})^d$ de \bar{U} s'étend à

$(B_{\bar{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\bar{u}})^d \setminus \{(0, \dots, 0)\}$

$B_{\bar{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\bar{u}} = \tilde{e}_y = \text{Spf}(\bar{\mathbb{F}}_q[[T^{1/p^\infty}]])$

E -e.v. formel rev. univ. de $\mathfrak{g} = \text{Lubin-Tate}/\bar{\mathbb{F}}_q$

$\Rightarrow (B_{\bar{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\bar{u}})^d \setminus \{(0, \dots, 0)\} = \text{Spa}(\bar{\mathbb{F}}_q[[k_0, \dots, k_{d-1}]]^{1/p^\infty})_a$

= simplement connexe (cf. précédemment)

Donc tiré en arrière de \bar{U} à $(B_{\bar{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\bar{u}} \setminus \{0\})^d$ est trivial.

Conclut en utilisant que $\langle \Gamma_{\bar{y}} \rangle_{\bar{y}} = \Gamma$.

↑ point galo.
↑ groupe d'Inertia

(cf. SGA 1 ch. IX Rem. 5.8) \square

reste donc à prouver la pureté.

2 étapes: (1) $F = \overline{\mathbb{F}_q}((T^{1/\pi^\infty}))$ on montre la pureté
pour $B_F^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\} \hookrightarrow B_F^{\varphi=\pi^d}$

mais B.C. (pas absolu)
mais pas simplement connexe!

(2) On redescend de F à $\overline{\mathbb{F}_q}$.

Étape (1): $t_1, \dots, t_d \in B(F)^{\varphi=\pi}$ lin. indép. / E

$$\hat{t}_i = \prod_{j \neq i} t_j \in B(F)^{\varphi=\pi^{d-1}}$$

$$V = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in E^d \mid \sum_i \lambda_i = 0 \right\}$$

Présentation: $0 \rightarrow \underline{V} \rightarrow (B_F^{\varphi=\pi})^d \rightarrow B_F^{\varphi=\pi^d} \rightarrow 0$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \mapsto (\lambda_1 t_1, \dots, \lambda_d t_d)$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \mapsto \sum_i \lambda_i \hat{t}_i$$

\Rightarrow revêtement étale fini de $B_F^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}$

revêt. \underline{V} -éq. de $(B_F^{\varphi=\pi})^d \setminus \underline{V}$

$$g = \text{Subint-tate}/\mathbb{C}_{\text{int}}$$

$$G = g^{\text{reg}} \simeq \mathbb{B}^1$$

$$\tilde{G} = \varprojlim_{\leftarrow \alpha} G \text{ rev. universel (pré-perfectoïde)}$$

$K =$ Complète de l'extension de \tilde{E} engendrée par les points de torsion de g .

$$K^\flat = F$$

$$\mathbb{B}_F^{\rho=\pi} = \tilde{G}_K^b$$

\Rightarrow il suffit de montrer que tout rev. étale fini de $\tilde{G}_K^d \setminus \underline{V}$

s'écrit de façon unique en un rev. de \tilde{G}_K^d

automatiquement \underline{V} -équivariant si le rev. de départ l'était.

th: $d > 2$. X/K espace rigide de liste $Z \subset X(K)$ fermé
- localement compact. $d = \dim X$.
Ét. fini / $X \xrightarrow{\sim}$ Ét. fini / X, Z

Unicité: résultat de type Hartogs

Existence:

Th. $d > 2$ $\rho \in]0, 1[$ - Tout revêtement étale fini de

$B_K^d \setminus B_K^d(\rho)$ s'étend en un revêtement étale fini de B_K^d .

→ utilise Lütkebohmert (adaptation en p -adique de la) :
Thèse de Sieu

Tout fibré vectoriel / $B_K^d \setminus B_K^d(\rho)$ s'étend canoniquement en un faisceau cohérent / B_K^d .

Étape (2): Descente de F à \overline{B}_q .

$\text{Spa}(F) \rightarrow \text{Spa}(\overline{B}_q)$ épi. pour la top. analytique
(toute alg. perfection possède une pseudo-unif.)

\Rightarrow trucs absolus / $\overline{B}_q =$ trucs / F + donnée de descente relative au diagramme

$$\text{Spa}(F) \times \text{Spa}(F) \times \text{Spa}(F) \begin{array}{c} \rightrightarrows \\ \rightleftarrows \end{array} \text{Spa}(F) \times \text{Spa}(F) \rightrightarrows \text{Spa}(F)$$

flèches = fibrations triviales en desques ouverts perfectionnés étalés

+ Hartog (unicité dans les résultats d'extension précédent)