# THÉORIE DE LA RÉDUCTION POUR LES GROUPES $p$-DIVISIBLES

LAURENT FARGUES

RÉSUMÉ. Partant de nos travaux sur les filtrations de Harder-Narasimhan des groupes plats finis sur un corps $p$-adique, nous développons une théorie des filtrations de Harder-Narasimhan pour les groupes $p$-divisibles. On applique cela à l'étude de la géométrie des morphismes de périodes des espaces de Rapoport-Zink et à la géométrie $p$-adique des variétés de Shimura. On définit et étudie en particulier des domaines fondamentaux pour l'action des correspondances de Hecke.

ABSTRACT. Starting from our work on Harder-Narasimhan filtrations of finite flat group schemes over a $p$-adic field, we developp a theory of Harder-Narasimhan filtrations for $p$-divisible groups. We apply this to the study of the geometry of period morphisms for Rapoport-Zink spaces and to the $p$-adic geometry of Shimura varieties. We define and study in particular some fundamental domains for the action of Hecke correspondences.

## CONTENTS



## INTRODUCTION

**Énoncé du théorème principal.** Le résultat principal de cet article est le suivant.

**Théorème** (Théo. 10)**.** *Soit $\mathcal{M}$ l'espace de Rapoport-Zink des déformations par quasi-isogénies d'un groupe $p$-divisible simple à isogénie près sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (*[26]*). Notons $\mathcal{M}_\eta$ sa fibre générique comme espace de Berkovich et*

$$\pi_{dR} : \mathcal{M}_\eta \to \mathcal{F}$$

*l'application des périodes de Hodge-de-Rham, d'image le domaine de périodes $\mathcal{F}^a$. Soit $\mathcal{M}_\eta^{ss}$ le lieu où les points de $p$-torsion de la déformation universelle est un groupe plat fini semi-stable, un domaine analytique fermé. Alors,*

*(1) $\pi_{dR}(\mathcal{M}_\eta^{ss}) = \mathcal{F}^a$. En d'autres termes $Hecke.\mathcal{M}_\eta^{ss} = \mathcal{M}_\eta$,*
*(2) le morphisme $\pi_{dR|\mathcal{M}_\eta^{ss}/p^{\mathbb{Z}}}$ est quasi-fini,*
*(3) si $\mathcal{M}_\eta^s$ désigne le lieu stable, un ouvert de $\mathcal{M}_\eta$, alors $\pi_{dR|\mathcal{M}_\eta^s/p^{\mathbb{Z}}} : \mathcal{M}_\eta^s/p^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathcal{F}^a$.*

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14Gxx,11Lxx.
*Key words and phrases.* $p$-divisible groups, $p$-adic Hodge theory, Harder-Narasimhan filtrations, Shimura varieties.
L'auteur a bénéficié du support du projet ERC Advanced grant 742608 "GeoLocLang".

Ici, l'espace $\mathcal{M}_\eta$ *est l'analogue $p$-adique des espaces hermitiens symétriques.* Ces derniers sont associés à un couple $(G, X)$, où $G$ est un groupe réductif réel et $X$ une classe de conjugaison de morphisme $h : \mathbb{S} \to G$ satisfaisant certaines conditions. L'analogue $p$-adique de $h$ est le choix de notre groupe $p$-divisible sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. La variété $\mathcal{F}$ est une grassmannienne et l'application de périodes $\pi_{dR} : \mathcal{M}_\eta \to \mathcal{F}$ est l'analogue des périodes de Griffiths. Dans le cas réel, l'application de périodes est un plongement d'image un ouvert simplement connexe de la variété de drapeaux. Dans notre cas, l'ouvert $\mathcal{F}^a$ image de $\pi_{dR}$ n'est pas simplement connexe, $\pi_{dR}$ *est étale et ses fibres géométriques sont des orbites de Hecke* en bijection avec $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$.

Il s'agit d'une généralisation du morphisme de périodes de Gross-Hopkins ([20]) pour les espaces de Lubin-Tate, définie par Rapoport et Zink ([26] chap. 5). Les *équations différentielles de Picard-Fuchs $p$-adiques* associées sont complètement intégrables sur $\mathcal{M}_\eta$ et $\pi_{dR}$ est défini par la filtration de Hodge de la déformation universelle.

Le point (1) du théorème précédent est une généralisation du corollaire 23.15 de [20] qui concerne le cas des espaces de Lubin-Tate. Le lieu de semi-stabilité est ici défini comme étant le lieu où les points de $p$-torsion de la déformation universelle est un groupe semi-stable ([14], en particulier le corollaire 11).

Les points (1) et (2) mis ensemble disent que les orbites de Hecke de l'ouvert admissible associé à $\mathcal{M}_\eta^{ss}/p^{\mathbb{Z}}$ forment un recouvrement admissible localement fini de cet espace rigide.

Enfin, le point (3) affirme que sur l'image par $\pi_{dR}$ de l'ouvert de stabilité, le morphisme des périodes possède une section canonique.

**Description des différentes sections.**

*Section 1.* Étant donnés un corps $p$-adique $K$ et un groupe $p$-divisible $H$ sur $\mathcal{O}_K$, on définit (théo. 1) une fonction concave $\mathrm{HN}(H) : [0, \mathrm{ht}\, H] \to [0, \dim H]$. Celle-ci est obtenue par un procédé de renormalisation à partir des polygones des $H[p^n]$ pour tout $n \geq 1$. On montrera plus tard que *cette fonction concave est en fait un polygone à coordonnées de rupture entières.* On montre que $\mathrm{HN}(H)$ est un invariant de la classe d'isogénie de $H$ (prop. 3).

*Section 2.* On définit une notion de *groupe $p$-divisible semi-stable* (déf. 3), puis une notion de *groupe de type HN* (déf. 5). Ce sont les groupes $H$, pour lesquels les filtrations de Harder-Narasimhan de $(H[p^n])_{n\geq 1}$ s'agencent bien entre elles pour former une filtration par des sous-groupes $p$-divisibles. On montre que la catégorie des groupes $p$-divisibles à isogénie près, isogènes à un groupe de type HN, est une "bonne catégorie de Harder-Narasimhan" pour la fonction pente $\frac{\dim}{\mathrm{ht}}$ (théo. 3).

*Section 3.* Partant de $H$ sur $\mathcal{O}_K$, on définit une suite de quotients de $H$

$$H = H_0 \twoheadrightarrow H_1 \twoheadrightarrow H_2 \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow$$

qui sont soit des isogénies, soit des quotients par des sous-groupes $p$-divisibles. Il s'agit d'un *algorithme de descente* qui, lorsqu'il converge en temps fini, fournit un groupe $p$-divisible isogène de type HN (théo. 4).

*Section 4.* On définit un polygone non renormalisé de $H$, une fonction concave sur $[0, +\infty[$ (déf. 7). Il s'agit de la borne supérieure des polygones de la collection $(H[p^n])_{n\geq 1}$. On montre que la pente limite de ce polygone coïncide avec la première pente du polygone renormalisé (coro. 1). Ce résultat est très utile par la suite dans la preuve du théorème 9.

*Section 5.* On étudie en détails le cas où le corps $p$-adique de base $K$ est de valuation discrète. Dans ce cas, *tout groupe $p$-divisible sur $\mathcal{O}_K$ est isogène à un groupe de type HN* car l'algorithme de descente s'arrête en temps fini (théo. 5). Il en résulte aussitôt que, dans ce cas, le polygone renormalisé $\mathrm{HN}(H)$ est un polygone à points de rupture de coordonnées entières.

Lorsque, de plus, le corps résiduel de $K$ est parfait, on interprète les filtrations de Harder-Narasimhan en termes de théorie de Hodge $p$-adique. On en déduit deux résultats clefs pour la suite. Tout d'abord, le corollaire 3 qui dit que la filtration à isogénie près de $H$ peut se retrouver à partir de ses périodes de Hodge-Tate

$$\alpha_H : T_p(H) \longrightarrow \omega_{H^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}.$$

On obtient ensuite l'inégalité entre polygone de Harder-Narasimhan renormalisé et polygone de Newton de la fibre spéciale de la proposition 9. On peut la penser comme étant une forme de *semi-continuité* de la variation d'un polygone "à la Grothendieck". La suite de ce texte est notamment consacrée à généraliser ce type de résultat lorsque $K$ n'est plus de valuation discrète.

*Section 6.* Dans cette section, le corps $K$ est algébriquement clos par contraste avec le cas précédent, où $K$ était de valuation discrète. On définit et étudie de nouveaux objets d'algèbre linéaire qui remplacent les groupes $p$-divisibles: les *modules de Hodge-Tate*. Du point de vue de la géométrie des espaces de modules, cela revient à remplacer le fibré $\omega_{H^D}$ par l'image de $\alpha_H \otimes 1$ (cf. rem. 5.9 de [11]). Les résultats des sections précédentes sur les groupes $p$-divisibles s'adaptent à ce cadre. Le point principal est le théorème 6 qui dit que *l'algorithme de descente converge dans ce cadre d'algèbre linéaire*: tout module de Hodge-Tate entier est isogène à un module de Hodge-Tate de type HN.

*Section 7.* Le corps $K$ est encore algébriquement clos. On montre, en utilisant les résultats précédents sur les modules de Hodge-Tate, que *le polygone renormalisé* $\mathrm{HN}(H)$ *est un polygone à coordonnées de rupture entières* (théo. 7), même si à priori $H$ n'est pas forcément isogène à un groupe de type HN contrairement au cas de valuation discrète. On montre, de plus, que ce polygone $\mathrm{HN}(H)$ est en dessous du polygone de Newton (version concave) de la fibre spéciale de $H$ (théo. 8):

$$\mathrm{HN}(H) \leq \mathrm{Newt}(H_k)^{\diamond}.$$

La preuve utilise la courbe ([17]) et une notion de polygone de Harder-Narasimhan d'une modification de fibrés admissible sur celle-ci. Ce résultat montre en particulier que *si* $H_k$ *est isocline, alors* $\mathrm{HN}(H)$ *est une droite de pente* $\frac{\dim H}{\mathrm{ht}\, H}$. C'est un ingrédient important du théorème principal sur les espaces de périodes.

*Section 8.* On démontre le théorème principal (théo. 9) qui dit que si $H$ sur $\mathcal{O}_K$ a sa fibre spéciale $H_k$ simple à isogénie près, alors $H$ est isogène à un groupe $p$-divisible semi-stable. Cela implique le théorème principal cité précédemment.

*Section 9.* On définit des *stratifications de Harder-Narasimhan des Grassmaniennes $p$-adiques* en utilisant les modules de Hodge-Tate de la section 6. Les strates sont des sous-diamants localement fermés dont on calcul la dimension (prop. 23). En utilisant l'inégalité entre polygones de Harder-Narasimhan et polygone de Newton de la section 7, on obtient des inclusions entre strates de Newton, telles que définies dans [4], et de Harder-Narasimhan. Par exemple, *la strate basique est contenue dans l'ouvert semi-stable.* On démontre de plus que *les strates non semi-stables sont paraboliquement induites* (prop. 21).

Par tiré en arrière via le morphisme de périodes de Hodge-Tate, ces stratifications définissent des stratifications des variétés de Shimura $p$-adiques (sec. 9.6). On espère que ces stratifications permettent d'étudier la cohomologie des variétés de Shimura dans la lignée des travaux de Caraiani-Scholze (sec. 9.7).

Depuis une première version de cet article, de nombreux travaux ont été effectués sur les filtrations de Harder-Narasimhan et la théorie de Hodge $p$-adique. On a en particulier remplacé l'utilisation des espaces de Banach-Colmez ([7]) par celle de la courbe ([13]) dans la preuve du théorème 8. Dans la section 9 on utilise la théorie des diamants de Scholze ([27]) afin de mettre des structures géométriques sur les strates de Harder-Narasimhan. Du point des filtrations de Harder-Narasmihan, citons les travaux de Shen ([32]), de Cornut et Peche Irissarry ([8]) et de Levin et Ericksson ([23]). Du point de vue des applications des fonctions degré des groupes plats finis aux variétés de Shimura citons les travaux de Bijakowski, Pilloni et Stroh ([2]). Du point de vue des domaines fondamentaux pour l'action des correspondances de Hecke citons les travaux de Shen ([31]). Enfin, notons les application à la géométrie diophantienne de Mocz ([24]).

## 1. Le polygone de Harder-Narasimhan renormalisé d'un groupe $p$-divisible

On reprend les notations de [14]. Soit $K|\mathbb{Q}_p$ valué complet pour une valuation $v$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, normalisée de manière à ce que $v(p) = 1$. *On ne suppose pas que la valuation soit discrète.* Rappelons que si $G$ est un schéma en groupe (commutatif) fini et plat sur Spec$(\mathcal{O}_K)$, d'ordre une puissance de $p$ non nul, on note

$$\begin{aligned}
\deg(G) &= \sum_i v(a_i) \text{ si } \omega_G \simeq \bigoplus_i \mathcal{O}_K/(a_i), \\
\mathrm{ht}(G) &= n \text{ si } |G| = p^n, \\
\mu(G) &= \frac{\deg(G)}{\mathrm{ht}(G)} \in [0,1].
\end{aligned}$$

Les filtrations de Harder-Narasimhan sont prises relativement à la fonction pente $\mu$. On note

$$\mathrm{HN}(G) : [0, \mathrm{ht}(G)] \longrightarrow [0, \deg(G)]$$

le polygone de Harder-Narasimhan de $G$.

