G-TORSEURS EN THÉORIE DE HODGE p-ADIQUE

LAURENT FARGUES

Résumé. Étant donné un groupe réductif G sur une extension de degré fini de $\mathbb{Q}_p$ on classifie les G-fibrés sur la courbe introduite dans [14]. Le résultat est interprété en termes de l'ensemble $B(G)$ de Kottwitz. On calcule également la cohomologie étale de la courbe à coefficients de torsion en lien avec la théorie du corps de classe local.

Abstract. Given a reductive group G over a finite extension of $\mathbb{Q}_p$ we classify the G-bundles over the curve introduced in [14]. The result is interpreted in terms of Kottwitz set $B(G)$. We moreover compute the étale cohomology of the curve with torsion coefficients and relate the result to local class field theory.

Introduction

Dans notre travail en commun avec J.-M. Fontaine ([14]) on a défini une « courbe » sur $\mathbb{Q}_p$. Il s'agit d'un schéma noethérien régulier de dimension 1, X sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$ associé au choix d'un corps perfectoïde F de caractéristique p. On a également classifié les fibrés vectoriels sur X. Plus précisément, à chaque choix d'un nombre rationnel λ est associé un fibré vectoriel $\mathcal{O}_X(\lambda)$ semi-stable de pente λ sur X. On a alors démontré que si F est algébriquement clos tout fibré vectoriel est somme directe de fibrés $\mathcal{O}_X(\lambda)$.
Cette classification se traduit en termes d'algèbres semi-linéaires : à tout isocristal (D,φ) on peut associer naturellement un fibré vectoriel $\mathscr{E}(D,\varphi)$ sur X et alors la correspondance précédent induit une bijection entre classes d'isomorphismes d'isocristaux et de fibrés.

Soit maintenant G un groupe réductif sur $\mathbb{Q}_p$ (ou plus généralement une extension de degré fini mais on se restreint dans cette introduction au cas de $\mathbb{Q}_p$). Dans ce texte on étudie les G-fibrés sur X du point de vue des travaux fondateurs de Kottwitz sur les G-isocristaux ([25],[26],[29]). Notons $L=\widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$ muni de son Frobenius σ et $B(G)$ les classes de σ-conjugaison dans $G(L)$. Étant donné $b\in G(L)$ on construit un G-fibré $\mathscr{E}_b$ sur X. Le résultat principal de cet article est alors le suivant qui généralise le précédent pour le groupe linéaire.

Théorème (5.1)**.** *Il y a une bijection*

$$\begin{array}{ccc} B(G) & \xrightarrow{\sim} & H^1_{\text{ét}}(X,G) \\ [b] & \longmapsto & [\mathscr{E}_b] \end{array}$$

entre classes de σ-conjugaison dans G et classes d'isomorphisme de G-fibrés sur X.

Les résultats de Kottwitz sur la structure de l'ensemble $B(G)$ s'interprètent alors agréablement du point de vue géométrique. Donnons quelques exemples (cf. sec. 6 et 8) :

— L'inclusion de la cohomologie galoisienne $H^1(\mathbb{Q}_p,G)\subset B(G)$ comme sous-ensemble des G-isocristaux « racines de l'unité » s'interprète comme l'application
$$H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p),G)\longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X,G).$$

— Le G-torseur $\mathscr{E}_b$ est semi-stable si et seulement si b est basique.

Date: 30 novembre 2020.

L'auteur a bénéficié du support du projet ANR-14-CE25 "PerCoLaTor" et du projet ERC Advanced Grant 742608 GeoLocLang.

— Le morphisme des pentes ν_b associé à b par la théorie de Dieudonné-Manin s'interprète comme un polygone de Harder-Narasimhan généralisé.
— L'application $\kappa : B(G) \to \pi_1(G)_\Gamma$ de Kottwitz s'interprète comme une classe de Chern G-équivariante.

La théorie de la réduction des G-torseurs au sens d'Atiyah-Bott permet d'éclairer sous un nouveau jour les résultats de Kottwitz. Réciproquement, celle-ci est essentielle dans la démonstration du théorème 5.1.

Il se trouve qu'au cours de la démonstration du théorème 5.1 l'auteur est tombé sur un certains nombre de faits frappants concernant la cohomologie étale de la courbe X en relation avec la théorie du corps de classe local. Voici quelques exemples :

— La cohomologie étale de la courbe à coefficients dans un système local s'identifie à la cohomologie galoisienne de $\mathbb{Q}_p$ (théo. 3.7).
— La dualité de Tate-Nakayama s'interprète comme une dualité de Poincaré sur X (coro. 3.8).
— La classe fondamentale de la courbe coïncide avec la classe fondamentale de la théorie du corps de classe (sec. 3.1).

Notons également que le théorème 5.1 fournit une nouvelle démonstration de la théorie du corps de classe local (sec. 2.2) qui, bien que fort compliquée si l'on tient compte de tous les arguments mis bout à bout, est assez naturelle et différente des autres preuves.

Il se trouve finalement que c'est durant l'élaboration de cet article que l'auteur est tombé sur certaines conjectures reliant les correspondances de Langlands locales et l'espace de module des G-torseurs sur cette courbe. On renvoie à [10] et [15] pour cela.

J'aimerais remercier Michael Rapoport et Peter Scholze pour de nombreuses discussions sur le sujet. J'aimerais également remercier Arthur-César Le Bras qui m'a fait remarquer que la conjecture 3.10 admet un analogue archimédien et Urs Hartl pour des corrections.

1. Généralités

Soient F un corps perfectoïde algébriquement clos de caractéristique p et E une extension de degré fini de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$ que l'on suppose plongé dans F. À ces données est associé un schéma

$$X_{F,E} = \mathrm{Proj}\Big(\bigoplus_{d\geq 0} B_{F,E}^{\varphi=\pi_E^d}\Big).$$

que l'on abrégera la plupart du temps en X lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité sur E et F ([14], [13], [11], [12]). Dans la notation précédente π_E est une uniformisante de E, cependant $X_{F,E}$ ne dépend pas canoniquement du choix de cette uniformisante. On note $\overline{\mathbb{F}}_q$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ dans F et L le complété de l'extension maximale non-ramifiée de E de corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_q$. Dans la suite, lorsqu'on considérera une extension algébrique E' de E on supposera toujours son corps résiduel plongé dans $\overline{\mathbb{F}}_q$ et donc

$$X_E \otimes_E E' = X_{E'}.$$

On notera également E_h l'extension non-ramifiée de degré h de E. Enfin on note parfois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{E}|E)$ pour une clôture algébrique $\overline{E}$ de E.

Notons Fib_X la catégorie des fibrés vectoriels sur X. Soit G un groupe réductif sur E. On dispose de deux points de vue sur les G-fibrés sur X :

(1) Le point de vue des G-torseurs sur X localement triviaux pour la topologie étale ou, ce qui est équivalent puisque G est lisse, pour la topologie fppf.
(2) Le point de vue Tannakien des fibrés munis d'une G-structure, c'est à dire les foncteurs exactes compatibles au produit tensoriel

$$\mathrm{Rep}_E\, G \longrightarrow \mathrm{Fib}_X.$$

Ces deux points de vue sont équivalents. Plus précisément, si $\mathscr{T} \to X$ est un G-torseur il définit le fibré muni d'une G-structure

$$\begin{array}{rcl} \omega_{\mathscr{T}} : \mathrm{Rep}_E\, G & \longrightarrow & \mathrm{Fib}_X \\ (V,\rho) & \longmapsto & \mathscr{T} \underset{G,\rho}{\times} V. \end{array}$$

Dans l'autre sens, si $\omega : \mathrm{Rep}_E\, G \to \mathrm{Fib}_X$, d'après [7] theo. 1.12,

$$\mathscr{T}_\omega = \mathrm{Isom}^{\otimes}(\omega_{can}, \omega)$$

est un G-torseur où $\omega_{can}(V,\rho) = V \otimes_E \mathcal{O}_X$ et toujours d'après [7] cela définit une équivalence entre nos deux catégories.

Notons φ-Mod_L la catégorie des isocristaux associée à $L|E$ et σ le relèvement de Frob_q. Rappelons qu'il y a un foncteur ([14] sec. 8.2.3)

$$\mathscr{E}(-) : \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_L \longrightarrow \mathrm{Fib}_X.$$

Ce foncteur est exact fidèle mais non plein ce qui explique pourquoi le théorème principal 5.1 est absolument non-évident.

Définition 1.1. *Pour $b \in G(L)$ on note $\mathscr{E}_b$ le G-fibré défini par le foncteur composé*

$$\begin{array}{rcl} Rep_E\, G & \longrightarrow & \varphi\text{-}Mod_L \xrightarrow{\mathscr{E}(-)} Fib_X \\ (V,\rho) & \longmapsto & (V_L, \rho(b)\sigma). \end{array}$$

Rappelons ([25]) que $B(G)$ désigne les classes de σ-conjugaison dans $G(L)$. La construction précédente définit une application

$$\begin{array}{rcl} B(G) & \longrightarrow & H^1_{\text{ét}}(X,G) \\ [b] & \longmapsto & [\mathscr{E}_b]. \end{array}$$

Lorsque G est un tore il y a une identification

$$\mathscr{E}_b \wedge \mathscr{E}_{b'} = \mathscr{E}_{bb'}$$

et cette application est un morphisme de groupe.

Remarque 1.2. *Dans ce texte on ne considère que des torseurs sous un groupe constants sur X c'est à dire de la forme $G \times X$ avec G défini sur E. Néanmoins il semblerait intéressant, et même plus naturel en un certain sens, d'étudier les torseurs sous des schémas en groupes réductifs plus généraux sur X. C'est en fait déjà le point de vue adopté partiellement dans le chapitre IX de* [6]. *En effet, tout schéma en groupes dans la catégorie φ-Mod_L au sens de* [6], *déf. 9.1.8, définit un schéma en groupes sur X. Par exemple, si (D,φ) est un isocristal le schéma en groupe réductif associé à (D,φ) via l'exemple 9.1.10 de* [6] *est $GL(\mathscr{E}(D,\varphi))$. Il semblerait donc intéressant de reprendre les résultats de* [6] *dans le cadre de cet article.*

2. Le cas des tores

Dans cette section on commence par étudier la cohomologie étale de la courbe X à coefficients dans un tore. Cela donne une démonstration (théo. 2.9) du théorème principal 5.1 de cet article pour les tores indépendante de celle donnée en toute généralité dans la section 5 pour tout groupe réductif. Cela nous amène à étudier la cohomologie étale de la courbe à coefficients de torsion qui se révèle avoir des liens très intéressants avec la théorie du corps de classe.

2.1. **Annulation du groupe de Brauer de la courbe.** On sait que $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ engendré par la classe du fibré $\mathcal{O}_X(1)$. On va avoir besoin dans la suite de connaître

$$H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m).$$

D'après Grothendieck ([21] coro. 2.2), puisque X est noethérien de dimension 1,

$$\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{\sim} H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$$

où le groupe de Brauer est celui classifiant les classes d'équivalence d'algèbres d'Azumaya sur X. Commençons par remarquer le résultat suivant.

Proposition 2.1. *Le morphisme $Br(E) \longrightarrow Br(X)$ est nul.*

Démonstration. D'après la théorie du corps de classe local on sait que si $[B] \in \mathrm{Br}(E)$, où B est une algèbre simple sur E, il existe un isocristal $(D, \varphi) \in \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_L$ isocline tel que

$$B \simeq \mathrm{End}(D, \varphi).$$

Mais pour un tel isocristal

$$B \otimes_E \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}nd\big(\mathscr{E}(D, \varphi)\big).$$

□

Théorème 2.2. *On a $Br(X) = 0$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{A}$ une algèbre d'Azumaya sur X. Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ on note $\mathscr{A}^{\geq \lambda}$, resp. $\mathscr{A}^{>\lambda}$, la partie de pente $\geq \lambda$, resp. $> \lambda$, dans la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathscr{A}$. Il résulte du théorème de classification 8.2.10 de [14] que le produit tensoriel de deux fibrés semi-stables est semi-stable. On en déduit en regardant le morphisme

$$\mathscr{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$$

défini par la loi d'algèbre que

$$\mathscr{A}^{\geq \lambda}.\mathscr{A}^{\geq \mu} \subset \mathscr{A}^{\geq \lambda + \mu}.$$

De plus la section unité de $\mathscr{A}$, définie par un morphisme $\mathcal{O}_X \xrightarrow{e} \mathscr{A}$, est à valeurs dans $\mathscr{A}^{\geq 0}$. Il s'en suit que $\mathscr{A}^{\geq 0}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}^{>0}$ un idéal bilatère nilpotent dans $\mathscr{A}^{\geq 0}$. Posons

$$H = \big(\mathscr{A}^{\geq 0}\big)^{\times} / e(\mathcal{O}_X^{\times})$$

comme X-schéma en groupes lisse. Montrons que H est un sous-groupe parabolique du groupe semi-simple $\mathscr{A}^{\times}/e(\mathcal{O}_X^{\times})$ de radical unipotent $1 + \mathscr{A}^{>0}$. Remarquons d'abord que $e(\mathcal{O}_X) \cap \mathscr{A}^{>0} = 0$ puisque $\mathscr{A}^{>0}$ est nilpotent. La filtration de Harder-Narasimhan de

$$\begin{aligned} \mathscr{E} &:= \mathscr{A}/e(\mathcal{O}_X) \\ &= \mathrm{Lie}\big(\mathscr{A}^{\times}/e(\mathcal{O}_X^{\times})\big) \end{aligned}$$

est donnée par
- $\mathscr{E}^{\geq \lambda} = \mathscr{A}^{\geq \lambda}/e(\mathcal{O}_X)$ si $\lambda \leq 0$
- $\mathscr{E}^{\geq \lambda} = \mathscr{A}^{\geq \lambda}$ si $\lambda > 0$.