1.1. **Un résultat de convergence.** Étant donné un groupe $p$-divisible $H$ sur Spec$(\mathcal{O}_K)$, on va définir une fonction concave obtenue par un procédé de renormalisation à partir de la collection de polygones

$$\mathrm{HN}(H[p^n]),\ n \geq 1.$$

**Définition 1** (produit de convolution tropical)**.** *Soient $h, h' \geq 0$ deux nombres réels. Soit $f$, resp. $g$, une fonction bornée sur l'intervalle $[0,h]$, resp. $[0,h']$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose*

$$\begin{aligned}
f \circledast g : [0, h+h'] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \sup_{a+b=x} f(a) + g(b)
\end{aligned}$$

*où $a, b \in \mathbb{R}$ satisfont $0 \leq a \leq h$ et $0 \leq b \leq h'$.*

On vérifie que:

(1) la convolution tropicale de deux fonctions concaves est concave,
(2) la transformée de Legendre, analogue tropical de la transformée de Fourier ([17] sec. 1.5.1), de $f \circledast g$ est la somme des transformées de Legendre de $f$ et $g$,
(3) si $f$ et $g$ sont des polygones, i.e. des fonctions affines par morceaux, alors $f \circledast g$ est un polygone obtenu par "concaténation". En particulier, si les abscisses de rupture de $f$ et $g$ sont des entiers, ce qui est le cas pour le polygone de Harder-Narasimhan d'un groupe plat fini, dans la définition 1 on peut se restreindre à prendre les variables $x, a, b$ dans $\mathbb{N}$.

Voici une variante de la proposition 8 de [14].

**Proposition 1.** *Pour une suite exacte de schémas en groupes finis et plats sur Spec$(\mathcal{O}_K)$*

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$$

*on a*

$$\mathrm{HN}(G) \leq \mathrm{HN}(G') \circledast \mathrm{HN}(G'')$$

*avec égalité si la suite est scindée.*

*Proof.* Soit $M \subset G$ un sous-groupe plat fini. On note $M'$, resp. $M''$, l'adhérence schématique de $M_K \cap G'_K$ dans $G'$, resp. de l'image de $M_K$ dans $G''_K$ dans $G''$. Il y a une suite

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

qui devient exacte en fibre générique. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\deg(M) &\leq \deg(M') + \deg(M'') \\
&\leq \mathrm{HN}(G')(\mathrm{ht}(M')) + \mathrm{HN}(G'')(\mathrm{ht}(M'')).
\end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure sur tous les sous-groupes plats finis $M$ de $G$, on obtient le résultat. $\square$

Voici maintenant un résultat élémentaire qui va nous permettre de définir le "polygone" renormalisé d'un groupe $p$-divisible.

**Proposition 2.** *Soit $h$ un nombre réel strictement positif et $\varphi_n : [0, nh] \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $n \geq 1$, une suite de fonctions concaves bornées telles que pour tous $n, m \geq 1$*

$$\varphi_{n+m} \leq \varphi_n \circledast \varphi_m.$$

*Alors, la suite de fonction*

$$\begin{array}{rcl} [0,h] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n}\,\varphi_n(nx) \end{array}$$

*converge uniformément vers une fonction concave sur l'intervalle $[0, h]$ égale à la borne inférieure de cette suite.*

*Démonstration.* Commençons par montrer que pour tout $k \geq 1$, tout $x \in [0, kh]$ et tout $n \geq 1$,

(1)
$$\varphi_{kn}(nx) \leq n\varphi_k(x).$$

Fixons l'entier $k$. On procède par récurrence sur $n$, le cas $n = 1$ étant immédiat. Utilisant l'inégalité

$$\varphi_{k(n+1)} \leq \varphi_{kn} \circledast \varphi_k,$$

on obtient

$$\varphi_{k(n+1)}((n+1)x) \leq \sup_{\substack{a+b=(n+1)x \\ 0\leq a\leq nkh \\ 0\leq b\leq kh}} \varphi_{kn}(a) + \varphi_k(b).$$

Soient donc $a$ et $b$ tels que dans la borne supérieure précédente. Par hypothèse de récurrence

(2)
$$\varphi_{kn}(a) \leq n\varphi_k\left(\frac{a}{n}\right).$$

De plus, en écrivant

$$x = \frac{n}{n+1}\frac{a}{n} + \frac{1}{n+1}b$$

et en utilisant la concavité de $\varphi_k$, on obtient

(3)
$$\frac{n}{n+1}\,\varphi_k\left(\frac{a}{n}\right) + \frac{1}{n+1}\,\varphi_k(b) \leq \varphi_k(x).$$

Combinant les inégalités (2) et (3) on obtient

$$\varphi_{kn}(a) + \varphi_k(b) \leq (n+1)\varphi_k(x)$$

qui nous donne l'hypothèse de récurrence au rang $n + 1$.

Soit maintenant $n_0 \geq 1$ un entier fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, écrivons $n = q(n)n_0 + r(n)$ la division euclidienne de $n$ par $n_0$. De l'inégalité

$$\varphi_n \leq \varphi_{q(n)n_0} \circledast \varphi_{r(n)},$$

on tire que pour $x \in [0, h]$

$$\varphi_n(nx) \leq \sup_{\substack{a+b=nx \\ 0\leq a\leq q(n)n_0 h \\ 0\leq b\leq r(n)h}} \varphi_{q(n)n_0}(a) + \varphi_{r(n)}(b).$$

Pour des nombres $a, b$ comme dans la borne supérieure précédente, on peut écrire

$$q(n)n_0x = \frac{q(n)n_0}{n}.a + \frac{r(n)}{n}.\left(\frac{q(n)n_0}{r(n)}b\right).$$

Utilisant la concavité de $\varphi_{q(n)n_0}$, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_{q(n)n_0}(q(n)n_0x) &\geq \frac{q(n)n_0}{n}\varphi_{q(n)n_0}(a) + \frac{r(n)}{n}\varphi_{q(n)n_0}\left(\frac{q(n)n_0}{r(n)}b\right) \\ &\geq \frac{q(n)n_0}{n}\varphi_{q(n)n_0}(a). \end{aligned}$$

De plus, les fonctions $\varphi_{r(n)}$ sont bornées par une constante $C$ indépendante de $n$. On a donc, pour $a, b$ comme précédemment,

$$\begin{aligned}\varphi_{q(n)n_0}(a)+\varphi_{r(n)}(b) &\leq \frac{n}{q(n)n_0}\varphi_{q(n)n_0}(q(n)n_0x)+C\\ &\leq \frac{n}{n_0}\varphi_{n_0}(n_0x)+C,\end{aligned}$$

la deuxième inégalité résultant de l'inégalité (1) prouvée au début de cette démonstration. Au final, on obtient qu'il existe une constante $C$ telle que pour tout $n \geq 1$

$$\frac{\varphi_n(nx)}{n} \leq \frac{\varphi_{n_0}(n_0x)}{n_0}+\frac{C}{n}.$$

On en déduit que

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{\varphi_n(nx)}{n} \leq \frac{\varphi_{n_0}(n_0x)}{n_0}.$$

Cela étant vrai pour tout entier $n_0$, on a donc

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{\varphi_n(nx)}{n} = \liminf_{n\to+\infty}\frac{\varphi_n(nx)}{n}$$

et la convergence simple s'en déduit. La convergence uniforme se vérifie en utilisant que la constante $C$ précédente ne dépend pas de $x$. □

1.2. **Le polygone renormalisé d'un groupe $p$-divisible.** Soit maintenant $H$ un groupe $p$-divisible sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Notons $d$ sa dimension et $h$ sa hauteur. Pour tout entier $n \geq 1$, le polygone $\mathrm{HN}(H[p^n])$ a pour point extrémal $(nh, nd)$.

**Théorème 1.** *La suite de fonctions*

$$\begin{aligned}[0,h] &\longrightarrow [0,d]\\ x &\longmapsto \frac{1}{n}\,\mathrm{HN}(H[p^n])(nx)\end{aligned}$$

*converge uniformément lorsque $n \to +\infty$ vers une fonction continue concave croissante*

$$\mathrm{HN}(H) : [0,h] \longrightarrow [0,d]$$

*égale à la borne inférieure des fonctions précédentes et vérifiant $HN(H)(0) = 0$ et $HN(h) = d$.*

*Proof.* Pour des entiers $n, m \geq 1$, on applique la proposition 1 aux suites exactes

$$0 \longrightarrow H[p^n] \longrightarrow H[p^{n+m}] \xrightarrow{p^n} H[p^m] \longrightarrow 0.$$

On obtient alors que la suite de fonctions $(\mathrm{HN}[p^n])_{n\geq 1}$ satisfait aux hypothèses de la proposition 2. □

Pour un sous-schéma en groupes fini et plat $G \subset H$, notons

$$n(G) = \inf\{n \geq 1 \mid G \subset H[p^n]\}.$$

Alors, la fonction $\mathrm{HN}(H)$ est l'enveloppe concave des points

$$\left(\frac{\mathrm{ht}\, G}{n(G)h}, \frac{\deg\, G}{n(G)d}\right)$$

lorsque $G$ parcourt les sous-groupes plats finis de $H$.

**Remarque 1.** *Ce résultat est à comparer avec le théorème 4.1.14 de* [5] *sur les polygones de Harder-Narasimhan limites associés aux puissances tensorielles d'un fibré hermitien ample.*

**Remarque 2.** *On va en fait montrer (théo. 7) que la fonction concave* $\mathrm{HN}(H)$ *est un polygone à points de ruptures de coordonnées entières. Cela justifie la terminologie de "polygone" pour cette fonction concave.*

On remarquera que, si $H^D$ désigne le dual de Cartier de $H$, pour $x \in [0, \mathrm{ht}\, H]$

$$\mathrm{HN}(H^D)(x) = \mathrm{HN}(H)(\mathrm{ht}\, H - x) - \dim H + x.$$

## 1.3. **Invariance par isogénie.**

**Proposition 3.** *Pour $H_1$ et $H_2$ deux groupes $p$-divisibles isogènes sur $\mathcal{O}_K$ on a*

$$\mathrm{HN}(H_1) = \mathrm{HN}(H_2).$$

*Démonstration.* L'idée est que le polygone du noyau d'une isogénie entre nos deux groupes $p$-divisibles se fait “manger” par le processus de renormalisation. Soit $f : H_1 \to H_2$ une isogénie de noyau $G$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a deux suites exactes

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow p^{-n}G \longrightarrow H_2[p^n] \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H_1[p^n] \longrightarrow p^{-n}G \longrightarrow G \longrightarrow 0.$$

La première suite exacte implique que

$$\mathrm{HN}(p^{-n}G) \leq \mathrm{HN}(G) \circledast \mathrm{HN}(H_2[p^n]).$$

Soit $C$ une constante telle que $\forall x \in [0, \mathrm{ht}\, G]$, $\mathrm{HN}(G)(x) \leq C$. On a donc, pour tout $x \in [0, \mathrm{ht}\, H_2]$,

$$\begin{aligned} \mathrm{HN}(p^{-n}G)(nx) &\leq \sup_{\substack{a+b=nx \\ 0\leq a\leq \mathrm{ht}\, G \\ 0\leq b\leq n\mathrm{ht}\, H_2}} \mathrm{HN}(G)(a) + \mathrm{HN}(H_2[p^n])(b) \\ &\leq C + \sup_{0\leq b\leq nx} \mathrm{HN}(H_2[p^n])(b) \\ &= C + \mathrm{HN}(H_2[p^n])(nx). \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in [0, \mathrm{ht}\, H_2]$,

$$\frac{1}{n}\mathrm{HN}(p^{-n}G)(nx) \leq \frac{C}{n} + \frac{1}{n}\mathrm{HN}(H_2[p^n])(nx).$$

La partie gauche de la seconde suite exacte, l'inclusion $H_1[p^n] \hookrightarrow p^{-n}G$, implique que pour $x \in [0, \mathrm{ht}\, H_1]$,

$$\mathrm{HN}(H_1[p^n])(nx) \leq \mathrm{HN}(p^{-n}G)(nx).$$

Donc si $h = \mathrm{ht}\, H_1 = \mathrm{ht}\, H_2$, pour $x \in [0, h]$ on a

$$\frac{1}{n}\mathrm{HN}(H_1[p^n])(nx) \leq \frac{1}{n}\mathrm{HN}(H_2[p^n])(nx) + \frac{C}{n},$$

d'où

$$\mathrm{HN}(H_1) \leq \mathrm{HN}(H_2).$$

Par réflexivité de la relation d'isogénie on en déduit le résultat. □

## 1.4. **Semi-continuité.**

**Proposition 4.** *Soit $F|\mathbb{Q}_p$ une extension valuée complète pour une valuation discrète et $\mathfrak{X}$ un Spf($\mathcal{O}_F$) schéma formel localement formellement de type fini. Soit $H$ un groupe $p$-divisible sur $\mathfrak{X}$ de dimension $d$ et de hauteur $h$ constantes. Notons $\mathfrak{X}^{an}$ la fibre générique de $\mathfrak{X}$ comme $F$-espace analytique de Berkovich. Alors, si $\mathcal{P} : [0, h] \longrightarrow [0, d]$ est une fonction concave telle que $\mathcal{P}(0) = 0$ et $\mathcal{P}(h) = d$,*

$$\{x \in |\mathfrak{X}^{an}| \mid \mathrm{HN}(H_x) \geq \mathcal{P}\}$$

*est un fermé de $|\mathfrak{X}^{an}|$.*

*Démonstration.* Cet ensemble se réécrit sous la forme

$$\bigcap_{n\geq 1} \{x \in \mathfrak{X}^{an} \mid \mathrm{HN}(H[p^n]_x) \geq n\mathcal{P}(n\bullet)\}$$

qui est fermé d'après le théorème 3 de [14]. □

En général l'ensemble précédent n'a aucune raison d'être le fermé sous-jacent à un domaine analytique fermé dans $\mathfrak{X}^{an}$ et n'est donc pas à priori associé à un ouvert admissible de l'espace rigide $\mathfrak{X}^{rig}$.

1.5. **Inégalité avec le polygone de Hodge.** Du théorème 5 de [14] on tire la proposition suivante.

**Proposition 5.** *Pour $H$ un groupe $p$-divisible sur $\mathcal{O}_K$ on a*

$$\mathrm{HN}(H) \leq \mathrm{Hodge}(H)^{\diamond}$$

*où* $\mathrm{Hodge}(H)^{\diamond}$ *est la "version concave" du polygone de Hodge de $H$, de pente* $1$ *sur* $[0, \dim H]$ *et* $0$ *sur* $[\dim H, \mathrm{ht}\, H]$.

## 2. Groupes $p$-divisibles semi-stables et de type HN sur $\mathcal{O}_K$

Dans cette section $K|\mathbb{Q}_p$ est un corps valué complet pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$, normalisée de telle manière que $v(p) = 1$.

2.1. **Groupes $p$-divisibles semi-stables.**

**Définition 2.** *Soit $H$ un groupe $p$-divisible non nul, de hauteur et de dimension constantes sur un schéma sur lequel $p$ est nilpotent ou bien un schéma formel $p$-adique. On pose alors*

$$\mu(H) = \frac{\dim H}{\mathrm{ht}\, H}.$$

On remarquera que l'invariant $\mu(H)$ ne dépend que de la classe d'isogénie de $H$. Si $H$ est un groupe $p$-divisible sur $\mathcal{O}_K$, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mu(H[p^n]) = \mu(H).$$

**Lemme 1.** *Soit $H$ un groupe $p$-divisible non nul sur $\mathcal{O}_K$. Sont équivalents:*

*(1) $H[p]$ est semi-stable,*
*(2) pour tout entier $n \geq 1$, $H[p^n]$ est semi-stable,*
*(3) pour tout sous-schéma en groupes fini et plat $G$ de $H$, $\mu(G) \leq \mu(H)$.*

*Proof.* Seul le fait que le premier point implique le second n'est pas évident. Mais cela résulte, par récurrence sur $n$, de ce que la catégorie des groupes plats finis semi-stables de pente fixée est stable par extensions, couplé aux suites exactes

$$0 \longrightarrow H[p] \longrightarrow H[p^n] \xrightarrow{\times p} H[p^{n-1}] \longrightarrow 0$$

lorsque $n \geq 1$ varie. □

**Définition 3.** *On appelle groupe $p$-divisible semi-stable tout groupe $p$-divisible sur $\mathcal{O}_K$ satisfaisant aux conditions équivalentes du lemme 1 précédent.*

On notera que via la dualité de Cartier $H$ est semi-stable si et seulement si $H^D$ l'est. La proposition qui suit dit que la classe d'isogénie d'un groupe $p$-divisible semi-stable vérifie une condition de semi-stabilité dans la catégorie des groupes $p$-divisibles à isogénie près. Cela justifie la terminologie de "groupe $p$-divisible semi-stable" utilisée.

**Proposition 6.** *Soit $H$ un groupe $p$-divisible semi-stable. Soit $H'$ un groupe $p$-divisible isogène à $H$ et muni d'une filtration par des groupes $p$-divisibles*

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow H' \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

*avec $X \neq 0$. Alors, $\mu(X) \leq \mu(H)$.*

*Démonstration.* Il faut montrer qu'il n'existe pas de sous-groupe fini et plat $G$ de $H$, ainsi qu'un sous-groupe $p$-divisible $X \subset H/G$, tels que $\mu(X) > \mu(H)$. Mais si c'était le cas, soit, pour tout $n \geq 1$, $K_n \subset H$ le sous-groupe plat fini tel que $G \subset K_n$ et $K_n/G = X[p^n]$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow K_n \longrightarrow X[p^n] \longrightarrow 0$$

implique que $\deg K_n = \deg G + n \dim X$ et $\mathrm{ht}\, K_n = \mathrm{ht}\, G + n\, \mathrm{ht}\, X$. On a alors

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(K_n) = \mu(X)$$

et donc pour $n$ grand $\mu(K_n) > \mu(H)$, ce qui est impossible puisque $H$ est semi-stable. □

2.2. **La catégorie des groupes $p$-divisibles isogènes à un groupe semi-stable de pente donnée à isogénie près.** La catégorie des groupes plats finis sur $\mathcal{O}_K$ semi-stables de pente fixées est abélienne ([14]). On va voir qu'il en est de même pour les groupes $p$-divisibles à isogénie près. *On emploie désormais la notation*

$$\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}$$

*pour la catégorie des groupes $p$-divisibles sur $\mathcal{O}_K$.*

**Définition 4.** *Soit $\lambda \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. On note $\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}^{ss,\lambda} \otimes \mathbb{Q}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K} \otimes \mathbb{Q}$, les groupes $p$-divisibles à isogénie près sur $\mathcal{O}_K$, formée des groupes $p$-divisibles isogènes à un groupe semi-stable de pente $\lambda$.*

Dans l'énoncé qui suit on note $\mathcal{A}b_{\mathcal{O}_K}$ la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)_{\mathrm{fppf}}$. On note $\mathcal{A}b_{\mathcal{O}_K} \otimes \mathbb{Q}$ pour la catégorie à isogénie près associée. On peut la voir comme le quotient de $\mathcal{A}b_{\mathcal{O}_K}$ par la sous-catégorie épaisse formée des faisceaux annulés par un entier non nul.

**Théorème 2.** *Soit $\lambda \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ fixé.*

*(1) La catégorie $\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}^{ss,\lambda} \otimes \mathbb{Q}$ est une sous-catégorie abélienne de $\mathcal{A}b_{\mathcal{O}_K} \otimes \mathbb{Q}$.*
*(2) Une suite*

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \to Z \longrightarrow 0$$

*dans $\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}^{ss,\lambda} \otimes \mathbb{Q}$ est exacte si et seulement si elle est isomorphe à une suite exacte de la catégorie exacte $\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}$.*

*Démonstration.* Soient $X$ et $Y$ deux groupes $p$-divisibles semi-stables tels que $\mu(X) = \mu(Y) = \lambda$ et $f : X \to Y$ un morphisme. Rappelons que la catégorie des groupes plats finis sur $\mathcal{O}_K$ semi-stables de pente $\lambda$ est une sous-catégorie abélienne de $\mathcal{A}b_{\mathcal{O}_K}$. Notons, pour tout $n \geq 1$,

$$G_n = \ker f_{|X[p^n]} \subset X[p^n],$$

un groupe plat fini semi-stable de pente $\lambda$. Le noyau de $f$ dans $\mathcal{A}b_{\mathcal{O}_K}$ est

$$\ker f = \varinjlim_{n \geq 1} G_n.$$

Posons, pour $n \geq 1$,

$$a_n = \mathrm{ht}\,(G_n/G_{n-1})$$

où l'on a posé $G_0 = 0$. Étant donné que pour $i \geq j \geq 1$, $G_i[p^j] = G_j$, si $i \geq j \geq 1$, le morphisme

$$G_i/G_{i-1} \xrightarrow{\times p^{i-j}} G_j/G_{j-1}$$

est un monomorphisme. La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est donc décroissante. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$ on ait $a_n = a_{n_0}$. Alors, pour $i \geq j \geq n_0$,

$$\times p^{i-j} : G_i/G_{i-1} \xrightarrow{\sim} G_j/G_{j-1}$$

est un isomorphisme. On vérifie alors que

$$\ker f/G_{n_0} = \varinjlim_{n \geq n_0} G_n/G_{n_0} \subset X/G_{n_0}$$

est soit nul (si $a_{n_0} = 0$), soit un sous-groupe $p$-divisible semi-stable de pente $\lambda$ de $X/G_{n_0}$. La suite exacte associée dans $\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}$

$$0 \longrightarrow \ker f/G_{n_0} \longrightarrow X/G_{n_0} \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

est telle que $Z = \mathrm{Im}\, f \subset Y$ soit un sous-groupe $p$-divisible semi-stable de pente $\lambda$ de $Y$ et $\mathrm{coker}\, f = Y/Z$.

On a donc vérifié que le noyau et le conoyau de $f$ dans $\mathcal{A}b_{\mathcal{O}_K} \otimes \mathbb{Q}$ étaient des groupes $p$-divisibles semi-stables de pente $\lambda$. $\square$

2.3. **La catégorie des groupes de type HN.** Après avoir étudié la catégorie des groupes $p$-divisibles semi-stables à isogénie près, il est naturel de s'intéresser à leurs filtrations de Harder-Narasimhan.

**Définition 5.** *Un groupe $p$-divisible $H$ sur $\mathcal{O}_K$ est de type HN s'il possède une filtration croissante $(H_i)_{0\leq i\leq r}$ dans $\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}$ telle que $H_0 = 0$, $H_r = X$, pour $1 \leq i \leq r$ le groupe $p$-divisible $H_i/H_{i-1}$ est semi-stable et*

$$\mu(H_1/H_0) > \mu(H_2/H_1) > \cdots > \mu(H_r/H_{r-1}).$$

Remarquons que, si $H$ est de type HN, la filtration précédente est déterminée de façon unique puisqu'alors pour tout entier $n \geq 1$, la filtration $(H_i[p^n])_{0\leq i\leq r}$ de $H[p^n]$ est la filtration de Harder-Narasimhan de $H[p^n]$. Ainsi, *$H$ est de type HN si et seulement si les filtrations de Harder-Narasimhan des $H[p^n]$, lorsque $n$ varie, forment une filtration par des sous-groupes $p$-divisibles.* On appellera la filtration précédente d'un groupe de type HN la filtration de Harder-Narasimhan.

Remarquons également que, d'après la proposition 3, si un groupe $p$-divisible $H'$ est isogène à un groupe de type HN $H$ tel que dans la définition 5 précédente, alors son polygone de Harder-Narasimhan renormalisé $\mathrm{HN}(H')$ est le polygone concave de pentes

$$\mu(H_1/H_0) > \mu(H_2/H_1) > \cdots > \mu(H_r/H_{r-1}),$$

avec multiplicités

$$\mathrm{ht}(H_1/H_0), \ldots, \mathrm{ht}(H_r/H_{r-1}).$$

Réciproquement, on a le résultat suivant.

**Proposition 7.** *Soit $H$ un groupe $p$-divisible sur $\mathcal{O}_K$. Il est de type HN si et seulement si $\mathrm{HN}(H[p]) = \mathrm{HN}(H)$.*

*Proof.* On vérifie que $H$ est de type HN si et seulement si $\forall n \geq 1$, $\mathrm{HN}(H[p^n]) = \mathrm{HN}(H[p])$. La proposition résulte alors des inégalités valables pour tout $H$

$$\mathrm{HN}(H[p]) \geq \frac{1}{n}\mathrm{HN}(H[p^n])(n\bullet) \geq \mathrm{HN}(H). \qquad \square$$

**Proposition 8.** *Soient $X$ et $Y$ deux groupes $p$-divisibles de type HN sur $\mathcal{O}_K$ et $(X_i)_{0\leq i\leq r}$ et $(Y_j)_{0\leq j\leq s}$ leurs filtrations de Harder-Narasimhan. Soit $f : X \to Y$ une isogénie. Alors $r = s$ et $f$ induit pour $1 \leq i \leq r$ des isogénies*

$$\begin{array}{rcl} f_{|X_i} : X_i & \longrightarrow & Y_i \\ X_i/X_{i-1} & \longrightarrow & Y_i/Y_{i-1}. \end{array}$$

*Proof.* Puisque $X$ et $Y$ sont isogènes, d'après la proposition 3, on a l'égalité

$$\mathrm{HN}(X) = \mathrm{HN}(Y).$$

Celle-ci implique que $r = s$ et, si $1 \leq i \leq r$,

$$\begin{array}{rcl} \mu(X_i/X_{i-1}) & = & \mu(Y_i/Y_{i-1}) \\ \mathrm{ht}(X_i/X_{i-1}) & = & \mathrm{ht}(Y_i/Y_{i-1}). \end{array}$$

On a donc que, pour tout entier $n \geq 1$, les polygones de Harder-Narasimhan de $X[p^n]$ et celui de $Y[p^n]$ coïncident. D'après la proposition 10 de [14], cela implique que pour $0 \leq i \leq r$,

$$f_{|X_i[p^n]} : X_i[p^n] \longrightarrow Y_i[p^n].$$

Cela étant vrai pour tout $n$, $f_{|X_i} : X_i \to Y_i$. Il reste à vérifier que $f_{|X_i}$ est une isogénie. Mais si $N \in \mathbb{N}$ et $g : Y \to X$ sont tels que $f \circ g = p^N$, alors $g$ vérifie la même propriété que $f$, $g_{|Y_i} : Y_i \to X_i$. On a alors $f_{|X_i} \circ g_{|Y_i} = p^N$. $\square$

Mettant bout à bout les résultats précédents on obtient le théorème suivant.

**Théorème 3.** *Soit $H \in \mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}$ isogène à un groupe de type HN.*

*(1) $H$ possède une unique filtration de Harder-Narasimhan pour la fonction pente $\mu = \frac{\dim}{\mathrm{ht}}$ dans la catégorie exacte $\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K} \otimes \mathbb{Q}$.*

*(2) $H$ est semi-stable pour cette fonction pente si et seulement si il est isogène à un groupe $p$-divisible semi-stable.*
*(3) Le polygone de Harder-Narasimhan renormalisé de $H$ (sec. 1.2) coïncide avec son polygone dans la catégorie "de Harder-Narasimhan" $(\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K} \otimes \mathbb{Q}, \mu)$.*

## 3. L'ALGORITHME DE DESCENTE VERS UN GROUPE SEMI-STABLE

On garde les hypothèses précédentes. On va montrer que, *si la valuation de $K$ est discrète*, *tout groupe $p$-divisible $H$ sur $\mathcal{O}_K$ est isogène à un groupe de type HN* et même produire un "algorithme de descente" explicite pour construire une telle isogénie.