Considérons la forme de Killing

$$\mathscr{E} \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathcal{O}_X.$$

Puisque l'algèbre de Lie $\mathscr{E}$ est localement isomorphe pour la topologie étale à pgl_n, où $\mathrm{rg}\mathscr{A} = n^2$, c'est une forme parfaite et elle induit des isomorphismes

$$\mathscr{E}^{\geq \lambda} \xrightarrow{\sim} \big(\mathscr{E}^{\vee}\big)^{\geq \lambda} = \big(\mathscr{E}^{>-\lambda}\big)^{\perp} \tag{1}$$

où l'égalité de droite est valable pour la filtration de Harder-Narasimhan de n'importe quel fibré. Par définition ([17] exp. XXVI déf. 1.1) H est un sous-groupe parabolique si et seulement si c'est le cas après spécialisation en chaque fibre géométrique de X. Soit donc $\bar{x} \to X$ un point géométrique de X. Par spécialisation de (1) on obtient que sous la forme de Killing de $\mathscr{E} \otimes k(\bar{x})$

$$\mathscr{E}^{>0} \otimes k(\bar{x}) = \big(\mathscr{E}^{\geq 0} \otimes k(\bar{x})\big)^{\perp}.$$

D'après la proposition 3.1 de [18] on en déduit que l'algèbre $\mathscr{E}^{\geq 0}\otimes k(\bar{x})$ est parabolique de radical nilpotent $\mathscr{E}^{>0}\otimes k(\bar{x})$. Puisque $k(\bar{x})$ est de caractéristique 0, on en déduit que H est un sous-groupe parabolique de radical unipotent $1+\mathscr{A}^{>0}$.

Soit $P\subset \mathrm{PGL}_n$ le sous-groupe parabolique standard de type celui défini par $H\subset \mathscr{A}^\times/e(\mathcal{O}_X^\times)$. Puisque H et P sont localement conjugués pour la topologie étale ([17] exp. XXVI prop. 1.3), la classe de cohomologie

$$[\mathrm{Isom}(M_n,\mathscr{A})]\in H^1_{\text{ét}}(X,\mathrm{PGL}_n)$$

provient d'une classe de cohomologie dans

$$H^1_{\text{ét}}(X,P)$$

i.e. le PGL_n-torseur défini par $\mathscr{A}$ possède une réduction canonique à P (cf. rem. 2.4 qui suit). Cette classe de cohomologie est donnée par le P-torseur

$$\mathrm{Isom}_{\mathcal{O}_X\text{-alg}}(\mathrm{Lie}\,\tilde{P},\mathscr{A}^{\geq 0}).$$

où $\tilde{P}$ est le sous-groupe parabolique de GL_n image réciproque de P.

Notons $\alpha\in H^1_{\text{ét}}(X,P)$ cette classe. Soit $\mathscr{U}_\alpha$ la forme tordue du radical unipotent U de P par α via l'action de P sur U par automorphismes intérieurs. Le groupe $\mathscr{U}_\alpha$ est filtré par

$$\mathscr{U}_\alpha^{\geq\lambda}=1+\mathscr{A}^{\geq\lambda},\quad \lambda\in\mathbb{Q}_{>0}$$

de gradués

$$\mathscr{U}_\alpha^{\geq\lambda}/\mathscr{U}_\alpha^{>\lambda}=\mathscr{A}^{\geq\lambda}/\mathscr{A}^{>\lambda}.$$

On note M le quotient de Levi de P. La fibre de l'application

$$H^1_{\text{ét}}(X,P)\longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X,M)$$

au dessus de l'image de α s'identifie à l'ensemble pointé

$$H^1_{\text{ét}}(X,\mathscr{U}_\alpha)$$

dont la classe triviale correspond à α. Cet ensemble de cohomologie se dévisse alors par récurrence en les

$$H^1(X,\mathscr{A}^{\geq\lambda}/\mathscr{A}^{>\lambda})$$

qui sont nuls puisque $\mathscr{A}^{\geq\lambda}/\mathscr{A}^{>\lambda}$ est semi-stable de pente positive. On en déduit que α est complètement déterminée par son image dans $H^1_{\text{ét}}(X,M)$.

Notons $\beta\in H^1_{\text{ét}}(X,M)$ l'image de α. La $\mathcal{O}_X$-algèbre $\mathscr{A}^{\geq 0}/\mathscr{A}^{>0}$ est de la forme

$$\prod_{i=1}^r \mathscr{B}_i$$

où les $\mathscr{B}_i$ sont des algèbres d'Azumaya. Le fibré $\mathscr{A}^{\geq 0}/\mathscr{A}^{>0}$ est semi-stable de pente 0 or il y a une équivalence tensorielle

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Vect}_E & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Fib}_X^{ss,0}\\ V & \longmapsto & V\otimes_E\mathcal{O}_X.\end{array}$$

Il existe donc des algèbres semi-simples $B_1,\dots,B_r$ centrales sur E telles que

$$\mathscr{B}_i\simeq B_i\otimes_E\mathcal{O}_X.$$

On a $M=(\prod_{i=1}^r\mathrm{GL}_{m_i})/\mathbb{G}_m$ avec $\dim_E B_i=m_i^2$. De la proposition 2.1 on en déduit que l'image par le morphisme

$$M\longrightarrow\prod_{i=1}^r\mathrm{PGL}_{m_i}$$

de notre classe de β est celle de l'algèbre d'Azumaya

$$\prod_{i=1}^r\mathscr{E}nd(\mathscr{E}_i)$$

pour des fibré vectoriels $\mathscr{E}_i$ de rang m_i. La suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}_m^r/\mathbb{G}_m \longrightarrow M \longrightarrow \prod_{i=1}^r \mathrm{PGL}_{m_i} \longrightarrow 1$$

montre alors qu'il existe des fibrés en droites $\mathscr{L}_1, \dots, \mathscr{L}_r$ tels que

$$\mathscr{A} \simeq \mathrm{End}\Big(\bigoplus_{i=1}^r \mathscr{E}_i \otimes \mathscr{L}_i\Big)$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarque 2.3. *La preuve précédente s'applique pour montrer que si k est un corps $Br(k) \xrightarrow{\sim} Br(\mathbb{P}^1_k)$ sans utiliser le théorème de Tsen.*

Remarque 2.4. *La première partie de la preuve précédente consiste à montrer l'existence d'une réduction canonique du type Atiyah-Bott d'un PGL_n-torseur en termes d'algèbres de Lie. Comme dans les travaux de Behrend ([2]) cela se formule en la construction d'un sous-schéma en groupes parabolique de la forme intérieure de PGL_n associée à notre torseur. Dans notre situation cette forme intérieure est $\mathscr{A}^\times$. On renvoie également à la section 5.1.*

On note $E(X)$ le corps des fonctions de la courbe. Notons le corollaire suivant que nous n'utiliserons pas.

Corollaire 2.5. *Le groupe de Brauer de $E(X)$ est trivial.*

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\mathrm{Br}(E(X))[n] = \varinjlim_{U} H^2(U, \mu_n)$$

où U parcourt les ouverts non vides de X. D'après le théorème de pureté absolu de Gabber ([16]) pour un tel U l'application

$$H^2(X, \mu_n) \longrightarrow H^2(U, \mu_n)$$

est surjective. D'après le théorème 2.2 toute classe dans $H^2(X, \mu_n)$ est la classe de Chern d'un fibré en droites sur X. La restriction d'un tel fibré en droites à $U \subsetneq X$ est triviale (U est le spectre d'un anneau principal). On en déduit que l'image d'une telle classe dans $H^2(U, \mu_n)$ est nulle. $\square$

2.2. **Une nouvelle preuve de la théorie du corps de classe locale.** En fait le théorème 2.2 précédent résulte du théorème principal 5.1 qui sera démontré *indépendamment*. En effet, si l'application $B(\mathrm{PGL}_n) \to H^1_{\text{ét}}(X, \mathrm{PGL}_n)$ est surjective, puisque $B(\mathrm{GL}_n) \to B(\mathrm{PGL}_n)$ est surjective l'application $H^1_{\text{ét}}(X, GL_n) \to H^1_{\text{ét}}(X, \mathrm{PGL}_n)$ l'est également. On a tout de même préféré donné une preuve indépendante de 2.2 car le lien avec la théorie du corps de classe de E y fait déjà son apparition (cf. prop. 2.1) ce dont l'auteur ne se serait pas rendu compte s'il ne s'était intéressé qu'au théorème 5.1. En renversant les arguments on trouve alors l'énoncé suivant.

Théorème 2.6. *Le théorème 5.1 implique la théorie du corps de classe local associée à E au sens où l'application qui à un isocristal (D, φ) simple de pente λ associe la classe $[End(D, \varphi)] \in Br(E)$ induit un isomorphisme*

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} Br(E).$$

Démonstration. Comme expliqué précédemment, si le théorème 5.1 est vérifié et B est une algèbre centrale simple sur E alors $B \otimes_E \mathcal{O}_X \simeq \mathscr{E}nd(\mathscr{E})$ pour un fibré vectoriel $\mathscr{E}$ sur X. Puisque $B \otimes_E \mathcal{O}_X$ est un fibré semi-stable de pente 0, $\mathscr{E}$ est semi-stable et donc d'après le théorème de classification des fibrés sur X il existe un isocristal simple (D, φ) tel que $\mathscr{E} \simeq \mathscr{E}(D, \varphi)$. On conclut puisque $B = H^0(X, B \otimes_E \mathcal{O}_X) = \mathrm{End}(D, \varphi)$. $\square$

Cette preuve repose sur le théorème de classification des fibrés de [14] qui n'utilise a aucun moment la théorie du corps de classe locale. Elle est différente des preuves usuelles au sens où elle n'utilise pas d'argument de comptage d'ordre de certains groupes de cohomologie galoisienne.

2.3. **Annulation du second groupe de cohomologie des tores.** Soit T un tore algébrique sur E. On va maintenant généraliser le théorème 2.2 au cas de T. Notons

$$f : X_{\text{ét}} \longrightarrow \operatorname{Spec}(E)_{\text{ét}}.$$

On note encore T pour $T \times_E X$ par abus de notation. Puisque $\Gamma(X_{\overline{E}}, \mathcal{O}_{X_{\overline{E}}}) = \overline{E}$ on a

$$f_* T = T. \tag{2}$$

Puisque $\operatorname{Pic}(X_{\overline{E}}) = \mathbb{Q}$ on a

$$R^1 f_* T = X_*(T)_{\mathbb{Q}} \tag{3}$$

comme module galoisien. Enfin, le théorème 2.2 fournit

$$R^2 f_* T = 0. \tag{4}$$

Théorème 2.7. *On a* $H^2_{\text{ét}}(X, T) = 0$.

Démonstration. Considérons la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{ij} = H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(E), R^j f_* T) \Longrightarrow H^{i+j}_{\text{ét}}(X, T).$$

On a :
- $E_2^{02} = 0$ d'après (4),
- $E_2^{11} = H^1(\operatorname{Gal}(\overline{E}|E), X_*(T)_{\mathbb{Q}}) = 0$ d'après (3),
- $E_2^{20} = H^2(\operatorname{Gal}(\overline{E}|E), T(\overline{E}))$ d'après (2), qui est le dual de Pontryagin de $H^0(\operatorname{Gal}(\overline{E}|E), X^*(T))$ d'après Tate-Nakayama.

On en déduit que $H^2_{\text{ét}}(X, T)$ est un groupe divisible.
Soit maintenant $E'|E$ une extension galoisienne scindant T. Regardons la suite spectrale

$$E_2^{ij} = H^i(\operatorname{Gal}(E'|E), H^j_{\text{ét}}(X_{E'}, T)) \Longrightarrow H^{i+j}_{\text{ét}}(X, T).$$

Dans la catégorie quotient des groupes abéliens par la sous catégorie épaisse formée des groupes de torsion bornée (annulés par un entier) on a :
- $E_2^{11} = E_2^{20} = 0$ puisqu'ils sont annulés par $[E' : E]$,
- $E_2^{02} = 0$ d'après le théorème 2.2.

On en déduit que $H^2_{\text{ét}}(X, T)$ est de torsion bornée ce qui permet de conclure. □

Remarque 2.8. *On a vu que le théorème 5.1 implique directement l'annulation de* $\operatorname{Br}(X)$ *(cf. intro. sec. 2.2). Il implique en fait plus généralement 2.7 indépendamment de tout l'arsenal de la théorie du corps de classe (en particulier la dualité de Tate-Nakayama). Considérons en effet une suite exacte de tores* $0 \to T \to T' \to T'' \to 0$ *avec* T' *un tore induit. L'application* $B(T') \to B(T'')$ *est surjective (Steinberg). L'annulation de* $H^2(X, T')$ *implique alors celle de* $H^2(X, T)$.

2.4. **L'isomorphisme entre $B(T)$ et $H^1_{\text{ét}}(X, T)$.** On peut maintenant montrer le résultat principal 5.1 dans le cas des tores.