3.1. **Première étape de l'algorithme.** Soit $H$ un groupe $p$-divisible non nul sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. On pose, pour un entier $k \geq 1$,

$$G_k = \text{le premier cran de la filtration de Harder-Narasimhan de } H[p^k].$$

**Lemme 2.** *La suite $(G_k)_{k\geq 1}$ forme une suite croissante de groupes semi-stables de même pente. De plus, pour tous $i \geq j \geq 1$, la multiplication par $p^j$ sur $G_i$ a un noyau plat et*

$$G_i[p^j] = G_j.$$

*Proof.* Soient donc $i \geq j \geq 1$. La multiplication par $p^j$ sur $G_i$ a un noyau plat et de plus $G_i[p^j]$ est semi-stable avec

$$\mu(G_i[p^j]) = \mu(G_i).$$

Étant donné que $G_i$ est le premier cran de la filtration de Harder-Narasimhan de $H[p^i]$, et que $G_j \subset H[p^i]$,

$$\mu(G_j) \leq \mu(G_i).$$

Étant donné que $G_j$ est le premier cran de la filtration de $H[p^j]$, et que $G_i[p^j] \subset H[p^j]$,

$$\mu(G_i[p^j]) \leq \mu(G_j).$$

De l'égalité et des deux inégalités précédentes on tire

$$\mu(G_i) = \mu(G_i[p^j]) = \mu(G_j).$$

De cela on déduit que $G_i[p^j] \subset G_j$ (cf. le lemme 7 de [14]). L'autre inclusion s'en déduit de même. $\square$

On remarquera qu'en particulier on a, pour $k \geq 1$,

$$p\, G_{k+1} \subset G_k.$$

On note maintenant

$$\mu_{\max}(H) := \mu_{\max}(H[p])$$

la plus grande pente de $\mathrm{HN}(H[p])$. On a donc, pour tout $k \geq 1$,

$$\mu_{max}(H) = \mu(G_k) = \mu_{max}(H[p^k])$$

et

$$\mu_{max}(H) = \sup\{\mu(G) \mid G \subset H\} = \sup\{\mu(G) \mid G \subset H[p]\}.$$

On a toujours

$$\mu_{max}(H) \geq \mu(H)$$

avec égalité si et seulement si $H$ est semi-stable.

**Définition 6.** *On pose*

$$\mathcal{F}_H = \varinjlim_{k\geq 1} G_k \subset H$$

*comme sous-faisceau fppf de $H$.*

Il résulte du lemme précédent que, pour tout $k \geq 1$, $\mathcal{F}_H[p^k] = G_k$ est un groupe plat fini sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. On a $\mathcal{F}_H = H$ si et seulement si $H$ est semi-stable.

**Lemme 3.** *Supposons $H$ non semi-stable. Deux possibilités se présentent:*

*(1) soit $\mathcal{F}_H$ est un groupe plat fini sur $\mathcal{O}_K$, c'est à dire il existe $k_0 \geq 1$ tel que $\mathcal{F}_H = \mathcal{F}_H[p^{k_0}]$,*
*(2) soit il existe un entier $k_0 \geq 0$, tel $\mathcal{F}_H/\mathcal{F}_H[p^{k_0}]$ soit un sous-groupe $p$-divisible non nul de $H/\mathcal{F}_H[p^{k_0}]$, semi-stable et vérifiant*

$$\mu(\mathcal{F}_H/\mathcal{F}_H[p^{k_0}]) = \mu_{\max}(H) > \mu(H).$$

*Proof.* Posons, pour un entier $k \geq 1$,

$$a_k = \mathrm{ht}\,(G_k/G_{k-1})\,.$$

Si $i \geq j \geq 1$, il y a un monomorphisme

$$\times p^{i-j} : G_i/G_{i-1} \hookrightarrow G_j/G_{j-1}.$$

La suite $(a_k)_k$ est donc décroissante. Il existe donc $k_0 \geq 1$ tel que pour $k \geq k_0$ on ait $a_k = a_{k_0}$.

- Si $a_{k_0} = 0$ alors, pour $k \geq k_0$, $G_k = G_{k_0}$.
- Si $a_{k_0} > 0$, pour $i > j \geq k_0$,

$$p^{i-j} : G_i/G_{i-1} \xrightarrow{\sim} G_j/G_{j-1}$$

  est un isomorphisme.

Posons, pour $i \geq 0$, $K_i = G_{k_0+i}/G_{k_0} \subset \mathcal{F}_H/G_{k_0}$. La suite $(K_i)_{i\geq 1}$ est une suite croissante de sous-groupes finis et plats de $\mathcal{F}_H/G_{k_0}$, semi-stables de pente $\mu_{\max}(H)$, telle que

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_H/G_{k_0} & = & \varinjlim\limits_{i\geq 1} K_i \\ K_i & \subset & (\mathcal{F}_H/G_{k_0})[p^i] \\ \forall i \geq j \geq 1, \quad p^{i-j}K_i & \subset & K_j \\ p^{i-j} : K_i/K_{i-1} & \xrightarrow{\sim} & K_j/K_{j-1}. \end{array}$$

On en déduit que $\mathcal{F}_H/G_{k_0}$ est un groupe $p$-divisible tel que, pour $i \geq 1$, $(\mathcal{F}_H/G_{k_0})[p^i] = K_i$. $\square$

3.2. **Deuxième étape.** Soit $H$ un groupe $p$-divisible non nul sur $\mathcal{O}_K$. On définit, par récurrence, une suite de groupes $p$-divisibles $(H_i)_{i\geq 1}$ munie de morphismes

$$\varphi_i : H_i \longrightarrow H_{i+1}.$$

On pose pour cela $H_1 = H$ et, si $H_i \neq 0$,

$$H_{i+1} = H_i/\mathcal{F}_{H_i},$$

avec pour morphisme $\varphi_i$ la projection. Si $H_i = 0$ on pose $H_{i+1} = 0$. On a donc, pour $i \geq 1$:

- soit $\varphi_i$ est une isogénie de noyau un groupe semi-stable vérifiant

$$\begin{array}{rcl} \mu(\ker\varphi_i) & = & \mu_{\max}(H_i) \\ \mu_{\max}(H_{i+1}) & < & \mu_{\max}(H_i), \end{array}$$

- soit $\varphi_i$ est la composée d'une isogénie $\psi : H_i \to H_i'$, telle que $\ker\psi$ soit semi-stable de pente $\mu(\ker\psi) = \mu_{\max}(H)$, avec un morphisme $H_i' \to H_{i+1}$ qui fait de $H_{i+1}$ un quotient de $H_i'$ dans la catégorie exacte $\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}$ et tel que

$$\mu(H_{i+1}) < \mu(H_i).$$

3.3. **Lorsque l'algorithme s'arrête en temps fini.** Lorsque la valuation de $K$ est discrète, l'algorithme de descente précédent s'arrête en temps fini.

**Théorème 4.** *Soit $H$ un groupe $p$-divisible sur $\mathcal{O}_K$.*

*(1) Supposons que dans la suite de groupes $p$-divisibles construite précédemment, $(H_i)_{i\geq 1}$, on ait $H_i = 0$ pour $i \gg 0$. Alors, $H$ est isogène à un groupe de type $HN$.*
*(2) Lorsque la valuation de $K$ est discrète, l'algorithme s'arrête en temps fini et tout groupe $p$-divisible sur $\mathcal{O}_K$ est isogène à un groupe de type HN.*

*Proof.* Seul le point (2) demande vérification. C'est une conséquence de ce que, avec les notations de la section 3.2, on a $\mu_{\max}(H_{i+1}) < \mu_{\max}(H_i)$ qui varie dans un ensemble fini puisque $\mu_{\max}(H) = \mu_{\max}(H[p])$ pour $H \in \mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}$. $\square$

## 4. POLYGONE DE HARDER-NARASIMHAN NON RENORMALISÉ

Soit $H$ un groupe $p$-divisible non nul sur $\mathcal{O}_K$. Si $n_0 \geq 1$ est un entier, la suite de polygones

$$\big(\mathrm{HN}(H[p^n])_{|\,[0,n_0\mathrm{ht}\,H]}\big)_{n\geq n_0}$$

est croissante. On peut donc poser la définition suivante.

**Définition 7.** *On appelle polygone de Harder-Narasimhan non renormalisé de $H$ la fonction concave*

$$\begin{aligned} \mathrm{HN}(H)^{nr} : [0,+\infty[ \quad &\longrightarrow \quad [0,+\infty] \\ x \quad &\longmapsto \quad \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\mathrm{ht}\,H\geq x}} \mathrm{HN}(H[p^n])(x). \end{aligned}$$

Analysons cette fonction en termes de l'algorithme de la section 3. Soit

$$H = H_1 \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow H_i \twoheadrightarrow H_{i+1} \twoheadrightarrow \cdots$$

la suite de groupes $p$-divisibles construite dans la section 3, où si $H_i \neq 0$ alors $H_{i+1} = H_i/\mathcal{F}_{H_i}$ (cf. déf. 6). Soit $i_0 \in [1,+\infty]$ tel que

- $i_0 = +\infty$ si $\forall i \geq 1$, $\mathcal{F}_{H_i}$ est un schéma en groupes fini et plat, i.e. pour tout $i \geq 1$ le morphisme $H_i \twoheadrightarrow H_{i+1}$ est une isogénie,
- sinon, $i_0 = \inf\{i \geq 1 \mid \mathcal{F}_{H_i}$ n'est pas un schéma en groupes fini et plat$\}$.

Prenons la définition suivante:

(1) Si $i_0 = +\infty$, considérons la suite strictement décroissante $(\mu_i)_{i\geq 1} = (\mu_{\max}(H_i))_{i\geq 1}$. On pose alors

$$\mu_\infty(H) = \lim_{i\to+\infty} \mu_i.$$

(2) Si $i_0 \neq +\infty$, considérons la suite décroissante $(\mu_i)_{1\leq i\leq i_0} = (\mu_{max}(H_i))_{1\leq i\leq i_0}$. On pose alors

$$\mu_\infty(H) = \mu_{i_0}.$$

On dispose alors du lemme suivant qui permet de relier le polygone non-renormalisé de $H$ à l'algorithme de descente.

**Lemme 4.** *Soit $\mathcal{P} : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ le polygone concave défini par*

*(1) si $i_0 = +\infty$, les pentes de $\mathcal{P}$ sont les $(\mu_i)_{i\geq 1}$ avec multiplicités $\big(\mathrm{ht}\ \ker(H_i \twoheadrightarrow H_{i+1})\big)_{i\geq 1}$*

*(2) si $i_0 \neq +\infty$, les pentes de $\mathcal{P}$ sont les $(\mu_i)_{1\leq i\leq i_0}$ avec multiplicités*

$$\big(\mathrm{ht}\ \ker(H_1 \twoheadrightarrow H_2),\dots,\mathrm{ht}\ \ker(H_{i_0-1} \twoheadrightarrow H_{i_0}),\infty\big)$$

.

*Alors, pour tout entier $n \geq 1$,*

$$\mathrm{HN}(H[p^n])_{|[0,n]} = \mathcal{P}_{|[0,n]}.$$

On en déduit aisément le résultat qui suit.

**Corollaire 1.** *Les propriétés suivantes sont vérifiées:*

*(1) Le polygone $\mathcal{P}$ défini dans le lemme précédent coïncide avec $\mathrm{HN}(H)^{nr}$.*

*(2) Sur le segment $[0,1]$ la fonction de Harder-Narasimhan renormalisée $\mathrm{HN}(H)$ est une droite de pente $\mu_\infty(H) = \lim_{x\to+\infty} \partial_t \mathrm{HN}(H)^{nr}{}_{|t=x}$.*

## 5. ÉTUDE DANS LE CAS DE VALUATION DISCRÈTE

Dans toute cette section $K|\mathbb{Q}_p$ *est supposé de valuation discrète.* On note $k$ le corps résiduel de $K$.

5.1. **Un résultat de structure général.** En cumulant les théorèmes 3 et 4 on obtient le résultat suivant.

**Théorème 5.** *Considérons la catégorie exacte* $\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K} \otimes \mathbb{Q}$ *munie de la fonction pente* $\mu = \frac{\dim}{\mathrm{ht}}$. *Soit* $H$ *un groupe* $p$*-divisible sur* $\mathcal{O}_K$.

(1) $H$ *possède une unique filtration de Harder-Narasimhan dans* $(\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K} \otimes \mathbb{Q}, \mu)$.
(2) $H$ *est semi-stable dans* $(\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K} \otimes \mathbb{Q}, \mu)$ *si et seulement si il est isogène à un groupe semi-stable au sens de la définition 2.*
(3) *Le polygone de Harder-Narasimhan de* $H$ *dans* $(\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K} \otimes \mathbb{Q}, \mu)$ *coïncide avec le polygone renormalisé* $\mathrm{HN}(H)$.

Prenons maintenant la définition suivante.

**Définition 8.** *On note* $\mathrm{Newt}(H_k)^\diamond$ *la "version concave" du polygone de Newton de la fibre spéciale de* $H \in \mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}$. *Plus précisément,*

$$\forall x \in [0, \mathrm{ht}(H)], \;\; \mathrm{Newt}(H_k)^\diamond(x) = \dim(H) - \mathrm{Newt}(H_k)(\mathrm{ht}(H) - x).$$

La proposition suivante est une remarque clef dont la démonstration est immédiate. Le point (1) entraîne immédiatement le point (2). Le point (2) est lui-même un *analogue du théorème de Grothendieck sur la semi-continuité du polygone de Newton* dans les familles de groupes $p$-divisibles paramétrées par une base de caractéristique $p$ ([21]).

**Proposition 9.** *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(1) *La filtration de Harder-Narasimhan de* $H_k$ *dans la catégorie abélienne* $\mathrm{BT}_k \otimes \mathbb{Q}$, *munie de la fonction pente* $\mu = \frac{\dim}{\mathrm{ht}}$, *est donnée par la filtration par les pentes de Grothendieck (*[34]*) de* $H_k$.
(2) *On a l'inégalité*
$$\mathrm{HN}(H) \leq \mathrm{Newt}(H_k)^\diamond.$$

Notons le corollaire important suivant.

**Corollaire 2.** *Si la fibre spéciale* $H_k$ *de* $H \in \mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}$ *est isocline, alors* $H$ *est isogène à un groupe* $p$*-divisible semi-stable.*

**Remarque 3.** *Si on remplace la fonction pente* $\mu = \frac{\dim}{\mathrm{ht}}$ *par* $-\mu$ *dans la catégorie abélienne* $\mathrm{BT}_k \otimes \mathbb{Q}$, *on obtient également une filtration de Harder-Narasimhan. Si* $k$ *est parfait, il s'agit de la filtration opposée à la filtration précédente relativement à la décomposition de Dieudonné-Manin en somme directe d'objets isoclines. Mais sur un corps* $k$ *quelconque, la filtration par les pentes n'est pas scindée et cette autre filtration ne semble pas avoir d'interprétation intéressante.*

5.2. **Filtration de Harder-Narasimhan des représentations de Hodge-Tate et cristallines.** Dans cette sous-section on suppose de plus que *le corps résiduel* $k$ *de* $K$ *est parfait*. On va faire le lien entre les filtrations précédentes et certaines filtrations d'objets de théorie de Hodge $p$-adique.