Théorème 2.9. *Il y a un isomorphisme*

$$\begin{array}{ccc} B(T) & \xrightarrow{\sim} & H^1_{\text{ét}}(X, T) \\ [b] & \longmapsto & [\mathscr{E}_b]. \end{array}$$

Démonstration. Le foncteur qui à E et un tore T sur E associe $H^1_{\text{ét}}(X_E, T)$ vérifie :
- il est exacte à droite d'après le théorème 2.7,
- il est compatible à la restriction des scalaires c'est à dire pour $E'|E$ finie et T sur E'

$$H^1_{\text{ét}}(X_E, \operatorname{Res}_{E'/E} T) = H^1_{\text{ét}}(X_{E'}, T).$$

Il en est de même pour $T \mapsto B(T)$. De plus la transformation naturelle de foncteurs

$$B(-) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X_E, -)$$

vérifie :
- elle est compatible aux identifications $B(\operatorname{Res}_{E'/E} T) = B(T)$ et $H^1_{\text{ét}}(X_E, \operatorname{Res}_{E'/E} T) = H^1_{\text{ét}}(X_{E'}, T)$,

— si $T = \mathbb{G}_m$ c'est un isomorphisme d'après le calcul de $\mathrm{Pic}(X_E)$.
Le lemme 2.2 de [25] permet alors de conclure que c'est un isomorphisme. $\square$

Avec les notations de la section 2.3, il y a un triangle exacte

$$\begin{tikzcd} \tau_{\leq 2} Rf_* T \arrow[rr] & & X_*(T)_{\mathbb{Q}}[-1] \arrow[dl, "+1"] \\ & T \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

qui est le dévissage de $\tau_{\leq 2} Rf_* T$ en $f_* T$ et $R^1 f_* T$. Il induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(E, T) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X, T) \longrightarrow X_*(T)^{\Gamma}_{\mathbb{Q}}$$

Via l'isomorphisme de Kottwitz ([25] sec. 2.4)

$$X_*(T)_\Gamma \xrightarrow{\sim} B(T)$$

cette suite exacte coïncide avec la suite exacte

$$0 \longrightarrow X_*(T)_\Gamma^{tor} \longrightarrow X_*(T)_\Gamma \longrightarrow X_*(T)^\Gamma_{\mathbb{Q}}$$

où la flèche de droite s'interprète comme étant l'application $[b] \mapsto [\nu_b]$. Il suffit pour cela de vérifier que les différentes flèches sont compatibles à la restriction des scalaires des tores et que ces deux suites exactes s'identifient pour $T = \mathbb{G}_m$, ce qui ne pose pas de problème.

3. Cohomologie de la courbe à coefficients de torsion

Dans la section précédente on a étudié la cohomologie étale de X à coefficients dans un tore. On va maintenant étudier la cohomologie étale du schémas X à coefficients dans des systèmes locaux de torsion.

3.1. **La classe fondamentale de la courbe.** Commençons par le calcul suivant.

Proposition 3.1. *Il y a un isomorphisme canonique*

$$tr : H^2_{\text{ét}}(X, \mu_n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

via lequel $tr(c_1(\mathcal{O}_X(1))) = \bar{1}$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la théorie de Kummer couplée au théorème d'annulation 2.2 et le calcul de $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z} =< [\mathcal{O}_X(1)] >$. $\square$

Remarquons que d'après le théorème de pureté de Gabber ([16]), puisque X est régulier de dimension 1, si $i : Z \hookrightarrow X$ est un sous-schéma fermé propre, il y a un isomorphisme canonique

$$i_* i^! \mu_n \xrightarrow{\sim} i_* \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[-2].$$

On dispose donc d'une application classe de cycle

$$cl : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(X, \mu_n)$$

et on vérifie qu'elle est compatible à la première classe de Chern utilisée précédemment via l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Div}(X)/\sim & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Pic}(X) \\ [D] & \longmapsto & [\mathcal{O}_X(D)]. \end{array}$$

Définition 3.2. *On note*

$$\eta_{X_E} = c_1(\mathcal{O}_{X_E}(1)) = cl([x]) \in H^2_{\text{ét}}(X_E, \mu_n)$$

pour n'importe quel $x \in |X_E|$ *la classe fondamentale de la courbe.*

Remarquons la propriété suivante de compatibilité lorsque le corps E varie.

Proposition 3.3. *Soit* $E'|E$ *de degré fini. Notons* $\pi_{E'/E} : X_{E'} \to X_E$.

(1) Le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} H^2_{\text{ét}}(X_E, \mu_n) \arrow[r, "tr"] \arrow[d, "\pi^*_{E'/E}"'] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[d, "\times[E':E]"] \\ H^2_{\text{ét}}(X_{E'}, \mu_n) \arrow[r, "tr"] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

et donc

$$\pi^*_{E'/E}\eta_{X_E} = [E' : E]\eta_{X_{E'}}.$$

(2) Le diagramme suivante

$$\begin{tikzcd} H^2_{\text{ét}}(X_{E'}, \mu_n) \arrow[r, "tr"] \arrow[d, "\pi_{E'/E!}"'] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[d, "Id"] \\ H^2_{\text{ét}}(X_E, \mu_n) \arrow[r, "tr"] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

et donc

$$\pi_{E'/E!}\eta_{X_{E'}} = \eta_{X_E}.$$

Démonstration. On utilise les notations de la section 8.2 de [14]. Le point (1) est une conséquence de ce que l'image réciproque de $\mathcal{O}_{X_E}(1)$ à $X_{E'}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{X_{E'}}([E' : E])$. Le point (2) quant à lui résulte de ce que

$$\begin{aligned} \det\big(\pi_{E'/E*}\mathcal{O}_{X_{E'}}(1)\big) &= \det\big(\mathcal{O}_{X_E}\big(\tfrac{1}{[E':E]}\big)\big) \\ &\simeq \mathcal{O}_{X_E}(1) \end{aligned}$$

et de ce que

$$\pi_{E'/E!}c_1(\mathcal{O}_{X_{E'}}(1)) = c_1\big(\det\big(\pi_{E'/E*}\mathcal{O}_{X_{E'}}(1)\big)\big).$$

□

Normalisons la théorie du corps de classe de telle manière que le Frobenius arithmétique corresponde à une uniformisante.

Proposition 3.4. *Via l'application $Br(E)[n] = H^2(E, \mu_n) \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(X_E, \mu_n)$ la classe fondamentale de la théorie du corps de classe s'envoie sur la classe fondamentale de la courbe η_{X_E}.*

Démonstration. Soit $D_{1/n}$ l'algèbre à division sur E des automorphismes de l'isocristal isocline de pente $-1/n$. Sa classe dans le groupe de Brauer de E est la classe fondamentale de la théorie du corps de classe associée à l'extension non-ramifiée de degré n de E. De plus

$$D_{1/n} \otimes_E \mathcal{O}_{X_E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}nd\big(\mathcal{O}_{X_E}(\tfrac{1}{n})\big).$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\ 1 \arrow[r] & \mu_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{SL}_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{PGL}_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[d, "\times n"] & \mathrm{GL}_n \arrow[r] \arrow[d, "\det"] & \mathrm{PGL}_n \arrow[r] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbb{G}_m \arrow[d] & & \\ & 1 & 1 & & \end{tikzcd}$$

duquel on déduit en chassant les cocycles de Cech non abéliens que l'application composée

$$H^1(X, \mathrm{GL}_n) \longrightarrow H^1(X, \mathrm{PGL}_n) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mu_n)$$

coïncide avec
$$H^1(X,\mathrm{GL}_n) \xrightarrow{\det} H^1(X,\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\delta} H^2(X,\mu_n).$$
La proposition découle alors de ce que
$$\det \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{n}) \simeq \mathcal{O}_X(1).$$
□

Remarque 3.5. *Traditionnellement ([31] chap. XI §3) la classe fondamentale en théorie du corps de classe local est associée à une extension de degré fini $E'|E$. Du point de vue de la courbe on définit $u_{E'/E} \in H^2(E'|E,\mathbb{G}_m)$ de la façon suivante. On remarque que $\pi^*_{E'/E}\mathcal{O}_{X_E}(1) \simeq \mathcal{O}_{X_{E'}}([E':E])$. Posons $n=[E':E]$. La μ_n-gerbe des racines n-ièmes de $\mathcal{O}_{X_E}(1)$ est donc neutralisée par le revêtement $X_{E'} \to X_E$. Il s'en suit que $c_1(\mathcal{O}_{X_E}(1)) \in \check{H}^2(X_{E'}/X_E,\mu_n)$ qui est la classe de cohomologie de cette gerbe.*

Remarque 3.6. *Le problème existentiel usuel des théoriciens des nombres qui consiste à savoir si l'on doit normaliser la théorie du corps de classe en se faisant se correspondre un Frobenius ou bien un Frobenius géométrique et une uniformisante se reflète ici en le choix d'un générateur de Pic(X) : $[\mathcal{O}_X(1)]$ (choix du générateur ample) ou bien $[\mathcal{O}_X(-1)]$ (générateur anti-ample).*

3.2. **Cohomologie de la courbe à coefficients dans un système local.** On peut maintenant en venir au point principal qui dit que l'on peut calculer la cohomologie galoisienne de E à coefficients de torsion en termes de la cohomologie étale de la courbe.

Théorème 3.7. *Notons $f : X \to Spec(E)$ et soit $\mathscr{F}$ un système locale étale de torsion sur $Spec(E)$. Pour $0 \le i \le 2$ il y a un isomorphisme*
$$f^* : H^i_{\text{ét}}(Spec(E),\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} H^i_{\text{ét}}(X,f^*\mathscr{F}).$$

Démonstration. Commençons par vérifier que pour $i\in\{1,2\}$ on a
$$H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{E}},f^*\mathscr{F})=0.$$
Pour cela il suffit de vérifier que pour tout entier $n\ge 1$,
$$H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{E}},\mu_n)=0.$$
Cela résulte alors de la suite exacte longue de Kummer couplée au fait que
$$\begin{aligned}\mathrm{Pic}(X_{\overline{E}}) &= \mathbb{Q},\\ H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{E}},\mathbb{G}_m) &= \varinjlim_{E'|E \text{ finie}} H^2_{\text{ét}}(X_{E'},\mathbb{G}_m)\\ &= 0\end{aligned}$$
d'après le théorème 2.2.
On peut maintenant appliquer la suite spectrale de Hochschild-Serre
$$E_2^{ij}=H^i\big(\mathrm{Gal}(\overline{E}|E),H^j_{\text{ét}}(X_{\overline{E}},f^*\mathscr{F})\big) \Longrightarrow H^{i+j}_{\text{ét}}(X_E,f^*\mathscr{F})$$
pour conclure. □

Rappelons que $X_{\overline{E}}$ est simplement connexe ([14] théo. 8.6.1). On en déduit le résultat suivant en utilisant la dualité de Tate-Nakayama et la formule de Tate pour la caractéristique d'Euler-Poincaré de la cohomologie galoisienne ([32] chap. II §5 5.7).

Corollaire 3.8. *Soit $\mathscr{G}$ un système local étale de torsion sur X. Si $f: X\to Spec(E)$ on a alors*
$$f^*\tau_{\le 2}Rf_*\mathscr{G} \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}.$$
De plus si $\mathscr{G}^\vee$ désigne son dual de Pontryagin :

(1) Il y a un accouplement parfait de dualité de Poincaré pour $0\le i\le 2$
$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{G})\times H^{2-i}_{\text{ét}}(X,\mathscr{G}^\vee(1)) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow[\sim]{tr} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
qui s'interprète comme la dualité de Tate-Nakayama.

(2) On dispose d'une formule pour la caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\prod_{i=0}^{2} \left| H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{G}) \right|^{(-1)^i} = |\mathscr{G}|_E.$$

qui s'interprète comme la formule de Tate.

3.3. **Quelques conjectures.** À la vue des résultats précédents la conjecture suivante s'impose.

Conjecture 3.9. *Pour $\mathscr{F}$ un faisceau étale de torsion sur X on a $H^i(X,\mathscr{F}) = 0$ lorsque $i \geq 3$.*

La conjecture se ramène bien sûr au cas des faisceaux constructibles et donc au cas de $j_!\mathscr{G}$ où $j : U \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert non vide de X et $\mathscr{G}$ un système local sur U. Dans la suite on notera

$$H^i_c(U,\mathscr{G}) := H^i(X, j_!\mathscr{G}).$$

Voici deux méthodes pour attaquer cette conjecture. La première est de constater qu'elle résulte de la suivante (théorème de Tsen pour les courbes « usuelles » sur un corps algébriquement clos).

Conjecture 3.10. *Le corps des fonctions rationnelles sur X, $E(X)$, est (C1).*

Une des motivations est qu'il semble qu'un analogue de la courbe X_E dans le cas $E = \mathbb{R}$ soit lié à la conique sans point réel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, c'est à dire la forme tordue de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ sans points réels. Or, il est conjecturé que le corps des fonctions de cette courbe est (C1) ([28] p.379) contrairement au corps des fonctions de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ qui n'est pas (C1) pour des raisons évidentes. Bien sûr lorsque $E = \mathbb{C}$ ce corps est (C1) d'après Tsen.

Une autre façon d'attaquer la conjecture 3.9 est la suivante. Rappelons que l'on peut définir un pendant adique X^{ad} de la courbe schématique X ([9] sec. 2 et [10]). Il y un morphisme continu de sites étales

$$X^{ad}_{\text{ét}} \longrightarrow X_{\text{ét}}.$$

Avec les notations de [14] cela résulte de l'existence d'un morphisme de ind-schémas φ-invariant

$$\varinjlim_{I \subset]0,1[} \operatorname{Spec}(B_I) \longrightarrow X$$

et de ce que les algèbres de Banach B_I sont fortement noethériennes ([24]). En effet, puisque B_I est fortement noethérienne, pour $U \to \operatorname{Spec}(B_I)$ étale on peut définir naturellement son adifié qui est un morphisme étale $U^{ad} \to \operatorname{Spa}(B_I, B_I^\circ)$ et cela définit un morphisme continu de sites

$$\operatorname{Spa}(B_I, B_I^\circ)_{\text{ét}} \longrightarrow \operatorname{Spec}(B_I)_{\text{ét}}.$$

On peut alors formuler la conjecture suivante.

Conjecture 3.11. *Pour tout faisceau étale de torsion $\mathscr{F}$ sur X le morphisme continu $X^{ad}_{\text{ét}} \to X_{\text{ét}}$ induit un isomorphisme*

$$H^\bullet_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} H^\bullet_{\text{ét}}(X^{ad},\mathscr{F}^{ad}).$$

Passons maintenant à la question de l'extension de la dualité de Poincaré aux faisceaux constructibles qui se dévisse à la conjecture suivante.

Conjecture 3.12. *Soit $U \subset X$ un ouvert non vide de X et $\mathscr{F}$ un système local étale de torsion sur U. Pour $0 \leq i \leq 2$ l'accouplement*

$$H^i_c(U,\mathscr{F}) \times H^{2-i}(U,\mathscr{F}^\vee(1)) \longrightarrow H^2_c(U,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = H^2(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est parfait.

Cette conjecture étant supposée vérifiée, se pose la question de son interprétation comme *généralisation de la dualité de Tate-Nakayama.* On peut également se demander si la bonne notion qui s'interprète agréablement comme généralisation de la dualité de Tate-Nakayama n'est pas plutôt la *cohomologie d'intersection* $\mathbb{H}^i(X,\mathscr{F}) := H^i(X, j_*\mathscr{F})$ qui devrait être autoduale.

4. Interprétation de l'application κ de Kottwitz pour les tores en termes de classe de Chern équivariante

Si T est un tore sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 il y a un unique isomorphisme

$$H^2_{\text{ét}}(BT, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\sim} X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

fonctoriel en T et tel que pour $T = \mathbb{G}_m$ celui-si soit donné par la classe de Chern d'un fibré en droites. Soit maintenant T un tore sur E. On note $\Gamma = \text{Gal}(\overline{E}|E)$. La suite spectrale de Hochschild-Serre fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Br}(E) \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(BT, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \longrightarrow \underbrace{\left(X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)^{\Gamma}}_{(X_*(T)_\Gamma)^D} \longrightarrow 0$$

où $(-)^D$ désigne la dualité de Pontryagin. En écrivant

$$H^1_{\text{ét}}(X, T) = \text{Hom}(X, BT)$$

on obtient un accouplement

$$H^1_{\text{ét}}(X, T) \times H^2_{\text{ét}}(BT, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

via l'isomorphisme trace (prop. 3.1). Puisque l'application $\text{Br}(E) \to \text{Br}(X)$ est nulle (prop. 2.1), cet accouplement est nul sur $\text{Br}(E) \subset H^2_{\text{ét}}(BT, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$. Il induit donc un morphisme

$$c_1^T : H^1_{\text{ét}}(X, T) \longrightarrow (X_*(T)_\Gamma)^{DD} = \widehat{X_*(T)_\Gamma}$$

le complété profini de $X_*(T)_\Gamma$. Rappelons maintenant que Kottwitz a construit dans [25] un isomorphisme canonique

$$X_*(T)_\Gamma \xrightarrow{\sim} B(T)$$

dont l'inverse est noté κ.

Proposition 4.1. *Via l'isomorphisme $B(T) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(X, T)$ l'application classe Chern T-équivariante c_1^T coïncide avec l'opposé de l'application κ de Kottwitz composée avec l'inclusion de $X_*(T)_\Gamma$ dans son complété profini.*

Démonstration. Le morphisme c_1^T est fonctoriel en T. De plus, si $E'|E$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^1_{\text{ét}}(X_E, \text{Res}_{E'/E} T_{E'}) \arrow[r, "c_1^{\text{Res}_{E'/E} T_{E'}}"] \arrow[d, equal] & \widehat{X_*(\text{Res}_{E'/E} T_{E'})_{\Gamma_E}} \arrow[d, equal] \\
H^1_{\text{ét}}(X_{E'}, T_{E'}) \arrow[r, "c_1^{T_{E'}}"] & \widehat{X_*(T)_{\Gamma_{E'}}}
\end{tikzcd}$$

commute. Lorsque $T = \mathbb{G}_m$ les deux applications $c_1^{\mathbb{G}_m}$ et $-\kappa$ coïncident car à une uniformisante $\pi_E \in T(E)$ est associé le fibré $\mathcal{O}_{X_E}(-1)$ de classe de Chern -1. Les deux foncteurs $T \mapsto H^1_{\text{ét}}(X, T)$ et $T \mapsto \widehat{X_*(T)_\Gamma}$ étant exactes à droite on en déduit le résultat (cf. [25] sec. 2.1). $\square$

5. Classification des G-torseurs

Dans cette section on montre le résultat principal suivant.

Théorème 5.1. *Pour G un groupe réductif sur E il y a une bijection d'ensembles pointés*

$$\begin{array}{ccc} B(G) & \xrightarrow{\sim} & H^1_{\text{ét}}(X, G) \\ [b] & \longmapsto & [\mathscr{E}_b]. \end{array}$$

Le plan de la preuve est le suivant :

— On commence par montrer dans la section 5.2 que les classes d'isomorphisme de G-torseurs sur X s'identifient aux classes de φ-conjugaison dans $G(\overline{B})$ où $\overline{B}$ est un anneau de théorie de Hodge p-adique introduit dans [14].

- On traite ensuite le cas où le groupe G est quasi-déployé dans la section 5.3. Ce cas là se divise en deux :
  - Le cas semi-stable (sec. 5.3.1) que l'on traite via les classes de φ-conjugaison dans $G(\overline{B})$.
  - La réduction au cas semi-stable qui se ramène au cas précédent en montrant que tout torseur possède une réduction semi-stable à un sous-groupe de Levi (sec. 5.3.2), un énoncé analogue au fait que pour $G = \mathrm{GL}_n$ la filtration de Harder-Narasimhan est scindée.
- On conclut le cas G général par un argument de descente galoisienne non-ramifiée dans la section 5.4.

5.1. **Réduction canonique d'un G-torseur.** La théorie de Harder-Narasimhan de la réduction des GL_n-torseurs sur les courbes propres et lisses sur un corps ([22]) a été étendue au cadre des groupes réductifs par Atiyah et Bott dans [1]. Atiyah et Bott se placent dans le contexte des torseurs sur une surface de Riemann compacte. Cependant Biswas et Holla montrent dans [3] qu'une telle théorie existe dans le contexte des G-torseurs sur une courbe propre et lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Ici G est un groupe réductif constant c'est à dire défini sur le corps de base. Lorsque G n'est plus constant, c'est à dire est un schéma en groupes réductifs sur la courbe, Behrend a développé dans [2] une théorie de la réduction d'un G-torseur $\mathscr{T}$ en termes de sous-groupe parabolique canonique du schéma en groupes réductif $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{T})$ forme intérieure de G. Enfin, remarquons qu'un point de vue Tannakien sur les filtrations dans les catégories Tannakiennes est étudié en détails dans [34] en complément des résultats de [30] dont nous utiliserons parfois les résultats. On pourra également se référer à [5] pour des résultats généralisant ceux de [34] pour les groupes non constants .

Revenons à notre courbe X sur E. Soit G un groupe réductif sur E. Si $\mathscr{T}$ est un G-torseur sur X et H un sous-groupe algébrique de G par définition une réduction de $\mathscr{T}$ à H est la donnée d'un H-torseur $\mathscr{T}_H$ ainsi que d'un isomorphisme

$$\mathscr{T}_H \underset{H}{\times} G \xrightarrow{\sim} \mathscr{T}.$$

Par abus de notations on notera $\mathscr{T}_H$ une telle réduction, l'isomorphisme précédent étant supposé fixé. Rappelons également qu'une réduction de $\mathscr{T}$ coïncide avec la donné d'une section de la fibration

$$\mathscr{T}/H \longrightarrow X$$

étale localement triviale de fibre G/H. On vérifie que les résultats de [3] s'appliquent aux G-torseurs sur $X_{\overline{E}}$. Supposons maintenant de plus que G est quasi-déployé et fixons un sous-groupe de Borel B de G. Soit $\mathscr{T}$ un G-torseur sur X_E et $\mathscr{T}_{\overline{E}}$ son image réciproque sur $X_{\overline{E}}$. Il existe alors un sous-groupe parabolique standard P dans $G_{\overline{E}}$ et une réduction *canonique* $\mathscr{T}_{\overline{E},P}$ de $\mathscr{T}_{\overline{E}}$ à P telle que si M désigne le quotient de Levi de P

$$\mathscr{T}_{\overline{E},P} \underset{P}{\times} M = \mathscr{T}_{\overline{E},P}/R_uP$$

soit semi-stable. Appliquant la propriété de canonicité à $(P^\sigma, \mathscr{T}^\sigma_{\overline{E},P})$ pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{E}|E)$ on constate alors que $(P, \mathscr{T}_{\overline{E},P})$ descendent sur E en un couple $(Q, \mathscr{T}_Q)$ que l'on appelle la réduction canonique de $\mathscr{T}$.

Étant donné un G-torseur $\mathscr{T}$ sur X on note

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\mathscr{T}) &= \mathscr{T} \underset{G,\mathrm{Ad}}{\times} \mathrm{Lie}\, G \\ &= \mathrm{Lie}\big(\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{T})\big)\end{aligned}$$

le fibré vectoriel en algèbres de Lie associé via la représentation adjointe. Dans la formule précédente $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{T})$ s'interprète également comme étant la forme intérieure de $G \times X$ obtenue par torsion par $\mathscr{T}$ via l'action par automorphismes intérieures de G sur lui-même.
Notons $A \subset T \subset B$ où A est un tore déployé maximal , T un tore maximal et B un sous-groupe de Borel. On utilisera dans la suite les propriétés suivantes pour $\mathscr{T}$ de réduction canonique $\mathscr{T}_P$:

(1) $\mathscr{T}$ est semi-stable si et seulement si le fibré de pente 0 $\mathrm{Ad}(\mathscr{T})$ est semi-stable.

(2) L'application

$$\begin{array}{ccc} X^*(P) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \chi & \longmapsto & \deg\big(\chi_*\mathscr{T}_P\big) \end{array}$$

est Galois invariante et définit donc un élément

$$\nu_{\mathscr{T}} \in X_*(A)_{\mathbb{Q}} = X_*(T)_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{Gal}(\overline{E}|E)} = \mathrm{Hom}(X^*(P),\mathbb{Q})^{\mathrm{Gal}(\overline{E}|E)}$$

que l'on voit comme étant un morphisme

$$\nu_{\mathscr{T}} : \mathbb{D} \longrightarrow A$$

où $\mathbb{D}$ est le pro-tore des pentes, $X^*(D) = \mathbb{Q}$.

(3) On a

$$\nu_{\mathscr{T}} \in X^*(A)_{\mathbb{Q}}^+$$

la chambre de Weyl positive relativement au sous-groupe de Borel B.

(4) Le sous-groupe parabolique P est celui associé à $\nu_{\mathscr{T}}$.

(5) Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ soit $\mathrm{Ad}(\mathscr{T})^{\geq\lambda}$ la partie de pente $\geq \lambda$ dans la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathrm{Ad}(\mathscr{T})$. On a alors

$$\big[\mathrm{Ad}(\mathscr{T})^{\geq\lambda}, \mathrm{Ad}(\mathscr{T})^{\geq\mu}\big] \subset \mathrm{Ad}(\mathscr{T})^{\geq\lambda+\mu}.$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Lie}\big(\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{T}_P)\big) & = & \mathrm{Ad}(\mathscr{T})^{\geq 0} \\ \mathrm{Lie}\big(R_u\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{T}_P)\big) & = & \mathrm{Ad}(\mathscr{T})^{>0}. \end{array}$$

(6) Le sous-groupe parabolique $\mathscr{P} = \underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{T}_P) \subset \underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{T})$ est le groupe des automorphismes du foncteur fibre filtré

$$\mathrm{Rep}\, G \xrightarrow{\omega_{\mathscr{T}}} \mathrm{Fib}_X \longrightarrow \text{Fibrés filtrés}/X$$

au sens de [34] (théo. 4.40) donné par la filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré vectoriel. Il admet une filtration $\mathscr{P}^{\geq\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, telle que

$$\mathscr{P}^{>0} = R_u\mathscr{P}$$

et pour $\lambda > 0$,

$$\mathscr{P}^{\geq\lambda}/\mathscr{P}^{>\lambda} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ad}(\mathscr{T})^{\geq\lambda}/\mathrm{Ad}(\mathscr{T})^{>\lambda} \otimes \mathbb{G}_a.$$

On a de plus pour $\lambda > 0$

$$\mathscr{P}^{\geq\lambda} = \big\{ g \in \underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{T}) \mid \big(\mathrm{Ad}(g) - Id\big)\big(\mathrm{Ad}(\mathscr{T})^{\geq\bullet}\big) \subset \mathrm{Ad}(\mathscr{T})^{\geq\bullet+\lambda}\big\}.$$

Enfin, on remarquera que même si G n'est pas quasidéployé le théorème 4.40 de [34] s'applique et tout G-torseur définit un tel sous-groupe parabolique, la différence étant qu'en général ce n'est pas une forme tordue d'un groupe constant sur E.