5.2.1. *Filtration de Harder-Narasimhan des espaces vectoriels filtrés.* Rappelons d'abord la construction suivante. Soit $L|E$ une extension de corps. Notons $\mathrm{VectFil}_{L/E}$ la catégorie exacte formée des couples $(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_L)$ où

- $V$ est un $E$-espace vectoriel de dimension finie
- $\mathrm{Fil}^\bullet V_L$ est une filtration décroissante de $V_L := V \otimes_E L$, telle que $\mathrm{Fil}^i V_L = V_L$ pour $i \ll 0$ et $\mathrm{Fil}^i V_L = 0$ pour $i \gg 0$.

Pour un tel objet on pose

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_L) &:= \dim V \\ \deg(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_L) &:= \sum_{i \in \mathbb{Z}} i.\dim \mathrm{Gr}^i V_L. \end{aligned}$$

On dispose alors de filtrations de Harder-Narasimhan dans $\mathrm{VectFil}_{L/E}$ pour la fonction pente

$$\mu = \frac{\deg}{\mathrm{rg}}.$$

On renvoie pour cela à [1] et la section 5.5 de [17].

5.2.2. *Filtration des représentations de Hodge-Tate.* Notons $G_K = \text{Gal}(\overline{K}|K)$ le groupe de Galois d'une clôture algébrique de $K$ et

$$\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{HT}}(G_K)$$

la catégorie des représentations de $G_K$ à valeurs dans un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension fini qui sont de Hodge-Tate. On note $C = \widehat{\overline{K}}$. Pour $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{HT}}(G_K)$ on pose

$$\begin{aligned} \text{rg}(V) &:= \dim_{\mathbb{Q}_p} V \\ \deg(V) &:= d \text{ si } \det(V_C) \simeq C(d). \end{aligned}$$

On s'intéresse aux filtrations de Harder-Narasimhan dans la catégorie abélienne $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{HT}}(G_K)$ munie de la fonction pente $\mu = \frac{\deg}{\text{rg}}$.

Pour $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{HT}}(G_K)$, définissons la filtration $\text{Fil}^\bullet V_C$ par la formule

$$\text{Fil}^i V_C = \bigoplus_{j \geq i} V_C(-j)^{G_K} \otimes_K C(j).$$

Cela définit un foncteur exact entre catégories de Harder-Narasimhan

$$\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{HT}}(G_K) \longrightarrow \text{VectFil}_{C/\mathbb{Q}_p} \tag{4}$$

via lequel les fonctions pentes se correspondent.

**Proposition 10.** *Via le foncteur (4), la filtration de Harder-Narasimhan d'une représentation de Hodge-Tate $V$ correspond à la filtration de Harder-Narasimhan de l'espace vectoriel filtré dans* $\text{VectFil}_{C/\mathbb{Q}}$ *associé.*

*Proof.* C'est une conséquence de ce que la fonction pente d'un objet de $VectFil_{C/\mathbb{Q}}$ est invariante par $\text{Gal}(\overline{K}|K)$. Il en résulte que la filtration de Harder-Narasimhan de l'objet de $VectFil_{C/\mathbb{Q}}$ associé à une représentation de Hodge-Tate est automatiquement Galois invariante. □

Ce qui nous intéresse pour plus tard est le corollaire suivant.

**Corollaire 3.** *La filtration de Harder-Narasimhande de $H \in \text{BT}_{\mathcal{O}_K}$ dans $\text{BT}_{\mathcal{O}_K} \otimes \mathbb{Q}$ (théo. 5) est complètement déterminée par son application de périodes de Hodge-Tate*

$$\alpha_H : T_p(H) \longrightarrow \omega_{H^D} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_C$$

*via les filtration de Harder-Narasimhan des objets de* $\text{VectFil}_{C/\mathbb{Q}_p}$.

5.2.3. *La bifiltration des $\varphi$-modules filtrés.* Nous n'utiliserons par les résultats de cette sous-section dans la suite. Notons $K_0 = W(k)_{\mathbb{Q}}$ et

$$\varphi\text{−ModFil}_{K/K_0}$$

la catégorie des $\varphi$-module filtrés associée de Fontaine. Les $\varphi$-modules filtrés admissibles, qui correspondent aux représentations cristallines, sont les objets semi-stables pour la fonction degré donnée par $t_H - t_N$ où $t_H$, resp. $t_N$, est le point terminal du polygone de Hodge, resp. Newton (cf. par exemple [17] sec. 10.5.1). On va voir que l'on peut coupler les filtrations des sections précédentes avec ces filtrations et définir des bifiltrations des $\varphi$-modules filtrés. Cela est essentiellement dû au fait que l'on ne dispose pas seulement de deux fonctions additives sur $\varphi\text{−ModFil}_{K/K_0}$, mais de trois.

Munissons $\mathbb{Z}^2$ de l'ordre lexicographique et posons

$$\deg = (t_H - t_N, -t_N) : \varphi\text{−ModFil}_{K/K_0} \longrightarrow \mathbb{Z}^2.$$

La fonctions rang d'un $\varphi$-module filtré est définie comme étant la hauteur de l'isocristal associé. On vérifie alors aisément que l'on dispose de filtrations de Harder-Narasimhan pour la fonction pente $\frac{\deg}{\text{rg}}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}^2$ muni de l'ordre lexicographique. On note $V_{cris}$ le foncteur covariant de Fontaine défini par

$$V_{cris}(D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K) = \text{Fil}^0(D \otimes_{K_0} B_{cris})^{\varphi = \text{Id}}.$$

On vérifie alors aisément le résultat suivant.

**Proposition 11.** *Via le foncteur $V_{cris}$ covariant de Fontaine, la filtration de Harder-Narasimhan d'un $\varphi$-module filtré admissible correspond à sa filtration de Harder-Narasimhan comme représentation de Hodge-Tate (sec. 5.2.2).*

Notons le résultat suivant qui généralise le point (2) de la proposition 9, ainsi que le corollaire 2, et qui est le cas où les poids de Hodge-Tate sont dans $\{0,1\}$. La terminologie "semi-stable" entre ici en conflit avec la terminologie de Fontaine, on l'entend ici au sens des filtrations de Harder-Narasimhan.

**Proposition 12.** *Pour une représentation cristalline $V$ de $G_K$, d'isocristal associé $(D,\varphi)$, on a l'inégalité*

$$\mathrm{HN}(V) \leq \mathrm{Newt}(D,\varphi)^{\diamond}.$$

*En particulier, si $(D,\varphi)$ est isocline, alors $V$ est semi-stable dans $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{HT}}(G_K)$.*

## 6. Filtration des modules de Hodge-Tate

Dans cette section *le corps de base $K$ sera supposé algébriquement clos et on le note $C$.* On se place donc dans une situation "non-arithmétique" purement géométrique, à l'opposé du cas de valuation discrète étudié précédemment. On va montrer que l'on peut retrouver le polygone de Harder-Narasimhan renormalisé d'un groupe $p$-divisible sur $\mathcal{O}_C$, à partir de ses périodes de Hodge-Tate par une formule explicite.

### 6.1. **Quelques définitions.**

**Définition 9.** *(1) On appelle module de Hodge-Tate de torsion un triplet $(M,\omega,\alpha)$ où $M$ est un groupe abélien fini d'ordre une puissance de $p$, $\omega$ un $\mathcal{O}_C$-module de présentation finie de torsion et $\alpha : M \to \omega$ vérifie*

$$\mathcal{O}_C.\alpha(M) = \omega.$$

*On note $\mathcal{M}_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{HT}}$ la catégorie correspondante.*

*(2) On appelle module de Hodge-Tate entier un triplet $(T,\omega,\alpha)$ où $T$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini, $\omega$ un $\mathcal{O}_C$-module libre de rang fini et $\alpha : T \to \omega$ vérifie*

$$\mathcal{O}_C.\alpha(T) = \omega.$$

*On note $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}_p}^{\mathrm{HT}}$ la catégorie correspondante.*

*(3) On appelle module de Hodge-Tate rationnel un triplet $(V,\omega,\alpha)$ où $V$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, $\omega$ est un $C$-espace vectoriel de dimension finie et $\alpha : V \to \omega$ vérifie*

$$C.\alpha(V) = \omega.$$

*On note $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{HT}}$ la catégorie correspondante.*

Ce sont des catégories exactes. Par exemple, les suites exactes dans $\mathcal{M}_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{HT}}$ sont données par des diagrammes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \omega' \arrow[r] & \omega \arrow[r] & \omega'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où les deux lignes horizontales sont exactes. L'application $(T,\omega,\alpha) \mapsto (T[\frac{1}{p}],\omega[\frac{1}{p}],\alpha[\frac{1}{p}])$ induit une identification

$$\mathcal{M}_{\mathbb{Z}_p}^{\mathrm{HT}} \otimes \mathbb{Q} = \mathcal{M}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{HT}}.$$

En d'autres termes, $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{HT}}$ est la "catégorie à isogénie près" associée à $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}_p}^{\mathrm{HT}}$. Si $N$ est un $\mathcal{O}_C$-module de présentation finie de torsion, on note

$$\deg(N) := v(\mathrm{Fitt}_0 N),$$

la valuation d'un générateur du 0-ième idéal de Fitting associé à $N$. Plus concrètement, si $N \simeq \oplus_i \mathcal{O}_C/a_i\mathcal{O}_C$, $\deg(N) = \sum_i v(a_i)$.

**Définition 10.** *On définit des fonctions pentes de la façon suivante:*

*(1) Pour $X = (M,\omega,\alpha) \in \mathcal{M}_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{HT}}$ on note*

$$\begin{aligned} \deg(X) &= \log_p |M| - \deg(\omega) \\ \mathrm{ht}(X) &= \log_p |M| \\ \mu(X) &= \frac{\deg(X)}{\mathrm{ht}(X)} \in [0,1]. \end{aligned}$$

*(2) Pour $X = (V,\omega,\alpha) \in \mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Q}_p}$ on note*

$$\begin{aligned} \dim(X) &= \dim V - \dim \omega \\ \mathrm{ht}(X) &= \dim V \\ \mu(X) &= \frac{\dim(X)}{\mathrm{ht}(X)} \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

À $(V,\omega,\alpha) \in \mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Q}_p}$ est associé l'objet $(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_C) \in \mathrm{VectFil}_{C/\mathbb{Q}_p}$, où l'on pose $\mathrm{Fil}^0 V_C = V_C$, $\mathrm{Fil}^1 V_C = \ker \alpha \otimes 1$ et $\mathrm{Fil}^2 V_C = 0$. Via ces formules, $\mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Q}_p}$ se plonge dans $\mathrm{VectFil}_{C/\mathbb{Q}_p}$ et les fonctions pentes se correspondent.

On dispose d'un foncteur "fibre générique" ([17] sec. 5.1.5)

$$(M,\omega,\alpha) \mapsto M$$

de $\mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathrm{tor}}$ vers la catégorie abélienne des groupes abéliens finis. Dès lors, on dispose de filtrations de Harder-Narasimhan dans cette catégorie. Par analogie avec le cas des groupes plat finis, pour $(M,\omega,\alpha) \in \mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathrm{tor}}$ et $M' \subset M$, on appelle *adhérence schématique de $M'$* le sous-object strict

$$(M', \mathcal{O}_C.\alpha(M'), \alpha_{|M'}).$$

Enfin, pour $X = (T,\omega,\alpha) \in \mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Z}_p}$ et $n \geq 1$, on note

$$X[p^n] := (p^{-n}T/T, p^{-n}\omega/\omega, \alpha) \in \mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathrm{tor}}.$$

6.2. **Adaptation des résultats sur les groupes $p$-divisibles.** Comme dans le théorème 1, pour $X \in \mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Z}_p}$, on vérifie que

$$\mathrm{HN}(X) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \mathrm{HN}(X[p^n])(n\bullet)$$

définit une fonction concave appelée polygone de Harder-Narasimhan renormalisé de $X$. On a alors la proposition suivante qui est une adaptation immédiate du théorème 3 et de la proposition 7.

**Proposition 13.** *Pour $X \in \mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Z}_p}$:*

*(1) $X[p]$ est semi-stable si et seulement si pour tout $n \geq 1$, $X[p^n]$ l'est. On dit alors que $X$ est semi-stable.*
*(2) Si $X$ est semi-stable il est alors semi-stable à isogénie près, i.e. $X[\frac{1}{p}]$ est semi-stable dans $\mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Q}_p}$.*
*(3) On a $\mathrm{HN}(X[p]) = \mathrm{HN}(X)$ si et seulement si $X$ possède une filtration croissante $(X_i)_{0 \leq i \leq r}$ avec $X_0 = 0$, $X_r = X$, $X_{i+1}/X_i$ semi-stable et la suite $\big(\mu(X_{i+1}/X_i)\big)_{0 \leq i \leq r-1}$ est strictement décroissante. On dit alors que $X$ est de type HN.*
*(4) Si $X$ est isogène à un module de Hodge-Tate entier de type HN, alors la filtration de Harder-Narasimhan de $X[\frac{1}{p}]$ dans $\mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Q}_p}$ est donnée par la filtration de Harder-Narasimhan entière précédente et $\mathrm{HN}(X) = \mathrm{HN}(X[\frac{1}{p}])$.*

On va en fait voir (théo. 6) que tout $X \in \mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Z}_p}$ est isogène à un module entier de type HN, alors qu'à priori ce résultat n'est vrai que lorsque la valuation du corps de base est discrète pour les groupes $p$-divisibles.

6.3. **Le résultat clef sur les modules de Hodge-Tate entiers.** On va reprendre l'algorithme de descente de la section 3 et montrer qu'il converge toujours pour les modules de Hodge-Tate entiers.