5.2. **Classification des G-fibrés en termes de classes de φ-conjugaison.**

5.2.1. *Rappels sur l'anneau $\overline{B}$.* Rappelons ([14] sec. 1.10) que l'on dispose d'une L-algèbre

$$B^+ = \bigcap_{n\geq 0} \varphi^n(B^+_{cris})$$

où lorsque $E = \mathbb{Q}_p$

$$B^+_{cris} = H^0_{cris}\big(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F/\varpi_F)/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p), \mathcal{O}\big)\big[\tfrac{1}{p}\big]$$

pour $\varpi_F \in F$ vérifiant $0 < |\varpi_F| < 1$. De plus, si $B^{b,+} = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)[\frac{1}{\pi_E}]$

$$B^{b,+}/[\varpi_F] \xrightarrow{\sim} B^+/[\varpi_F].$$

On a alors

$$\overline{B} = (B^{b,+}/[\varpi_F])_{red}$$

sur lequel φ est bijectif ([14] sec. 1.10.4). *Les anneaux $B^{b,+}/[\varpi_F]$ et $\overline{B}$ sont locaux* de corps résiduel $W_{\mathcal{O}_E}(k_F)_{\mathbb{Q}}$. De plus ([14] théo. 11.1.7), la réduction des scalaires induit une équivalence

$$\varphi\text{-Mod}_{B^+} \xrightarrow{\sim} \varphi\text{-Mod}_{\overline{B}}$$

où par φ-module on entend ici des modules libres de rang fini munis d'un isomorphisme semi-linéaire. Lorsque $E = \mathbb{Q}_p$ la catégorie $\varphi\text{-Mod}_{B^+}$ s'identifie à celle des F-isocristaux sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_F/[\varpi_F])$. Il y a une équivalence de catégories (théo. 11.1.9 de [14])

$$\varphi\text{-Mod}_{B^+} \xrightarrow{\sim} \text{Fib}_X.$$

Mais il faut prendre garde que *ce n'est pas une équivalence de catégories exactes* (cf. exemple 5.2 qui suit), les φ-modules sur B^+ constituant une sorte de « modèle entier des fibrés où $[\varpi_F]$ n'est pas inversé » et l'application qui à un fibré associe un tel « model entier » tue l'exactitude. Au final on a alors :

— une équivalence de catégories tensorielle additives

$$\text{Fib}_X \xrightarrow{\sim} \varphi\text{-Mod}_{\overline{B}},$$

— un foncteur de réduction sur le corps résiduel de $\overline{B}$

$$\varphi\text{-Mod}_{\overline{B}} \longrightarrow \varphi\text{-Mod}_{W_{\mathcal{O}_E}(k_F)_{\mathbb{Q}}},$$

— d'après le théorème de Dieudonné-Manin, puisque k_F est algébriquement clos, une équivalence entre catégories d'isocristaux

$$\varphi\text{-Mod}_L \xrightarrow{\sim} \varphi\text{-Mod}_{W_{\mathcal{O}_E}(k_F)_{\mathbb{Q}}}$$

de la quelle on déduit un foncteur

$$red_{\overline{B},L} : \varphi\text{-Mod}_{\overline{B}} \longrightarrow \varphi\text{-Mod}_L.$$

— D'après le théorème 11.1.7 de [14] pour $(M, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{\overline{B}}$ il y a alors un isomorphisme (non canonique)

$$(M, \varphi) \simeq red_{\overline{B},L}(M, \varphi) \otimes_L \overline{B}.$$

Exemple 5.2. *Soient $t_1, t_2 \in B^{\varphi=\pi_E}$ non colinéaires. Ils induisent une suite exacte de fibrés*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{u} \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \xrightarrow{v} \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0$$

où $u(a) = (-at_2, at_1)$ et $v(b, c) = bt_1 + ct_2$. La suite associée de φ-modules sur B^+ n'est pas exacte puisque le morphisme

$$\begin{array}{ccc} B^+ \oplus B^+ & \longrightarrow & B^+ \\ (b, c) & \longmapsto & bt_1 + ct_2 \end{array}$$

n'est pas surjectif comme on le voit en réduisant modulo $[\varpi_F]$ puis sur le corps résiduel de $B^+/[\varpi_F]$ où c'est le morphisme nul.

Remarque 5.3. *Bien que ce ne soit pas une équivalence de catégories exactes, l'équivalence $\varphi\text{-}Mod_{B^+} \xrightarrow{\sim} Fib_X$ est compatible à la filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré et tout φ-module sur B^+ est canoniquement muni d'une telle filtration.*

5.2.2. *La classe de σ-conjugaison associée à un torseur.* Le lemme suivant va nous permettre de nous débarrasser du problème de non-exactitude de l'équivalence entre Fib_X et $\varphi\text{-Mod}_{\overline{B}}$.

Lemme 5.4. *Soient k un corps de caractéristique 0, H un groupe réductif sur k et R une k-algèbre non nulle. Un foncteur*

$$\omega : Rep\, H \longrightarrow Proj_R$$

à valeurs dans les R-modules projectifs de type fini est un foncteur fibre si et seulement si c'est un foncteur additif compatible au produit tensoriel.

Démonstration. Puisque k est de caractéristique zéro H est linéairement réductif et toute suite exacte dans $\text{Rep}\, H$ est scindée. Un tel foncteur est donc automatiquement exact. D'après le corollaire 2.10 de [7] un tel foncteur est automatiquement fidèle. □

Soit maintenant $\mathscr{T}$ un G-torseur sur X. D'après le lemme 5.4 le foncteur composé

$$\mathrm{Rep}\, G \xrightarrow{\omega_{\mathscr{T}}} \mathrm{Fib}_X \xrightarrow{\sim} \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\overline{B}} \xrightarrow{red_{\overline{B},L}} \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_L \tag{5}$$

est un foncteur fibre.

Définition 5.5. *On note $[b_{\mathscr{T}}] \in B(G)$ la classe de σ-conjugaison définissant le G-isocristal associé au foncteur composé (5).*

Le but est maintenant de démontrer le théorème suivant.

Théorème 5.6. *Pour tout G-torseur $\mathscr{T}$ sur X il y a un isomorphisme*

$$\mathscr{T} \simeq \mathscr{E}_{b_{\mathscr{T}}}.$$

Ce théorème implique aussitôt le théorème principal 5.1.

5.2.3. *La classe de φ-conjugaison dans $\overline{B}$ associée à un torseur.* On va maintenant voir que l'on peut raffiner la classe de σ-conjugaison $b_{\mathscr{T}}$ dans $G(L)$ en une classe de φ-conjugaison dans $G(\overline{B})$. Pour cela nous aurons besoin du résultat suivant.

Proposition 5.7. *L'anneau local $\overline{B}$ est hensélien.*

Pour tout $\rho \in]0,1[$ on a $B^+_\rho = B^+_{[\rho,1]}$ et une égalité $B^+_\rho/[\varpi_F] = B^{b,+}/[\varpi_F]$. On montre en fait le résultat plus général suivant.

Proposition 5.8. *Le couple $\big(\varinjlim_{\substack{\rho\to 1\\ <}} B^+_\rho, \mathfrak{m}\big)$ est hensélien où $\mathfrak{m}$ est le noyau de la surjection vers $W_{\mathcal{O}_E}(k_F)_{\mathbb{Q}}$.*

Démonstration. Soient $\rho \in]0,1[$, $P \in B^+_\rho[X]$ unitaire et $x \in B^+_\rho$ satisfaisant

$$\begin{aligned} P(x) &\in \mathfrak{m} \\ P'(x) &\notin \mathfrak{m}. \end{aligned}$$

Dire que $P'(x) \notin \mathfrak{m}$ est équivalent à ce que le polygone de Newton de $P'(x)$ satisfasse

$$\mathrm{Newt}(P'(x))(t) = 0 \text{ pour } t \gg 0.$$

Cela implique que quitte à agrandir ρ dans $]0,1[$ on peut supposer que

$$P'(x) \in (B^+_\rho)^\times.$$

En regardant ce même polygone de Newton on constate également qu'il existe $\rho_0 \in]0,1[$ ainsi que $n \in \mathbb{Z}$ (la plus petite abscisse où le polygone de Newton touche l'axe des abscisses) tels que

$$\forall \rho \in [\rho_0, 1],\ |P'(x)|_\rho = \rho^n.$$

Quitte à remplacer x par $\pi_E^k x$ et $P(X)$ par $\pi_E^{k \deg P} P\big(\frac{X}{\pi_E^k}\big)$ pour $k \gg 0$ on peut de plus supposer que $n \geq 1$.

Puisque $P(x) \in \mathfrak{m}$ son polygone de Newton ne touche pas l'axe des abscisses. On en déduit que quitte à agrandir ρ_0 on peut supposer que

$$\forall \rho \in [\rho_0, 1],\ |P(x)|_\rho < \rho^{m(\rho)}$$

où $m(\rho) \geq n$ et $m(\rho) \xrightarrow[\rho\to 1]{} +\infty$.

On a donc pour $\rho \in [\rho_0, 1]$

$$\Big|\frac{P(x)}{P'(x)}\Big|_\rho < \rho^{m(\rho)-n} < 1.$$

L'algorithme de Newton nous dit alors qu'il existe une racine $z \in B^+_{\rho_0}$ de P satisfaisant

$$\forall \rho \in [\rho_0, 1],\ |x - z|_\rho < \rho^{m(\rho)-n}.$$

Ces inégalité implique que le polygone de Newton de $z - x$ ne touche pas l'axe des abscisses et que donc $z - x \in \mathfrak{m}$. $\square$

Remarque 5.9. *Avec les notations de ce résultat est le pendant au voisinage de* $\{\delta = 1\} = V([\varpi_F])$ *dans l'espace* $\mathscr{Y}$ *de l'énoncé usuel au voisinage de* $\{\delta = 0\} = V(\pi_E)$ *qui dit que l'anneau des entiers de l'anneau de Robba borné,* $\mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$*, est hensélien ([14] prop. 1.8.2). En effet, on a*

$$\begin{aligned} \varinjlim_{\rho \underset{<}{\to} 1} B_\rho^+ &= \varinjlim_{\rho \underset{<}{\to} 1} \Gamma\big(\mathscr{Y}_{[\rho,1]}, \mathcal{O}_{\mathscr{Y}}\big) \\ \mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger} &= \varinjlim_{\rho \underset{>}{\to} 0} \Gamma\big(\mathscr{Y}_{[0,\rho]}, \mathcal{O}_{\mathscr{Y}}\big) \end{aligned}$$

i.e. l'anneau des germes de fonctions holomorphes au voisinage du diviseur $V([\varpi_F])$*, resp.* $V(\pi_E)$*, est hensélien.*

Soient maintenant $\mathscr{T}$ un G-torseur et $\omega_{\mathscr{T}}$ le foncteur fibre associé.

Proposition 5.10. *Le foncteur composé*

$$Rep\, G \xrightarrow{\omega_{\mathscr{T}}} Fib_X \xrightarrow{\sim} \varphi\text{-}Mod_{\overline{B}} \longrightarrow Proj_{\overline{B}}$$

est un foncteur fibre isomorphe à ω_{can} *où* $\omega_{can}(V,\rho) = V \otimes_E \overline{B}$*.*

Démonstration. Le fait que ce soit un foncteur fibre résulte du lemme 5.4. D'après [7] théo. 1.12,

$$\mathrm{Isom}^{\otimes}(\omega_{can}, \omega)$$

est un G-torseur sur $\mathrm{Spec}(\overline{B})$. Puisque

$$H^1(W_{\mathcal{O}_E}(k_F)_{\mathbb{Q}}, G) = 1$$

d'après Steinberg, ce G-torseur devient trivial sur le corps résiduel de $\overline{B}$. Puisque $\overline{B}$ est hensélien (prop. 5.7) on conclut que ce torseur est en fait trivial sur $\mathrm{Spec}(\overline{B})$ (puisque G est lisse ce torseur est lisse et il suffit d'appliquer l'existence de quasi-sections localement pour la topologie étale, cf. [20] sec. 17.16). □

On en déduit aussitôt le résultat suivant qui donne une correspondance entre G-torseurs et algèbre semi-linéaire.

Proposition 5.11. *Les classes d'isomorphisme de G-fibrés sur X sont en bijection avec les classes de φ-conjugaison dans $G(\overline{B})$.*

5.3. **Le cas quasi-déployé.** Le but de cette section est de démontrer le théorème 5.6 lorsque G est quasi-déployé. Dans cette section on suppose donc G quasi-déployé.

5.3.1. *Le cas semi-stable.* Commençons par remarquer le point clef suivant.

Proposition 5.12. *Pour $\mathscr{T}$ un G-torseur sur X sont équivalents :*

(1) *$\mathscr{T}$ est semi-stable*

(2) *la classe de σ-conjugaison $[b_{\mathscr{T}}]$ est basique.*

Démonstration. En effet, le torseur $\mathscr{T}$ est semi-stable si et seulement si le fibré $\mathrm{Ad}(\mathscr{T})$ l'est. De plus $[b] \in B(G)$ est basique si et seulement si $[\mathrm{Ad}(b)] \in B\big(\mathrm{GL}(\mathrm{Lie}\, G)\big)$ est isocline (de pente 0 automatiquement). Cela résulte de ce que $\nu_{\mathrm{Ad}(b)} = \mathrm{Ad} \circ \nu_b$. On a de plus

$$\big[b_{\mathrm{Ad}(\mathscr{T})}\big] = \big[\mathrm{Ad}(b_{\mathscr{T}})\big].$$

On conclut en utilisant que si via le foncteur $\mathrm{Fib}_X \longrightarrow \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_L$ le fibré $\mathscr{E}$ s'envoie sur l'isocristal (D,φ) alors $\mathscr{E}$ est semi-stable si et seulement si (D,φ) est isocline. □

Proposition 5.13. *Si $\mathscr{T}$ est un G-torseur semi-stable sur X on a*

$$\mathscr{T} \simeq \mathscr{E}_{b_{\mathscr{T}}}.$$

Dans la preuve de cette proposition nous aurons besoin du lemme intermédiaire suivant.