**Théorème 6.** *Tout $X \in \mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Z}_p}$ est isogène à un module de Hodge-Tate entier de type HN.*

*Proof.* Notons $X = (T,\omega,\alpha)$. Soit, pour tout entier $k \geq 1$,

$$Y_k = \text{le premier cran de la filtration de Harder-Narasimhan de } X[p^k].$$

Comme dans le lemme 2 on a:

- la suite $(Y_k)_{k \geq 1}$ forme une suite croissante de modules de Hodge-Tate de torsion semi-stables de même pente,
- pour $i \geq j \geq 1$, $Y_i[p^j] \subset Y_j$,

en utilisant que la catégorie des modules de Hodge-Tate de torsion semi-stables de pente fixée est abélienne. Notons

$$\mu_{\max}(X)$$

la pente commune des $(Y_k)_{k\geq 1}$. On note $\Lambda_k$ le réseau associé à $Y_k$, $T\subset \Lambda_k\subset T\otimes \mathbb{Q}_p$. Ils forment une suite croissante de réseaux

$$T\subset \Lambda_1\subset\cdots\subset\Lambda_k\subset\Lambda_{k+1}\subset\cdots$$

telle que

$$\Lambda_k\subset p^{-k}T,\ \ \Lambda_{k+1}\cap p^{-k}\Lambda\subset\Lambda_k\ \text{ et }\ p\Lambda_{k+1}\subset\Lambda_k.$$

Posons alors

$$\Lambda_\infty=\bigcup_{k\geq 1}\Lambda_k$$

qui est donc un sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $\Lambda\otimes\mathbb{Q}_p$ tel que $\Lambda_\infty\cap p^{-k}T=\Lambda_k$. On a $\Lambda_\infty=T\otimes\mathbb{Q}_p$ si et seulement si $X$ est semi-stable. On suppose désormais que ce n'est pas le cas. Comme dans le lemme 3 deux possibilités s'offrent alors:

(1) soit $\Lambda_\infty/T$ est fini, c'est à dire qu'il existe $k_0\geq 1$ tel que pour $k\geq k_0$ on ait $\Lambda_k=\Lambda_{k_0}$,
(2) soit $\Lambda_\infty/T$ est infini, auquel cas $X[\frac{1}{p}]$ possède un un sous-objet non nul strict dans $\mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Q}_p}$

$$A[\tfrac{1}{p}]\subsetneq X[\tfrac{1}{p}],$$

avec $A\in\mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Z}_p}$ semi-stable et $\mu(A[\frac{1}{p}])=\mu_{\max}(X)>\mu(X[\frac{1}{p}])$.

Supposons donc maintenant que $X[\frac{1}{p}]$ est stable dans $\mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Q}_p}$ mais qu'il n'est pas isogène à un module de Hodge-Tate entier semi-stable. Il existe donc une suite infinie d'isogénies

$$X=X_0\xrightarrow{f_0}X_1\xrightarrow{f_1}\dots\xrightarrow{f_{i-1}}X_i\xrightarrow{f_i}X_{i+1}\xrightarrow{f_{i+1}}\dots$$

telle que pour tout $i$, ker $f_i\neq 0$ et

$$\mu(\ker f_i)=\mu_{\max}(X_i)$$

avec

$$\mu_{\max}(X_0)>\mu_{\max}(X_1)>\cdots>\mu_{\max}(X_i)>\mu_{\max}(X_{i+1})>\cdots.$$

Notons $\mu_i=\mu_{\max}(X_i)$ et

$$\mu_\infty=\lim_{i\to+\infty}\mu_i.$$

On a donc $\mu_\infty\geq\mu(X[\frac{1}{p}])$. À la suite d'isogénies précédente est associée une suite strictement croissante de réseaux

$$T=L_0\subsetneq L_1\subsetneq\cdots\subsetneq L_i\subsetneq L_{i+1}\subsetneq\dots.$$

Soient

$$L_\infty=\bigcup_{i\geq 0}L_i$$

et

$$(L_\infty)_{div}$$

sa partie divisible, un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de $T\otimes\mathbb{Q}_p$. Supposons par l'absurde que

$$(L_\infty)_{div}\neq 0.$$

Le $\mathbb{Z}_p$-module $(L_\infty)/(L_\infty)_{div}$ est de type fini (cf. lemme 5). Or

$$L_\infty/(L_\infty)_{div}=\bigcup_{i\geq 0}L_i+(L_\infty)_{div}/(L_\infty)_{div}$$

et par noethérianité de $L_\infty/(L_\infty)_{div}$ on en déduit qu'il existe $i_0\geq 0$ tel que pour $i\geq i_0$ on ait

$$L_i+(L_\infty)_{div}=L_{i_0}+L_\infty.$$

Quitte à remplacer $X$ par $X_{i_0}$ on peut supposer que pour $i\geq 0$ l'égalité précédente est vérifiée i.e.

$$\forall i\geq 0,\ \ L_i+(L_\infty)_{div}=L_\infty. \tag{5}$$

Notons maintenant

$$\begin{aligned} T' &= (L_\infty)_{div} \cap T \\ X' &= (T', \mathcal{O}_C.\alpha(T'), \alpha_{|T'}) \end{aligned}$$

et pour $i \geq 0$,

$$N_i = \left((L_\infty)_{div} \cap L_i\right)/T' \subset T' \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p.$$

On a donc

$$T' \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = \bigcup_{i \geq 0} N_i.$$

Il y a un morphisme naturel

$$f : X' \longrightarrow X$$

qui satisfait aux hypothèses du lemme 6. On en déduit l'existence d'une constante $C$ telle que pour $i \geq 0$ on ait

$$\left| \deg\left(\overline{N_i}^{X'}\right) - \deg\left(\overline{N_i}^{X}\right) \right| \leq C.$$

De plus, comme conséquence de l'égalité (5),

$$\overline{N_i}^X = \ker(X_0 \to \cdots \to X_i).$$

Maintenant, étant donné que $\bigcup_i N_i = T' \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, pour tout entier positif $r$ il existe $i(r) \geq 0$ tel que

$$p^{-r}T'/T' \subset N_{i(r)}.$$

Cette inclusion implique que

$$\deg\left(\overline{N_{i(r)}}^{X'}\right) = \deg\left(\overline{p^r N_{i(r)}}^{X'}\right) + r \deg\left(X'[\tfrac{1}{p}]\right).$$

On a donc pour $r \geq 1$, par application du lemme 6,

$$\left| \deg\left(\overline{p^r N_{i(r)}}^{X}\right) + r \deg\left(X'[\tfrac{1}{p}]\right) - \deg\left(\overline{N_{i(r)}}^{X}\right) \right| \leq 2C. \tag{6}$$

Maintenant, étant donné que $p^r N_{i(r)} \subset N_{i(r)}$ et que le point

$$\left(\mathrm{ht}\left(\overline{p^r N_{i(r)}}^{X}\right), \deg\left(\overline{p^r N_{i(r)}}^{X}\right)\right)$$

est en dessous du polygone de Harder-Narasimhan de $\overline{N_{i(r)}}^X$, on a

$$\begin{aligned} \deg\left(\overline{p^r N_{i(r)}}^{X}\right) &\leq \deg \overline{N_{i(r)}}^X - \mu_\infty \operatorname{long}_{\mathbb{Z}_p}\left(N_{i(r)}/p^r N_{i(r)}\right) \\ &= \deg \overline{N_{i(r)}}^X - r\, \mu_\infty \operatorname{ht}(X'[\tfrac{1}{p}]). \end{aligned} \tag{7}$$

Combinant les deux dernière inégalités (6) et (7) on obtient

$$\deg \overline{N_{i(r)}}^X - r\ \deg(X'[\tfrac{1}{p}]) - 2C \leq \deg \overline{N_{i(r)}}^X - r\, \mu_\infty \operatorname{ht}(X'[\tfrac{1}{p}]).$$

Cela implique que

$$\mu_\infty \leq \mu(X'[\tfrac{1}{p}]) + \frac{2C}{r \operatorname{ht}(X'[\frac{1}{p}])}$$

et en faisant $r \to +\infty$ on obtient

$$\mu_\infty \leq \mu(X'[\tfrac{1}{p}]),$$

ce qui implique que

$$\mu(X[\tfrac{1}{p}]) \leq \mu(X'[\tfrac{1}{p}]).$$

Cela est en contradiction avec la stabilité de $X[\frac{1}{p}]$. On en déduit que $(L_\infty)_{div} = 0$, ce qui nous permet de conclure que "l'algorithme de descente converge en temps fini". $\square$

**Lemme 5** (cf. [3] A VII.58, exo. 6)**.** *Tout sous-$\mathbb{Z}_p$-module d'un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à la somme directe d'un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini et d'un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie.*

*Proof.* Cela résulte essentiellement, par récurrence sur la dimension du $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel considéré, de l'annulation

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p) = 0.$$

En écrivant $\mathbb{Q}_p = \bigcup_{n\geq 0} p^{-n}\mathbb{Z}_p$, cela se dévisse en l'annulation

$$R^1 \varprojlim_{n\geq 0} \mathrm{Hom}(p^{-n}\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) = R^1 \varprojlim_{n\geq 0} p^n\mathbb{Z}_p = 0$$

□

**Remarque 4.** *Le lemme 5 est faux pour des modules sur un anneau de valuation discrète non complet. C'est par exemple le cas de $\mathbb{Z}_{(p)}$, puisque $R^1 \varprojlim_{n\geq 0} p^n\mathbb{Z}_{(p)} \neq 0$. Il existe un $\mathbb{Z}_{(p)}$-module $M$ extension non scindée de $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Z}_{(p)}$. Ce n'est pas un $\mathbb{Z}_{(p)}$-module de type fini, mais on a $M_{div} = 0$.*

**Lemme 6.** *Soit $X' \to X$ un morphisme dans $\mathcal{M}^{HT}_{\mathbb{Z}_p}$ tel que*

*(1) $T(X')$ soit facteur direct dans $T(X)$ et induit donc une injection*

$$\{\text{sous-groupes finis de } T(X')\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\} \hookrightarrow \{\text{sous-groupes finis de } T(X)\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\},$$

*(2) on ait $\omega_{X'} \hookrightarrow \omega_X$ i.e. est injectif.*

*Il existe alors une constante $C$ telle que pour tout sous-groupe fini $N$ de $T(X')\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, on ait*

$$\deg\left(\overline{N}^X\right) - C \leq \deg\left(\overline{N}^{X'}\right) \leq \deg\left(\overline{N}^X\right)$$

*où $\overline{N}^X$, resp. $\overline{N}^{X'}$, désigne l'adhérence schématique dans $X$, resp. $X'$.*

*Proof.* Notons $X = (T, \omega, \alpha)$ et $X' = (T', \omega', \alpha')$. Il y a un diagramme

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha'"'] & T \arrow[d, "\alpha"] \\ \omega' \arrow[r, hook] & \omega \end{tikzcd}$$

Notons $\omega'' = \omega \cap (\omega' \otimes C)$. Il y a une factorisation

$$\omega' \hookrightarrow \omega'' \hookrightarrow \omega$$

avec $\omega''$ facteur direct dans $\omega$. Soit $c$ un entier tel que $\omega''/\omega'$ soit annulé par $p^c$. Pour un entier $n \geq c$, il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega''/\omega' \longrightarrow p^{-n}\omega'/\omega' \xrightarrow{u_n} p^{-n}\omega''/\omega'' \longrightarrow \omega''/\omega' \longrightarrow 0$$

et une inclusion

$$i_n : p^{-n}\omega''/\omega'' \hookrightarrow p^{-n}\omega/\omega.$$

Maintenant, si $N = L/T'$ avec $T' \subset L \subset p^{-n}T'$ et $n \geq c$, $\overline{N}^{X'[p^n]}$ est donné par le diagramme

$$L/T' \xrightarrow{\alpha'} \mathcal{O}_C.\alpha'(L)/\omega',$$

tandis que $\overline{N}^{X[p^n]}$ est donné par le composé

$$L/T' \xrightarrow{\alpha'} \mathcal{O}_C.\alpha'(L)/\omega' \xrightarrow{u_n} u_n\left(\mathcal{O}_C.\alpha'(L)/\omega'\right) \xrightarrow{\sim} i_n \circ u_n\left(\mathcal{O}_C.\alpha'(L)/\omega'\right).$$

Or, il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker u_n \cap \left(\mathcal{O}_C.\alpha'(L)/\omega'\right) \longrightarrow \mathcal{O}_C.\alpha'(L)/\omega' \longrightarrow u_n\left(\mathcal{O}_C.\alpha'(L)/\omega'\right) \longrightarrow 0$$

avec $\ker u_n \cap (\mathcal{O}_C.\alpha'(L)/\omega') \subset \omega''/\omega'$. Si $C = v(\mathrm{Fitt}_0\, \omega''/\omega')$ on a donc

$$v\left(\mathrm{Fitt}_0\, \mathcal{O}_C.\alpha'(L)/\omega'\right) - C \leq v\left(\mathrm{Fitt}_0\, u_n\left(\mathcal{O}_C.\alpha'(L)/\omega'\right)\right) \leq v\left(\mathrm{Fitt}_0\, \mathcal{O}_C.\alpha'(L)/\omega'\right)$$

d'où l'inégalité annoncée. □

## 7. Retour aux groupes $p$-divisibles: deux résultats clef sur les polygones de HN renormalisés

Dans cette section le corps $K|\mathbb{Q}_p$ est quelconque. On note $C = \widehat{\overline{K}}$.

7.1. **Le polygone renormalisé est un polygone.** Rappelons le résultat suivant: si $G$ est un groupe plat fini sur $\mathcal{O}_C$ alors le conoyau de

$$\alpha_G \otimes 1 : G(\mathcal{O}_C) \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow \omega_{G^D}$$

est annulé par $p^{1/(p-1)}$ si $p \neq 2$ et 4 si $p = 2$ ([13] théo. II.1.1, [15] théo. 3). C'est cette estimée qui a inspiré à l'auteur l'introduction des filtration de Harder-Narasimhan des modules de Hodge-Tate.