Lemme 5.14. *Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_E$-schéma en groupe lisse de fibre spéciale $\mathcal{G}_{\mathbb{F}_q}$ connexe. Notons $\mathbf{A} = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ et*

$$\overline{\mathbf{A}} = Im\big(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \to \overline{B}\big).$$

Pour tout entier $s \geq 1$ tout élément de $\mathcal{G}(\overline{\mathbf{A}})$ est φ^s-conjugué à 1.

Démonstration. Puisque $\mathcal{G}$ est de présentation finie un élément de $\mathcal{G}(\overline{\mathbf{A}})$ est la réduction d'un élément de $\mathcal{G}(\mathbf{A}/[a])$ pour un $a \in F$ satisfaisant $0 < |a| < 1$. L'anneau $R = \mathbf{A}/[a]$ est π_E-adique et vérifie

$$R/\pi_E = \mathcal{O}_F/a.$$

Puisque $\mathcal{G}$ est lisse l'application

$$\mathcal{G}(R) \to \mathcal{G}(R/\pi_E)$$

est surjective. Posons pour tout entier $n \geq 1$

$$\mathrm{Fil}^n\mathcal{G}(R) = \ker\big(\mathcal{G}(R) \longrightarrow \mathcal{G}(R/\pi_E^n)\big),$$

qui définit une filtration relativement à laquelle $\mathcal{G}(R)$ est séparé complet. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(R)/\mathrm{Fil}^1\mathcal{G}(R) &= \mathcal{G}(\mathcal{O}_F/a) \\ \mathrm{Fil}^n\mathcal{G}(R)/\mathrm{Fil}^{n+1}\mathcal{G}(R) &= \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathbb{F}_q} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathcal{O}_F/a. \end{aligned}$$

D'après Lang, puisque $\mathcal{G}_{\mathbb{F}_q}$ est connexe et F algébriquement clos, tout élément de $\mathcal{G}(\mathcal{O}_F/a)$ est Frob_q^s-conjugué à 1. Puisque F est algébriquement clos,

$$Id - Id \otimes \mathrm{Frob}_q^s : \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathbb{F}_q} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathcal{O}_F/a \longrightarrow \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\mathbb{F}_q} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathcal{O}_F/a$$

est surjectif. On conclut facilement. □

Nous allons également utiliser le lemme suivant dont la preuve élémentaire est laissée au lecteur. Du point de vue des torseur ce lemme revient à étudier les torseurs sur X_E qui deviennent isomorphes après tiré en arrière sur le revêtement $X_{E'} \to X_E$ où $E'|E$ est non-ramifiée.

Lemme 5.15. *Soit $s \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Pour $g \in G(\overline{B})$ notons*

$$N_s(g) = g\varphi(g)\dots\varphi^{s-1}(g) = (g\varphi)^s\varphi^{-s}$$

qui définit une application

$$N_s : G(\overline{B})/\varphi\text{-}conj. \longrightarrow G(\overline{B})/\varphi^s\text{-}conj.$$

Pour $h \in G(\overline{B})$ on note également

$$I_{h,s} = \{x \in G(\overline{B}) \mid xh = h\varphi^s(x)\}$$

le φ^s-centralisateur de h.
Pour $g \in G(\overline{B})$ on a alors :

1. *Il y a une action de $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ sur $I_{N_s(g),s}$ telle que $\bar{1} \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ agisse via $x \mapsto g\varphi(x)g^{-1}$.*
2. *Il y a une bijection d'ensembles pointés*

$$H^1(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}, I_{N_s(g),s}) \xrightarrow{\sim} \big\{g' \in G(\overline{B}) \mid N_s(g') \text{ est } \varphi^s\text{-conjugué à } N_s(g)\big\}/\varphi\text{-}conj.$$

Preuve de la proposition 5.13. On note dans cette preuve

$$L' = W_{\mathcal{O}_E}(k_F)_{\mathbb{Q}}.$$

Fixons une section $k_F \hookrightarrow \mathcal{O}_F$ de la projection de $\mathcal{O}_F$ vers son corps résiduel. Cela définit un plongement $L' \hookrightarrow \overline{B}$ et donc une section de la projection

$$G(\overline{B}) \longrightarrow G(L').$$

Soit

$$[g] \in G(\overline{B})/\varphi\text{-conj.}$$

associé à $\mathscr{T}$ par la proposition 5.11. Notons

$$b \in G(L')$$

la réduction de g.
On note $\nu_b : \mathbb{D} \to G$ le morphisme des pentes ([25]). D'après la proposition 5.12 b est basique et donc ν_b est central. Quitte à σ-conjuguer, resp. φ-conjuguer, b et g par un même élément de $G(L')$ on peut supposer b décent c'est à dire pour un $s \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$(b\sigma)^s = (s.\nu_b)(\pi_E)\sigma^s.$$

Notons

$$h = N_s(g).(s.\nu_b)(\pi_E)^{-1} \in \ker(G(\overline{B}) \to G(L')).$$

Soit $\mathcal{G}$ un modèle entier lisse de G sur $\mathcal{O}_E$ à fibre spéciale connexe. Il y a un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathbf{A}} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}_{L'} \arrow[d, hook] \\ \overline{B} \arrow[r] & L' \end{tikzcd}$$

duquel on déduit que

$$h \in \mathcal{G}(\overline{\mathbf{A}}).$$

D'après le lemme 5.14 h est φ^s-conjugué à 1 et donc, puisque ν_b est central, $N_s(g)$ est φ^s-conjugué à $N_s(b)$ i.e. on a montré le résultat après « extension des scalaires » à E_s l'extension non-ramifiée de degré s. Soit J_b le σ-centralisateur de b comme groupe algébrique sur E ([25]).
On utilise maintenant le lemme 5.15 ainsi que ses notations.

Puisque $\overline{B}^{\varphi^s = Id} = E_s$ on a

$$I_{N_s(b),s} = J_b(E_s)$$

où l'action de $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ sur le groupe de gauche coïncide avec celle de $\mathrm{Gal}(E_s|E)$. En effet, puisque $(b\sigma)^s = (s.\nu_b)(\pi_E)\sigma^s$ avec ν_b central, $I_{N_s(g),s}$ s'identifie à $G(\overline{B})^{\varphi^s=Id}$. L'obstruction à ce que g et b soient φ-conjugués dans $G(\overline{B})$ est un élément de

$$H^1(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}, I_{N_s(g),s})$$

mais l'image par l'application de réduction $I_{N_s(g),s} \to J_b(E_s)$ de cette obstruction dans l'ensemble pointé $H^1(\mathrm{Gal}(E_s|E), J_b(E_s))$ est triviale puisque g et b deviennent σ-conjugué par réduction vers L'. On conclut. □

5.3.2. *Réduction au cas semi-stable.* On suppose toujours G quasi-déployé. Le cas quelconque du théorème 5.6 résulte alors du cas semi-stable (5.13) et de la proposition suivante. Pour GL_n cette proposition est une reformulation du fait que la filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré est scindée.

Proposition 5.16. *Soit $\mathscr{T}$ un G-torseur de réduction canonique $\mathscr{T}_P$ où l'on suppose P en position standard relativement à un sous-groupe de Borel. Notons M le quotient de Levi de P et soit $i : M \hookrightarrow P$ le facteur de Levi standard. Il y a alors un isomorphisme*

$$\big(\mathscr{T}_P \underset{P}{\times} M\big) \underset{M,i}{\times} P \simeq \mathscr{T}_P$$

et donc $\mathscr{T}$ possède une réduction semi-stable à un sous-groupe de Levi.

Démonstration. Soit U le radical unipotent de P et $\mathscr{U}$ la forme de $U \times X$ définie par torsion par $\mathscr{T}_P$ via l'action par conjugaison de P sur U. Le schéma en groupes unipotent $\mathscr{U}$ possède une filtration

$$\mathscr{U}^{\geq \lambda},\ \lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$$

vérifiant

$$\mathscr{U}^{\geq\lambda}/\mathscr{U}^{>\lambda} \simeq \mathrm{Ad}(\mathscr{T})^{\geq\lambda}/\mathrm{Ad}(\mathscr{T})^{>\lambda}.$$

La fibre de l'application

$$H^1_{\text{ét}}(X, P) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X, U)$$

au dessus de l'image de $[\mathscr{T}_P]$ s'identifie à

$$H^1_{\text{ét}}(X, \mathscr{U}).$$

Ce groupe de cohomologie est trivial puisque pour tout $\lambda > 0$, $\mathrm{Ad}(\mathscr{T})^{\geq \lambda}/\mathrm{Ad}(\mathscr{T})^{>\lambda}$ est semi-stable de pente positive et donc

$$H^1(X, \mathrm{Ad}(\mathscr{T})^{\geq \lambda}/\mathrm{Ad}(\mathscr{T})^{>\lambda}) = 0.$$

□

5.4. **Le cas général.**

5.4.1. *Le sous-groupe parabolique associé à un torseur.* Soit $(M, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{\overline{B}}$. D'après le théorème 11.1.7 de [14] (M, φ) admet une décomposition de Dieudonné-Manin. Bien que non-unique, la filtration associée

$$(M^{\geq \lambda})_{\lambda \in \mathbb{Q}}$$

avec $\mathrm{gr}^\lambda M$ isocline de pente $-\lambda$ est unique. Elle correspond à la filtration de Harder-Narasimhan du fibré associé à (M, φ) (cf. rem. 5.3).

Soient G un groupe réductif sur E et $\beta \in G(\overline{B})$ que l'on pense comme étant associé à un G-torseur sur X, cf. prop. 5.11. On ne suppose pas G quasi-déployé. Le foncteur

$$\begin{array}{ccl} \mathrm{Rep}\, G & \longrightarrow & \varphi\text{-Mod}_{\overline{B}} \longrightarrow \overline{B}\text{-modules filtrés} \\ (V, \rho) & \longmapsto & (V \otimes_E \overline{B}, \rho(\beta)\varphi). \end{array}$$

défini par la filtration précédente de Harder-Narasimhan est un *foncteur fibre filtré* au sens de [34] (utiliser que E est de caractéristique 0 ce qui implique que G est linéairement réductif et donc le gradué de la filtration de Harder-Narasimhan définit un foncteur exact). D'après le théorème 4.40 de [34] on peut lui associer un sous-groupe parabolique

$$\mathscr{P} \subset G \otimes_E \overline{B}.$$

Notons

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g} & = & \mathrm{Lie}\, G \\ \text{et } \mathrm{Ad} : G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

la représentation adjointe. La filtration de Harder-Narasimhan de $(\mathfrak{g} \otimes_E \overline{B}, \mathrm{Ad}(\beta)\varphi)$ définit une filtration

$$\mathfrak{g}_{\overline{B}}^{\geq \lambda}, \ \lambda \in \mathbb{Q}$$

telle que

$$\mathrm{Lie}\, \mathscr{P} = \mathfrak{g}_{\overline{B}}^{\geq 0}.$$

Le sous-groupe parabolique $\mathscr{P}$ est filtré par $(\mathscr{P}^{\geq \lambda})_{\lambda \geq 0}$ avec

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}^{>0} & = & R_u \mathscr{P} \\ \forall \lambda > 0, \ \mathscr{P}^{\geq \lambda}/\mathscr{P}^{>\lambda} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{gr}^\lambda \mathfrak{g}_{\overline{B}} \otimes \mathbb{G}_a. \end{array}$$

5.4.2. *Structure du groupe des automorphismes d'un G-torseur.* On continue avec les hypothèses et notations précédentes. Notons maintenant

$$I_\beta = \{g \in G(\overline{B}) \mid g\beta = \beta\varphi(g)\}$$

le φ-centralisateur de β. Il s'identifie au groupe des automorphismes d'un G-torseur associé. Puisque

$$\mathscr{P} = \big\{ g \in G_{\overline{B}} \mid \mathrm{Ad}(g)\big(\mathfrak{g}_{\overline{B}}^{\geq \bullet}\big) = \big(\mathfrak{g}_{\overline{B}}^{\geq \bullet}\big)\big\},$$

$$I_\beta \subset \mathscr{P}(\overline{B}).$$

Il y a une action

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathscr{P}(\overline{B}) & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{P}(\overline{B}) \\ g & \longmapsto & (\beta\varphi) g (\beta\varphi)^{-1} \end{array}$$

pour laquelle

$$I_\beta = \mathscr{P}(\overline{B})^{\psi = Id}.$$

Pour $\lambda \geq 0$ l'action de ψ sur

$$\mathscr{P}^{\geq \lambda}(\overline{B})/\mathscr{P}^{>\lambda}(\overline{B}) = \mathrm{gr}^{\lambda}\mathfrak{g}_{\overline{B}}$$

est donnée par $\mathrm{Ad}(\beta)\varphi$. Pour $(M,\varphi) \in \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\overline{B}}$ on a

$$\mathrm{coker}\big(M \xrightarrow{Id-\varphi} M\big) = 0$$

([14] lemme 11.1.6). On en déduit que si $(I_{\beta}^{\geq \lambda})_{\lambda \geq 0}$ désigne la filtration associée, $I_{\beta}^{\geq \lambda} = I_{\beta} \cap \mathscr{P}^{\geq \lambda}(\overline{B})$ alors si $\lambda > 0$

$$I_{\beta}^{\geq \lambda}/I_{\beta}^{>\lambda} \quad = \quad \big(\mathrm{gr}^{\lambda}\mathfrak{g}_{\overline{B}}\big)^{\mathrm{Ad}(\beta)\varphi = Id}$$

qui est isomorphe à une somme finie de copies de $\overline{B}^{\varphi^h = \pi_E^d} = H^0(X, \mathcal{O}_X(\lambda))$ si $\lambda = d/h$ avec $(d,h) = 1$. De plus,

$$\begin{aligned} I_{\beta}/I_{\beta}^{>0} &= \mathrm{Aut}\big(\mathrm{gr}^0\mathfrak{g}_{\overline{B}}, \mathrm{Ad}(\beta)\varphi\big) \\ &\simeq J_b(E) \end{aligned}$$

après le choix d'une φ-conjugaison entre $\mathrm{Ad}(\beta)$ et $\mathrm{Ad}(b)$.

5.4.3. *Fin de la preuve du théorème 5.1 par descente galoisienne non-ramifiée.* Voyons maintenant comment conclure la preuve du théorème 5.6 lorsque G n'est pas forcément quasi-déployé. Soit donc G un groupe réductif sur E. Puisque $H^1(E^{nr}, G_{ad})$ est trivial (Steinberg) G est quasi-déployé sur une extension non-ramifiée de E. Soit donc $h \geq 1$ tel que G_{E_h} soit quasi-déployé. Soit $\mathscr{T}$ un G-torseur sur X_E, $\beta \in G(\overline{B})$ et $b \in G(L)$ associés. On veut montrer que β et b sont φ-conjugués. On utilise les notations du lemme 5.15. On sait d'après la section 5.3 précédente que $N_h(\beta)$ et $N_h(b)$ sont φ^h-conjugués. L'action de $\mathrm{Gal}(E_h|E)$ sur $I_{N_h(\beta)}$ du lemme 5.15 est compatible à la filtration définie précédemment. De plus, pour $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} H^1\big(\mathrm{Gal}(E_h|E), I_{N_h(\beta),h}^{\geq \lambda}/I_{N_h(\beta),h}^{>\lambda}\big) &= H^1\big(\mathrm{Gal}(E_h|E), (\mathrm{gr}^{\lambda}\mathfrak{g}_{\overline{B}})^{(\mathrm{Ad}(\beta)\varphi)^h = Id}\big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisqu'on regarde la cohomologie d'un groupe fini à valeurs dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. On en déduit que l'application

$$H^1(\mathrm{Gal}(E_h|E), I_{N_h(\beta),h}) \longrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(E_h|E), J_b(E_h))$$

est un isomorphisme. Le résultat s'en déduit par application du lemme 5.15 puisque

$$H^1(\mathrm{Gal}(E_h|E), J_b(E_h)) \simeq \{b' \in G(L) \mid N_h(g') \text{ est } \sigma^h\text{-conjugué à } N_h(b)\}/\sigma\text{-conj.}$$

□

6. Le dictionnaire entre Kottwitz et Atiyah-Bott

On dispose maintenant du théorème 5.1. Dans cette section on interprète certains résultats de [25] et [26] en termes de torseurs.

6.1. **Classification sur $\overline{E}$.** Soit G un groupe réductif sur E. Il y a une application

$$\begin{aligned} B(G) &\longrightarrow \Big[\mathrm{Hom}\big(\mathbb{D}_{E^{nr}}, G_{E^{nr}}\big)/G(E^{nr})\text{-conj.}\Big]^{\sigma = Id} \\ [b] &\longmapsto [\nu_b] \end{aligned}$$

si b est décent, auquel cas ν_b est défini sur E^{nr}. Rappelons maintenant que la catégorie Tannakienne des isocristaux $\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_L$ est E-linéaire neutre sur E^{nr}. Il y a en effet un foncteur fibre

$$\begin{aligned} \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_L &\longrightarrow \mathrm{Vect}_{E^{nr}} \\ (D,\varphi) &\longmapsto \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} \bigcup_{\substack{h \geq 1 \\ h\lambda \in \mathbb{Z}}} D^{\varphi^h = \pi_E^{h\lambda}}. \end{aligned}$$

Ce foncteur fibre est $\mathbb{Q}$-gradué et le lien associé est le pro-tore des pentes $\mathbb{D}$. Il s'en suit que si $b \in G(L)$ est décent le G-isocristal associé est complètement déterminé après extension des scalaires à E^{nr} par ν_b.

Traduisons maintenant cela du coté de la courbe X. Pour $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ on note $X_h = X_{E_h}$, $X = X_1$. Notons

$$\mathscr{T}_h = \mathbb{V}\big(\mathcal{O}_{X_h}(1)\big) \setminus \{0\}$$

le $\mathbb{G}_m$-torseur sur X_h associé au fibré en droites $\mathcal{O}_{X_h}(1)$. Si $h|h'$ et $\pi_{h',h} : X_{h'} \to X_h$ il y a un isomorphisme *canonique*

$$\pi_{h',h}^* \mathcal{O}_{X_h}(1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_{h'}}(h'/h) = \mathcal{O}_{X_{h'}}(1)^{\otimes h'/h}.$$

Cela définit un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{T}_{h'} & \longrightarrow & \pi_{h',h}^* \mathscr{T}_h \\ s & \longmapsto & s^{\otimes h'/h}. \end{array} \tag{6}$$

Définition 6.1. *On pose*

$$\mathscr{T}_\infty = \varprojlim_{h \geq 1} \mathscr{T}_h \otimes_{E_h} E^{nr}$$

où la limite projective est prise suivant les applications de transition (6). C'est un $\mathbb{D}$-torseur sur $X_{E^{nr}}$.

On obtient alors le résultat suivant.

Proposition 6.2. *Si b est décent il y a un isomorphisme de G-torseurs sur $X_{E^{nr}}$*

$$(-\nu_b)_* \mathscr{T}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_b \otimes_E E^{nr}.$$

Remarque 6.3. *Dans la proposition précédente c'est $-\nu_b$ qui intervient et non ν_b car les pentes de Newton et de Harder-Narasimhan sont opposées, le fibré associé à $[\pi_E] \in B(\mathbb{G}_m)$ est $\mathcal{O}_X(-1)$.*

Remarque 6.4. *Il faut faire attention que si $E'|E$ est ramifiée bien que $\pi_{E'/E}^* \mathcal{O}_{X_E}(1) \simeq \mathcal{O}_{X_{E'}}([E' : E])$, il n'y a pas de tel isomorphisme canonique. Cela provient du fait que le fibré en droites $\mathcal{O}_{X_E}(1)$ dépend du choix d'une uniformisante que l'on a fixée depuis le début π_E et qu'afin de fixer un isomorphisme entre $\pi_{E'/E}^* \mathcal{O}_{X_E}(1)$ et $\mathcal{O}_{X_{E'}}([E' : E])$ il faut choisir un élément $u \in L^\times$ tel que $\pi_{E'}^{e_{E'/E}} / \pi_E = u^{\sigma - 1}$, cf.* [14].

En appliquant maintenant le théorème 5.1 on obtient le résultat suivant.

Théorème 6.5. *Soit $E'|E^{nr}$ une extension algébrique. Il y a une bijection*

$$\begin{array}{ccc} \mathit{Hom}(\mathbb{D}_{E'}, G_{E'})/G(E')\text{-}\mathit{conj.} & \xrightarrow{\sim} & \big\{G\text{-}\mathit{torseurs\ sur}\ X_{E'}\big\}/\sim \\ [\nu] & \longmapsto & \big[\nu_* \mathscr{T}_\infty\big]. \end{array}$$

6.2. **Plongement de la cohomologie galoisienne dans** $B(G)$**.** Soit $[b] \in B(G)$ et J_b le groupe algébrique associé tel que $J_b(E)$ soit σ-centralisateur de b. Pour R une E-algèbre $J_b(R)$ est le groupe des automorphismes compatibles au produit tensoriel du foncteur

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Rep} G & \longrightarrow & \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{L \otimes_E R} \\ (V, \rho) & \longmapsto & (V \otimes_E R, \rho(b)\sigma). \end{array}$$

D'après [29] prop. 1.17 ou bien [26] 3.5 il y a une identification

$$H^1(E, J_b) \xrightarrow{\sim} \big\{[b'] \in B(G) \mid [\nu_{b'}] = [\nu_b]\big\} \tag{7}$$

et en particulier

$$H^1(E, G) \xrightarrow{\sim} \big\{[b] \in B(G) \mid [\nu_b] = 1\big\} \tag{8}$$

qui identifie la cohomologie galoisienne de G avec les « G-isocristaux unités ».

Ces plongements s'interprètent de la façon suivante en termes de G-torseurs sur X. Il y a un plongement de X-schémas en groupes réductifs

$$J_b \times_E X \hookrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{E}_b).$$

Dès lors l'application (7) est donnée par

$$\begin{array}{ccc} \{J_b\text{-torseurs}\} & \longrightarrow & \{G\text{-torseurs sur } X\} \\ \mathscr{T} & \longmapsto & \mathscr{E}_b \underset{J_b \times X}{\times} (\mathscr{T} \times X). \end{array}$$

En particulier l'inclusion (8) est donnée par l'image réciproque

$$f^* : H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(E), G) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X, G).$$

où $f : X \to \mathrm{Spec}(E)$.

6.3. **Morphisme des pentes et polygone de Harder-Narasimhan.** On suppose maintenant G quasi-déployé. On a déjà vu (prop. 5.12) que $b \in B(G)$ est basique si et seulement si $\mathscr{E}_b$ est semi-stable et donc

$$B(G)_{basique} \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(X, G)_{semi-stable}.$$

Fixons $A \subset T \subset B$ où A est un tore déployé maximal, T un tore maximal et B un sous-groupe de Borel. Puisque G est quasi-déployé

$$X_*(A)^+_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \Big[\mathrm{Hom}\big(\mathbb{D}_{E^{nr}}, G_{E^{nr}}\big)/G(E^{nr})\text{-conj.}\Big]^{\sigma = Id}$$

et on voit donc $[\nu_b]$ pour $[b] \in B(G)$ comme un élément de la chambre de Weyl positive. Rappelons également (sec. 5.1) qu'étant donné un G-torseur $\mathscr{T}$ sur X on peut définir son polygone de Harder-Narasimhan généralisé $\nu_{\mathscr{T}} \in X_*(A)^+_{\mathbb{Q}}$. On vérifie alors aussitôt la proposition suivante (cf. remarque 6.3 pour le signe $-$).

Proposition 6.6. *On a l'égalité suivante dans la chambre de Weyl positive*

$$\nu_{\mathscr{E}_b} = w_0.(-\nu_b)$$

où w_0 est l'élément de plus grande longueur dans le groupe de Weyl. En particulier le sous-groupe parabolique associé à la réduction canonique de $\mathscr{E}_b$ est le sous-groupe parabolique opposé associé à ν_b.

Quitte à σ-conjuguer b on peut supposer que $\nu_b : \mathbb{D} \to A$. Soit alors M_b le centralisateur de ν_b, un sous-groupe de Levi standard. Alors, $b \in M_b(L)$ et si on note $b' = b$ vu comme élément de $M_b(L)$

$$\mathscr{E}_b = \mathscr{E}_{b'} \underset{M_b}{\times} G$$

qui est la réduction canonique de $\mathscr{E}$ (on a déjà vu que $\mathscr{E}$ possède une réduction au Levi, cf. prop. 5.16).

7. Un analogue d'un résultat de Drinfeld-Simpson

Voici un analogue du théorème principal de [8]. On remarquera que contrairement à [8] on n'a pas besoin de supposer que G est semi-simple. Cela résulte du fait que dans notre cas $\mathrm{Pic}^0(X) = 0$.

Théorème 7.1. *Supposons G quasi-déployé. Soit $\infty \in |X|$ un point fermé de X. Pour $\mathscr{T}$ un G-torseur sur X, $\mathscr{T}_{|X \setminus \{\infty\}}$ est trivial c'est à dire possède une section.*

Concrètement, à la vue du théorème 5.1, le théorème précédent se traduit de la façon suivante. Soit $t \in B^{\varphi = \pi_E}$ non nul tel que $V^+(t) = \{\infty\}$. Notons $B_e = B[\frac{1}{t}]^{\varphi = Id}$, $X \setminus \{\infty\} = \mathrm{Spec}(B_e)$.

Soit $b \in G(L)$. Le théorème dit alors que les deux foncteurs fibres sur $\operatorname{Rep} G$ à valeurs dans les B_e-modules libres

$$\begin{tikzcd} & \left(V \otimes_E B[\frac{1}{t}]\right)^{\rho(b).Id\otimes\varphi=Id} \\ (V,\rho) \arrow[ur, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\ & V \otimes_E B_e \end{tikzcd}$$

sont isomorphes.

Avant d'entamer la preuve remarquons le résultat suivant.