**Théorème 7.** *Pour $H \in \mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}$:*

*(1) Le polygone renormalisé $\mathrm{HN}(H)$ est un polygone à abscisses et ordonnées de rupture entières.*

*(2) Plus précisément, $\mathrm{HN}(H)$ coïncide avec le polygone de Harder-Narasimhan de son application de Hodge-Tate $V_p(H) \xrightarrow{\alpha_H} \omega_{H^D} \otimes C$ dans $\mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Q}_p}$.*

*Proof.* On suppose $p \neq 2$, le cas $p = 2$ étant laissé au lecteur. Pour tout sous-groupe plat fini $G$ de $H[p^n]$, puisque $\omega_{H^D}/p^n\omega_{H^D} \twoheadrightarrow \omega_{G^D}$, $\omega_{G^D}$ est engendré par $\dim H^D$-éléments. Couplé avec le fait que $\mathrm{coker}(\alpha_G \otimes 1)$ est annulé par $p^{1/(p-1)}$, on en déduit que

$$\deg \omega_{G^D} - \frac{\dim H^D}{p-1} \leq \deg \mathrm{coker}(\alpha_G \otimes 1) \leq \deg \omega_{G^D}.$$

Soit $X = (T_p(H), \mathrm{Im}(\alpha_H \otimes 1), \alpha_H) \in \mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Z}_p}$. On a donc

$$\mathrm{HN}(H[p^n]) \leq \mathrm{HN}(X[p^n]) \leq \mathrm{HN}(H[p^n]) + \frac{\dim H^D}{p-1}.$$

En divisant par $n$ et en appliquant le procédé de renormalisation de la définition 1, on obtient le résultat grâce à la proposition 13 et au théorème 6. □

**Remarque 5.** *Le théorème précédent ne dit pas que $H$ est isogène à un groupe de type HN. À priori si la valuation de $K$ n'est pas discrète il n'y a pas de raison pour que ce soit le cas, c'est seulement le cas pour son module de Hodge-Tate entier (cf. néanmoins théo. 9).*

**Remarque 6.** *D'après* [29], *lorsque $K = C$, la catégorie $\mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Z}_p}$ est équivalente à $\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_C}$. Néanmoins, il faut faire attention à ce qu'il ne s'agit pas d'une équivalence de catégories exactes. Une suite $0 \to H_1 \to H_2 \to H_3 \to 0$ dans $\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_C}$, qui donne lieu à une suite exacte dans $\mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Z}_p}$, est exacte si et seulement si la suite $0 \to \omega_{H_1^D} \to \omega_{H_2^D} \to \omega_{H_3^D} \to 0$ est exacte. Or, dans $\mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Z}_p}$ on remplace $\omega_{H^D}$ par l'image de $\alpha_H \otimes 1$.*

7.2. **Inégalité entre Newton et Harder-Narasimhan.**

7.2.1. *Polygone de HN des modifications admissibles de fibrés sur la courbe.* Soit $X = X_{C^\flat}$ la courbe schématique munie de son point à l'infini $\infty \in |X|$ de corps résiduel $C$ ([17]). Considérons la catégorie exacte des modifications admissibles effectives de fibrés sur la courbe (cf. [16]),

$$\mathrm{Modif}^{\mathrm{ad},\geq 0} = \{(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, u)\}$$

où

- $\mathcal{E}_1$ est un fibré semi-stable de pente $0$,
- $\mathcal{E}_2$ est un fibré sur la courbe,
- $u : \mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}_2$ est une modification supportée en $\infty$.

On définit des fonctions degré et rang sur cette catégorie en posant

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, u) &= \mathrm{long}(\mathrm{coker} u) \\ \mathrm{rg}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, u) &= \mathrm{rg}\, \mathcal{E}_1. \end{aligned}$$

On note $\mu = \frac{\deg}{\mathrm{rg}}$ la fonction pente associée. On dispose d'un "foncteur fibre générique" sur $\mathrm{Modif}^{\mathrm{ad},\geq 0}$

$$(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, u) \longmapsto H^0(X, \mathcal{E}_1)$$

à valeurs dans les $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie. Plus précisément, ce foncteur induit une bijection entre les sous-objets stricts de $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, u)$ et les sous-espaces vectoriels de $H^0(X, \mathcal{E}_1)$. De plus, si un morphisme

$$(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, u) \longrightarrow (\mathcal{E}_1', \mathcal{E}_2', u')$$

induit un isomorphisme $H^0(X,\mathcal{E}_1)\xrightarrow{\sim}H^0(X,\mathcal{E}_1')$, i.e. de façon équivalente un isomorphisme $\mathcal{E}_1\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}_1'$, on a alors un diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{E}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathcal{E}_2 \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{coker}(u) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{E}_1' \arrow[r] & \mathcal{E}_2' \arrow[r] & \mathrm{coker}(u') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{E}_2\to\mathcal{E}_2'$ est un monomorphisme, puisque c'est le cas génériquement (et c'est donc une modification de fibrés). On en déduit que $\mathrm{coker}(u)\to\mathrm{coker}(u')$ est un monomorphisme et que

$$\deg(\mathcal{E}_1',\mathcal{E}_2',u')=\deg(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,u)+\mathrm{long}\ \mathrm{coker}\big(\mathrm{coker}(u)\hookrightarrow\mathrm{coker}(u')\big).$$

On a donc $\deg(\mathcal{E}_1',\mathcal{E}_2',u')\geq\deg(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,u)$ avec égalité si et seulement si le morphisme est un isomorphisme. On dispose donc de filtrations de Harder-Narasimhan dans $\mathrm{Modif}^{\mathrm{ad},\geq 0}$. La proposition suivante est le point clef que nous utiliserons.

**Proposition 14.** *Pour* $(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,u)\in\mathrm{Modif}^{\mathrm{ad},\geq 0}$ *on a*

$$\mathrm{HN}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,u)\leq\mathrm{HN}(\mathcal{E}_2).$$

*Proof.* Il s'agit d'une simple conséquence de ce que, pour $(\mathcal{E}_1',\mathcal{E}_2',u')$ un sous-objet strict de $(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,u)$, on a

$$\deg(\mathcal{E}_1',\mathcal{E}_2',u')=\deg(\mathcal{E}_2')\leq\mathrm{HN}(\mathcal{E}_2)\big(\mathrm{rg}\,\mathcal{E}_2'\big)$$

puisque $\mathcal{E}_2'\hookrightarrow\mathcal{E}_2$. □

Il y a un foncteur exacte pleinement fidèle

$$\mathrm{VectFil}^{[0,1]}_{C/\mathbb{Q}_p}\longrightarrow\mathrm{Modif}^{\mathrm{ad},\geq 0} \tag{8}$$

d'image la catégorie des modifications “minuscules”, où $\mathrm{VectFil}^{[0,1]}_{C/\mathbb{Q}_p}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{VectFil}_{C/\mathbb{Q}_p}$ formée des couples $(V,\mathrm{Fil}^\bullet V_C)$ tels que

$$\begin{cases}\mathrm{Fil}^0V_C=V_C\\ \mathrm{Fil}^2V_C=(0).\end{cases}$$

À $(V,\mathrm{Fil}^\bullet V_C)$ on associe la modification $(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,u)$ telle que

- $\mathcal{E}_1=V\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}_X$
- $\widehat{\mathcal{E}}_{2,\infty}/\widehat{\mathcal{E}}_{1,\infty}=t^{-1}\mathrm{Fil}^1V_C\subset V\otimes B_{dR}/B_{dR}^+$.

Les fonctions pentes se correspondent via ce foncteur et la filtration de Harder-Narasimhan de $(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,u)$ est induite par celle de $(V,\mathrm{Fil}^\bullet V_C)$.

Rappelons maintenant ([17] chap. 8 et [29] prop. 5.1.6) que si $H$ est un groupe $p$-divisible sur $\mathcal{O}_C$ de fibre spéciale $H_{k_C}$, alors via le foncteur (8) composé avec le foncteur

$$\mathcal{M}^{\mathrm{HT}}_{\mathbb{Q}_p}\longrightarrow\mathrm{VectFil}^{[-1,0]}$$

de la section 6.1, on a

$$(V_p(H),\omega_{H^D}[\tfrac{1}{p}],\alpha_H)\longmapsto(V_p(H)\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}_X,\mathcal{E}(\mathbb{D}(H_{k_C}),p^{-1}\varphi),u),$$

où $u$ est un morphisme de comparaison de périodes cristallines de Fontaine (il s'agit essentiellement de la traduction en termes de fibrés vectoriels des théorèmes de comparaison de Fontaine pour les groupes $p$-divisibles) et $(\mathbb{D}(H_{k_C}),\varphi)$ est le module de Dieudonné covariant de $H_{k_C}$. De cela, de la proposition 14 et du théorème 7, on déduit le résultat suivant.

**Théorème 8.** *Pour* $H\in\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}$ *on a*

$$\mathrm{HN}(H)\leq\mathrm{Newt}(H_k)^\diamond.$$

*En particulier, si la fibre spéciale* $H_k$ *est isocline,* $\mathrm{HN}(H)$ *est une droite de pente* $\frac{\dim H}{\mathrm{ht}H}$.

## 8. APPLICATION AUX ESPACES DE MODULES DE GROUPES $p$-DIVISIBLES

8.1. **Déstabilisation par une isogénie des groupes $p$-divisibles semi-stables.** Soit $K|\mathbb{Q}_p$ quelconque comme précédemment et $H \in \mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}$.

**Proposition 15.** *Supposons $H$ semi-stable et soit $f : H \to H'$ une isogénie qui n'est pas un isomorphisme. Sont équivalents:*

*(1) $H'$ est semi-stable,*
*(2) $\ker f$ est un groupe plat fini semi-stable de pente $\mu(H)$.*

*Proof.* Notons $G = \ker f$. Supposons $H'$ semi-stable. Soit $n \geq 1$ tel que $G \subsetneq H[p^n]$. Puisque $H[p^n]/G \subset H'$, on a par semi-stabilité de $H'$

$$\mu(H[p^n]/G) \leq \mu(H') = \mu(H).$$

De la suite exacte

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow H[p^n] \longrightarrow H[p^n]/G \longrightarrow 0,$$

on déduit que si $\mu(G) < \mu(H)$ alors $\mu(H[p^n]) < \mu(H)$. Cela est impossible puisque $\mu(H[p^n]) = \mu(H)$. On en déduit que $\mu(G) = \mu(H)$ et $G$ est donc semi-stable.

Réciproquement, si $\mu(G) = \mu(H)$, il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H[p] \longrightarrow p^{-1}G \xrightarrow{\times p} G \longrightarrow 0.$$

Celle-ci implique que $p^{-1}G$ est semi-stable de pente $\mu(H)$. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow p^{-1}G \longrightarrow H'[p] \longrightarrow 0$$

on déduit alors que $H'[p]$ est semi-stable. □

Notons le corollaire évident suivant mais qui aura une interprétation géométrique agréable.

**Corollaire 4.** *Si $H[p]$ est stable alors pour tout isogénie $H \to H'$ ne se factorisant pas par la multiplication par $p$, $H'$ n'est pas semi-stable.*

La proposition suivante sera fort utile dans la suite.

**Proposition 16.** *Soit $H \in \mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}$ semi-stable tel que $(\dim H, \mathrm{ht}\ H) = 1$ et $G \subset H$ un sous-groupe plat fini non nul vérifiant*

*(1) $H[p] \not\subset G$,*
*(2) $G$ est semi-stable de pente $\mu(H)$.*

*Alors, si $h = \mathrm{ht}\, H$,*

$$G \subset H[p^h]$$

*et pour $1 \leq k \leq h-1$, $\mathrm{ht}(p^k G) \leq h - k$.*

*Proof.* Puisque $G$ est semi-stable de pente $\mu(H)$, pour tout $i, j \geq 0$, $p^i G[p^j]$ est semi-stable de pente $\mu(H)$ lorsqu'il est non nul. On va travailler dans la catégorie abélienne des groupes semi-stables de pente fixée $\mu(H)$, catégorie dans laquelle tout épimorphisme en fibre générique est plat surjectif. Supposons par l'absurde que $pG[p^2] = G[p]$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow G[p] \longrightarrow G[p^2] \xrightarrow{\times p} G[p] \longrightarrow 0$$

montre alors que $G$ est groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon 2. Il en résulte que $\deg(G[p]) \in \mathbb{N}$. Mais puisque $H[p] \not\subset G$, on a $G[p] \not\subset H[p]$ et donc l'égalité $\mu(H) = \mu(G[p])$ est impossible puisque $(\dim H, \mathrm{ht}\ H) = 1$. On a donc $pG[p^2] \subsetneq G[p]$.

Puisque $pG[p^2] \subsetneq G[p]$,

$$G[p^2]/G[p] = (G/G[p])[p] \subsetneq (H/G[p])[p].$$

On peut alors applique de nouveau le raisonnement précédent pour conclure que, si $G[p^2] \neq G[p]$, alors $pG[p^3] \subsetneq G[p^2]$. On conclut ainsi aisément par récurrence. □

De la démonstration précédente on tire le résultat suivant.

**Proposition 17.** *Soit $H \in \mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}$ et $G \subset H$ un sous-groupe plat fini semi-stable tel que $H[p] \subsetneq G$ et*
$$\mu(G) \notin \Big\{ \frac{d'}{h'} \mid d', h' \in \mathbb{N}, 0 \leq d' \leq h' \leq h-1 \Big\}.$$
*Alors, $G \subset H[p^{\mathrm{ht} H}]$ et pour $1 \leq k \leq h-1$, $\mathrm{ht}(p^k G) \leq h-k$.*

Notons également le résultat suivant conséquence des propositions 8 et 15.

**Proposition 18.** *Supposons $H$ de type HN et soit $f : H \to H'$ une isogénie qui n'est pas un isomorphisme. Sont équivalents:*

*(1) $H'$ est de type HN*
*(2) les pentes de $\mathrm{HN}(\ker f)$ sont contenues dans les pentes de $\mathrm{HN}(H)$.*

8.2. **Le théorème de réduction.** Dans cette section $K$ *est quelconque*. Voici une des principales applications géométriques des résultats précédents.