Proposition 7.2. *Si G est quasi-déployé tout G-torseur sur X possède une réduction à un sous-tore de G.*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 5.1, du fait que toute classe de σ-conjugaison dans G possède une réduction basique à un sous-groupe de Levi et de ce que si M est un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de G et T un tore elliptique dans M alors l'application

$$B(T) \longrightarrow B(M)_{basique}$$

est surjective ([25] prop. 5.3). □

Preuve du théorème 7.1. D'après la proposition 7.2 on peut supposer que G est un tore que l'on note maintenant T. Il s'agit de montrer que le morphisme de groupes

$$H^1_{\text{ét}}(X,T) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X\setminus\{\infty\},T)$$

est nul. Soit $E'|E$ une extension galoisienne scindant T. Il y a une suite exacte de tores

$$1 \longrightarrow T' \longrightarrow \mathrm{Res}_{E'/E}T_{E'} \longrightarrow T \longrightarrow 1.$$

D'après le théorème 2.7 (cf. également rem. 2.8 qui montre que la preuve que nous sommes en train d'effectuer est indépendante de l'arsenal de la théorie du corps de classe) on a $H^2(X,T')=0$. Il y a donc un diagramme

$$\begin{tikzcd} H^1(X_{E'},T_{E'}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X,T) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ H^1\big((X\setminus\{\infty\})\otimes_E E', T_{E'}\big) \arrow[r] & H^1(X\setminus\{\infty\},T). & \end{tikzcd}$$

Il suffit maintenant de constater que puisque $\mathrm{Pic}^0(X_{E'})=0$,

$$H^1\big((X\setminus\{\infty\})\otimes_E E', T_{E'}\big)=0.$$

□

Remarque 7.3. *Du point de vue de* [8] *le théorème 7.1 peut s'interpréter de la façon suivant. Soit $F|\mathbb{F}_q$ un corps perfectoïde non nécessairement algébriquement clos (contrairement à l'hypothèse faite dans tout cet article) et $\mathscr{T}$ un G-torseur sur X_F. Soit $\infty \in |X_F|$ un point fermé. Alors, après le revêtement pro-étale $Spa\big(\widehat{\overline{F}}\big) \to Spa(F)$, via le morphisme $X_{\widehat{\overline{F}}} \to X_F$, le tiré en arrière de $\mathscr{T}_{|X\setminus\{\infty\}}$ devient trivial.*

Corollaire 7.4. *Sous les hypothèses du théorème 7.1 y a une bijection*

$$B(G) \simeq G(B_e)\backslash G(B_{dR})/G(B^+_{dR}).$$

Notons également le corollaire suivant qui pourrait s'avérer utile.

Corollaire 7.5. *Si G est quasi-déployé et B est un sous-groupe de Borel de G alors tout G-torseur sur X possède une réduction à B.*

Démonstration. Choisissons un point fermé $\infty \in |X|$ et soit $\mathscr{T}$ un G-torseur sur X. D'après le théorème 7.1 $\mathscr{T}_{|X\setminus\{\infty\}}$ possède une réduction à B c'est à dire une section au dessus de $X \setminus \{\infty\}$ de la fibration localement triviale pour la topologie étale

$$\mathscr{T}/B \longrightarrow X$$

de fibre G/B. Puisque ce morphisme est propre, par le critère valuatif de propreté une telle section s'étend automatiquement à X. □

Remarque 7.6. *Le corollaire précédent illustre bien la « souplesse géométrique » qu'apportent les fibrés par rapport aux isocristaux. Par exemple, bien qu'un isocristal simple de hauteur > 1 n'ait pas de réduction à un sous-groupe de Borel, le fibré associé est (non canoniquement) une extension successive de fibrés en droites.*

8. Interprétation de l'application de κ de Kottwitz en termes de classe de Chern

Notons $\pi_1(G)$ le groupe fondamental au sens de Borovoi de G. Kottwitz a défini dans [25] une application

$$\kappa : B(G) \longrightarrow \pi_1(G)_\Gamma$$

qui généralise celle de la section 4 dans le cas des tores. Voici une description en termes de cohomologie abélianisée de Borovoi ([4]) et de cohomologie de modules croisés à la Breen ([27]). Considérons le module croisé $[G_{sc} \to G]$ où G_{sc} désigne le revêtement universel de G_{der} et G agit sur G_{sc} par automorphismes intérieurs. Breen a défini dans l'appendice B de [27] la cohomologie à valeurs dans module croisé dans n'importe quel topos. On considère ici le cas du topos étale de X.

Le morphisme de modules croisés

$$[1 \to G] \longrightarrow [G_{sc} \to G]$$

induit un morphisme

$$H^1(X, G) \longrightarrow H^1(X, G_{sc} \to G).$$

Maintenant, si T est un tore maximal dans G et T_{sc} désigne son image réciproque à G_{sc}, l'inclusion

$$[T_{sc} \to T] \longrightarrow [G_{sc} \to G]$$

est un quasi-isomorphisme i.e. induit un isomorphisme sur les π_1 et π_0. On en déduit un isomorphisme

$$H^1(X, T_{sc} \to T) \xrightarrow{\sim} H^1(X, G_{sc} \to G).$$

Mais puisque $H^2(X, T_{sc}) = 0$ (théo. 2.7)

$$\mathrm{coker}\big(H^1(X, T_{sc}) \to H^1(X, T)\big) \xrightarrow{\sim} H^1(X, T_{sc} \to T).$$

Qui s'identifie via l'isomorphisme κ pour les tores à

$$\mathrm{coker}\big(X_*(T_{sc})_\Gamma \longrightarrow X_*(T)_\Gamma\big) = \pi_1(G)_\Gamma$$

puisque $X_*(T_{sc}) \subset X_*(T)$ s'identifie au sous-groupe engendré par les coracines associée à un sous-groupe de Borel de $G_{\overline{E}}$ de Levi $T_{\overline{E}}$. On en déduit une application

$$\kappa : H^1(X, G) \longrightarrow \pi_1(G)_\Gamma$$

dont on vérifie que c'est celle définie par Kottwitz via la bijection $B(G) \xrightarrow{\sim} H^1(X, G)$.

Si H est un groupe réductif sur un corps algébriquement clos et ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de ce corps l'inclusion d'un tore maximal $T \subset H$ induit un morphisme de champs algébriques

$$BT \longrightarrow BH$$

qui induit un isomorphisme

$$H^\bullet(BH, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(BT, \mathbb{Q}_\ell)^W$$

où W désigne le groupe de Weyl de T ([19]). Ainsi, la cohomologie de BH est concentrée en degrés pairs et

$$H^{2\bullet}(BH,\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^\bullet\big(X^*(T)\otimes\mathbb{Q}_\ell(-1)\big)^W.$$

On en déduit en particulier un isomorphisme

$$H^2(BH,\mathbb{Q}_\ell(1)) \xrightarrow{\sim} [X^*(T)\otimes\mathbb{Q}_\ell]^W = \mathrm{Hom}(\pi_1(H),\mathbb{Q}_\ell).$$

En général, pour des groupes autre que le groupe linéaire, la cohomologie entière $H^\bullet(BH,\mathbb{Z}_\ell)$ possède de la torsion « exotique » (cf. [19] et [33]). Néanmoins il y a toujours un morphisme

$$\pi_1(H)^D \longrightarrow H^2(BH,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)). \tag{9}$$

Il se décrit de la façon suivante en utilisant la cohomologie des topos à valeurs dans un module croisé de Breen et le topos lisse du champ algébrique BH (sec. 2 de [23]). Soit $EH\to BH$ le H-torseur universel. Le poussé en avant du H-torseur universel EH par $[1\to H]\to[H_{sc}\to H]$ définit un élément de $H^1(BH,[H_{sc}\to H])$. Si maintenant T est un tore maximal dans H il y a un isomorphisme $H^1(BH,[T_{sc}\to T])\xrightarrow{\sim} H^1(BH,[H_{sc}\to H])$. Pour un entier $n\geq 1$ la suite exacte

$$0\longrightarrow \underbrace{[T_{sc}[n]\to T[n]]}_{\pi_1(H)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)} \longrightarrow [T_{sc}\to T] \xrightarrow{\times n} [T_{sc}\to T]\longrightarrow 0$$

nous permet de définir la classe de Chern de notre classe comme un élément de

$$H^2(BH,\pi_1(H)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)).$$

Lorsque n varie cela fournit une classe dans $H^2\big(BH,\widehat{\pi_1(H)}(1)\big)$ (complétion profinie) qui nous donne le morphisme (9) cherché.

Revenons maintenant à G sur E. Comme dans la section 4 on a une application

$$H^1(X,G)\times H^2(BG,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))\longrightarrow H^2(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

On a $H^1(BG_{\overline{E}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))=0$ par connexité de G et donc une suite exacte

$$0\longrightarrow \mathrm{Br}(E)\longrightarrow H^2(BG,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))\longrightarrow H^2(BG_{\overline{E}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))^\Gamma.$$

D'après la proposition 2.1 l'accouplement précédent est nul sur $\mathrm{Br}(E)$ et on obtient donc un accouplement

$$H^1(X,G)\times\pi_1(G)_\Gamma^D\longrightarrow\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

c'est à dire encore une application classe de Chern

$$c_1^G : H^1(X,G)\longrightarrow\widehat{\pi_1(G)_\Gamma}.$$

Du cas des tores (prop. 4.1) on déduit que via le théorème 5.1

$$c_1^G=-\kappa.$$

Références

[1] M. F. Atiyah and R. Bott. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 308(1505) :523–615, 1983.

[2] K. A. Behrend. Semi-stability of reductive group schemes over curves. *Math. Ann.*, 301(2) :281–305, 1995.

[3] I. Biswas and Y. I. Holla. Harder-Narasimhan reduction of a principal bundle. *Nagoya Math. J.*, 174 :201–223, 2004.

[4] M. Borovoi. Abelian Galois cohomology of reductive groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 132(626) :viii+50, 1998.

[5] C. Cornut. Filtrations and buildings. *À paraître aux mémoires de l'AMS.*

[6] J.-F. Dat, S. Orlik, and M. Rapoport. *Period domains over finite and p-adic fields*, volume 183 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[7] P. Deligne. Catégories tannakiennes. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 111–195. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[8] V. G. Drinfeld and C. Simpson. B-structures on G-bundles and local triviality. *Math. Res. Lett.*, 2(6) :823–829, 1995.

[9] L. Fargues. Quelques résultats et conjectures concernant la courbe. *Astérisque*, (369) :325–374, 2015.

[10] L. Fargues. Geometrization of the local langlands correspondence : an overview. *Prépublication,* `https://arxiv.org/abs/1602.00999`, 2016.

[11] L. Fargues and J.-M. Fontaine. Factorization of analytic functions in mixed characteristic. In *Frontiers of mathematical sciences*, pages 307–315. Int. Press, Somerville, MA, 2011.

[12] L. Fargues and J.-M. Fontaine. Vector bundles and p-adic Galois representations. In *Fifth International Congress of Chinese Mathematicians. Part 1, 2*, volume 2 of *AMS/IP Stud. Adv. Math., 51, pt. 1*, pages 77–113. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[13] L. Fargues and J.-M. Fontaine. Vector bundles on curves and p-adic hodge theory. In *Automorphic Forms and Galois Representations*, volume 415 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, 2014.

[14] L. Fargues and J.-M. Fontaine. Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique. *Astérisque*, (406) :xiii+382, 2018. With a preface by Pierre Colmez.

[15] L. Fargues and P. Scholze. Geometrization of the local Langlands correspondence. *Travail en préparation.*

[16] K. Fujiwara. A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber). In *Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka)*, volume 36 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 153–183. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.

[17] P. Gille and P. Polo, editors. *Schémas en groupes (SGA 3). Tome III. Structure des schémas en groupes réductifs.* Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], 8. Société Mathématique de France, Paris, 2011. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962–64. [Algebraic Geometry Seminar of Bois Marie 1962–64], A seminar directed by M. Demazure and A. Grothendieck with the collaboration of M. Artin, J.-E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud and J-P. Serre, Revised and annotated edition of the 1970 French original.

[18] D. R. Grayson. Reduction theory using semistability. II. *Comment. Math. Helv.*, 61(4) :661–676, 1986.

[19] A. Grothendieck. Torsion homologique et sections rationnelles. *Séminaire Claude Chevalley*, 3 :1–29, 1958.

[20] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (32) :361, 1967.

[21] A. Grothendieck. Le groupe de Brauer. II. Théorie cohomologique. In *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, pages 67–87. North-Holland, Amsterdam ; Masson, Paris, 1968.

[22] G. Harder and M. S. Narasimhan. On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves. *Math. Ann.*, 212 :215–248, 1974/75.

[23] L. Illusie and W. Zheng. Quotient stacks and equivariant étale cohomology algebras : Quillen's theory revisited. *J. Algebraic Geom.*, 25(2) :289–400, 2016.

[24] K. Kedlaya. Noetherian properties of Fargues-Fontaine curves. *arXiv :1410.5160 [math.NT].*

[25] R.E. Kottwitz. Isocrystals with additional structure. *Compositio Math.*, 56(2) :201–220, 1985.

[26] R.E. Kottwitz. Isocrystals with additional structure.II. *Compositio Math.*, 109(3) :255–339, 1997.

[27] J.-P. Labesse. Cohomologie, stabilisation et changement de base. *Astérisque*, (257) :vi+161, 1999. Appendix A by Laurent Clozel and Labesse, and Appendix B by Lawrence Breen.

[28] S. Lang. The theory of real places. *Ann. of Math. (2)*, 57 :378–391, 1953.

[29] M. Rapoport and M. Richartz. On the classification and specialization of F-isocrystals with additional structure. *Compositio Math.*, 103(2) :153–181, 1996.

[30] N. Saavedra Rivano. *Catégories Tannakiennes.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 265. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[31] J.-P. Serre. *Corps locaux.* Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.

[32] J.-P. Serre. *Cohomologie galoisienne*, volume 5 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 1994.

[33] B. Totaro. The torsion index of the spin groups. *Duke Math. J.*, 129(2) :249–290, 2005.

[34] P. Ziegler. Graded and filtered fiber functors on Tannakian categories. *J. Inst. Math. Jussieu*, 14(1) :87–130, 2015.

Laurent Fargues, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu 75252 Paris
Email address: `laurent.fargues@imj-prg.fr`