**Théorème 9.** *Soit $H \in \mathrm{BT}_{\mathcal{O}_K}$ tel que $(\dim H, \mathrm{ht}\ H) = 1$.*

*(1) Si $\mathrm{HN}(H)$ est une droite alors $H$ est isogène à un groupe $p$-divisible semi-stable.*
*(2) Si la fibre spéciale de $H$ est isocline alors $H$ est isogène à un groupe $p$-divisible semi-stable.*

*Proof.* D'après le théorème 8 le point (1) implique le point (2). On va montrer que l'algorithme de descente de la section 3 s'arrête en temps fini. On peut alors supposer que $K = C$ est algébriquement clos. D'après le théorème 5.1.4 de [29] on peut supposer que $H$ est donné par un $\mathcal{O}_C$-point de l'espace de Rapoport-Zink $\mathcal{M}$ sur Spf($\breve{\mathbb{Z}}_p$) des déformations par isogénies d'un groupe $p$-divisible sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On note $\mathcal{M}_\eta$ sa fibre générique comme espace de Berkovich. Pour simplifier les notations on note encore $H$ pour le groupe $p$-divisible universel sur $\mathcal{M}$, le groupe dont on est parti étant maintenant une spécialisation en un $\mathcal{O}_C$-point de $H$. Le lieu de semi-stabilité de $H$ est un domaine analytique fermé
$$\mathcal{M}_\eta^{ss} \subset \mathcal{M}_\eta.$$
Soit
$$U = \{ x \in \mathcal{M}_\eta \mid \mathrm{HN}(H_x) \text{ est une droite } \},$$
un ouvert de $\mathcal{M}_\eta$ (prop. 4 et point (1) du théo. 7) qui contient $\mathcal{M}_\eta^{ss}$. L'algorithme de descente de la section 3 définit une application
$$T : |U| \to |U|$$
définie par

- $T(x) = x$ si $H_x^{\mathrm{u}}$ est semi-stable,
- sinon, $T(x)$ est donné par l'isogénie $H_x \to H_x/G$, où $G$ est le plus grand sous-schéma en groupes plat fini de $H_x$ semi-stable de pente $\mu_{\max}(H_x)$.

L'algorithme de descente le long de l'orbite de Hecke de $x$ est alors donné par $(T^n(x))_{n \geq 0}$ et il s'agit de montrer que pour $n \gg 0$, $T^n(x)$ est un point fixe de $T$.

Pour cela on globalise la situation. D'après le théorème d'uniformisation de Rapoport-Zink ([26] théo. 6.23), il existe un sous-groupe discret $\Gamma \subset J(\mathbb{Q}_p)$ tel que
$$\Gamma \backslash \mathcal{M} \hookrightarrow \mathscr{S}_\eta,$$
où $\mathscr{S}$ est le complété $p$-adique d'un modèle entier d'une variété de Shimura de type PEL non-ramifiée sur $\breve{\mathbb{Z}}_p$. On dispose de correspondances de Hecke sur $\mathscr{S}_\eta$ et on se ramène ainsi à démontrer notre théorème pour $\mathscr{S}_\eta$, l'avantage étant que $|\mathscr{S}_\eta|$ est compact. Si $\mathscr{A}$ est le schéma abélien universel sur $\mathscr{S}$ on note encore $H = \mathscr{A}[p^\infty]$. Soit donc $\mathscr{S}_\eta^{ss} \subset \mathscr{S}_\eta$ le lieu de semi-stabilité des points de $H[p]$, un domaine analytique compact. On note encore $U \subset \mathscr{S}_\eta$ l'ouvert où le polygone de Harder-Narasimhan renormalisé est une droite,
$$\mathscr{S}_\eta^{ss} \subset U \subset \mathscr{S}_\eta.$$
Notons
$$\mu_{\max} : |U| \longrightarrow [d/h, 1],$$
$d = \dim H$, $h = \mathrm{ht}\, H$, la fonctions continue donnée par la plus grande pente du polygone de Harder-Narasimhan des points de $p$-torsion. On a donc
$$|\mathscr{S}_\eta^{ss}| = \mu_{\max}^{-1}(d/h).$$

Il y a une action par correspondances des correspondances de Hecke en $p$ sur $\mathscr{S}_\eta$. Elles sont en bijection avec

$$\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p)\backslash \mathrm{GL}_h(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{GL}_h(\mathbb{Z}_p).\mathbb{Q}_p^\times$$

(le facteur $\mathbb{Q}_p^\times$ agit trivialement sur l'espace, pas sur les fibrés automorphes dont nous n'avons pas besoin ici). On identifie cet ensemble de correspondances à $(\mathbb{Z}^h)^+/\mathbb{Z}$, les suites décroissantes de $\mathbb{Z}^h$ modulo translations. Pour $\underline{a} = (a_1, \dots, a_h) \in (\mathbb{Z}^h)^+$ avec $a_1 \geq \dots \geq a_h$ on note $Hecke_{\underline{a}}$ la correspondance de Hecke associée. D'après la proposition 16

$$Y := \bigcup_{\substack{2h \geq a_1 \geq \dots \geq a_h \geq 0 \\ a_1 - a_h > h}} Hecke_{\underline{a}}(\mathscr{S}_\eta^{ss})$$

vérifie

$$Y \cap \mathscr{S}_\eta^{ss} = \emptyset.$$

Par compacité de $Y$,

$$\alpha := \inf_Y \mu_{\max} > \frac{d}{h}.$$

Notons maintenant

$$\lambda := \inf\{\alpha\} \cup \left\{ \frac{d'}{h'} \;\middle|\; d', h' \in \mathbb{N},\ 1 \leq d' \leq h' \leq h-1, \frac{d'}{h'} > \frac{d}{h} \right\}.$$

On a $\lambda > \frac{d}{h}$. Soit $x \in U$ tel que

$$\mu_{\max}(H_x) < \lambda.$$

Supposons que $K(x)$ est de valuation discrète et donc (prop. 4) $T^n(x) \in \mathscr{S}_\eta^{ss}$ pour $n \gg 0$. Soit $n(x)$ le plus petit entier tel que

$$T^{n(x)}(x) \in \mathscr{S}_\eta^{ss}.$$

Il y a une suite d'isogénies

$$H_x \to H_{T(x)} \to \dots \to H_{T^{n(x)}(x)}$$

(il faudrait noter les extensions des scalaires puisque $K(T^{n(x)}(x)) \subset \dots \subset K(T(x)) \subset K(x)$ et ces groupes ne sont pas définis sur les mêmes bases, mais afin d'alléger les notations on ne le fait pas). On va montrer que

$$\ker\left(H_x \to H_{T^{n(x)}}\right) \subset H_x[p^h].$$

Supposons par l'absurde que ça ne soit pas le cas et soit $m \geq 0$ le plus grand entier tel que

$$I := \ker\left(H_{T^m(x)} \to H_{T^{n(x)}(x)}\right) \not\subset H_{T^m(x)}[p^h].$$

D'après la proposition 17 on a $0 \leq m < n(x) - 1$ et

$$\begin{aligned} H_{T^m(x)}[p] &\not\subset I \\ I &\not\subset H_{T^m(x)}[p^h] \\ I &\subset H_{T^m(x)}[p^{2h}]. \end{aligned}$$

Soit $k$ le plus petit entier tel que

$$I \subset H_{T^m(x)}[p^k].$$

On a donc $h < k \leq 2h$. Il y a alors une isogénie

$$H_{T^{n(x)}(x)} \simeq H_{T^m(x)}/I \xrightarrow{\times p^k} H_{T^m(x)}.$$

On vérifie alors que le noyau de cette isogénie est contenu dans $H_{T^{n(x)}(x)}[p^h]$ et ne contient pas $H_{T^{n(x)}(x)}[p]$. Cela implique que $T^{n(x)}(x) \in Y$ ce qui est impossible puisque $\mu_{\max}(T^m(x)) < \alpha$.

Soit maintenant $\lambda'$ vérifiant $\frac{d}{h} < \lambda' < \lambda$. Considérons le domaine analytique compact

$$K_{\lambda'} = \{\mu_{\max} \leq \lambda'\} \subset \mathscr{S}_\eta.$$

Puisque pour $x \in \mathscr{S}_\eta$, $HN(H_x) \leq HN(H_x[p])$ et $\mathrm{HN}(H_x)$ est un polygone à points de rupture de coordonnées entières, on a grâce à la définition de $\lambda$

$$K_{\lambda'} \subset U.$$

Considérons le domaine analytique compact

$$Z = \bigcup_{h \geq a_1 \geq \cdots \geq a_h \geq 0} Hecke_{\underline{a}}(\mathscr{S}_\eta^{ss}).$$

On a montré que "les points classiques de Tate" de $K_{\lambda'}$ sont contenus dans ceux de $Z$. On a donc, par densité des points classiques, $K_{\lambda'} \subset Z$. Ainsi, si $x \in \mathscr{S}_\eta$ vérifie $\mu_{\max}(H_x) < \lambda$ alors $H_x$ est isogène à un groupe $p$-divisible semi-stable.
Soit maintenant $x \in U$ quelconque. D'après le point (2) du corollaire 1, pour $n \gg 0$, $\mu_{\max}(H_{T^n(x)}) < \lambda$. Cela permet de conclure. □

**Remarque 7.** *Au final, le point qui permet de conclure dans le théorème précédent est que, si* $(\dim H, \mathrm{ht}\, H) = 1$ *et* $H$ *est semi-stable, alors* $H[p]$ *est stable. Cela est à rapprocher avec le fait que si* $(d, r) = 1$*, alors tout fibré semi-stable de degré* $d$ *et de rang* $r$ *sur une surface de Riemann compacte est stable, la structure de l'espace de modules correspondant étant alors beaucoup plus simple (l'espace de modules des fibrés semi-stables est alors propre et lisse).*

Cela nous permet de conclure quant au théorème principal.

**Théorème 10.** *Soit* $\mathcal{M}$ *l'espace de Rapoport-Zink des déformations par quasi-isogénies d'un groupe* $p$*-divisible simple à isogénie près sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$ *(*[26],[25]*). Notons* $\mathcal{M}_\eta$ *sa fibre générique comme espace de Berkovich et*

$$\pi_{dR} : \mathcal{M}_\eta \to \mathcal{F}$$

*l'application des périodes de Hodge-de-Rham, d'image le domaine de périodes* $\mathcal{F}^a$*. Soit* $\mathcal{M}_\eta^{ss}$ *le lieu où les points de* $p$*-torsion de la déformation universelle est un groupe plat fini semi-stable, un domaine analytique fermé. Alors,*

(1) $\pi_{dR}(\mathcal{M}_\eta^{ss}) = \mathcal{F}^a$*. En d'autres termes* $Hecke.\mathcal{M}_\eta^{ss} = \mathcal{M}_\eta$*,*
(2) *le morphisme* $\pi_{dR|\mathcal{M}_\eta^{ss}/p^{\mathbb{Z}}}$ *est quasi-fini,*
(3) *si* $\mathcal{M}_\eta^s$ *désigne le lieu stable, un ouvert de* $\mathcal{M}_\eta$*, alors* $\pi_{dR|\mathcal{M}_\eta^s/p^{\mathbb{Z}}} : \mathcal{M}_\eta^s/p^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathcal{F}^a$*.*

*Proof.* L'assertion (1) est une conséquence du théorème 9. L'assertion (2) se déduit des propositions 15 et 16. Le point (3) se déduit du fait que $\pi_{dR|\mathcal{M}_\eta^s/p^{\mathbb{Z}}}$ est étale injectif au niveau des points géométriques. □

## 9. Stratification de HN des Grassmaniennes et des variétés de Shimura

9.1. **Cadre et définitions.** Soit $G = \mathrm{GL}_n$ sur $\mathbb{Z}_p$. On note $\mu$ le cocaractère de $G$ défini par $\mu(z) = \mathrm{diag}(\underbrace{z, \cdots, z}_{d\text{-fois}}, 1, \cdots, 1)$. On note $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$ la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces perfectoïdes munie de la $v$-topologie.
On utilise la théorie des diamants de Scholze ([30], [27]). On va en effet définir certaines stratifications des Grassmaniennes $p$-adiques, dont les strates ne sont pas des espaces rigides usuels mais des diamants (on pourrait également les voir comme des espaces pseudo-adiques mais il est plus naturel d'utiliser la théorie des diamants de Scholze).

**Définition 11.** *On note* $\mathrm{HT}_{G,\mu}$ *le* $v$*-champ sur* $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$ *qui à* $S$ *associe le groupoïde des quadruplets*

$$(S^\sharp, \mathcal{F}, \mathcal{E}, \alpha),$$

*où* $S^\sharp$ *est un débasculement de* $S$*,* $\mathcal{F}$ *est un* $\mathbb{Z}_p$*-faisceau pro-étale localement constant libre de rang* $n$ *sur* $S$*,* $\mathcal{E}$ *un* $\mathcal{O}_{S^\sharp}$*-module localement libre de rang* $n-d$ *et* $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ *un morphisme* $\mathbb{Z}_p$*-linéaire tel que* $\mathcal{F} \otimes_{\underline{\mathbb{Z}_p}} \mathcal{O}_{S^\sharp} \to \mathcal{E}$ *soit surjectif.*

Dans la définition précédente on a pris quelques libertés quant aux notations. Plus précisément, si $\nu : S_{\text{proét}} \to |S|$ est la projection du site pro-étale sur le site analytique, $\mathcal{E}$ est un faisceau sur $|S|$ et $\alpha : \mathcal{F} \to \nu^* \mathcal{E}$. Afin d'alléger les notations, on utilise ce type de raccourcis dans la suite.

Si $\mathrm{Gr}_{n,n-d}$ désigne la grassmannienne des quotients localement libres de rang $n-d$ de $\mathcal{O}^n$ comme $\mathbb{Q}_p$-espace adique, on a

$$\mathrm{HT}_{G,\mu} = \big[\underline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)} \backslash \mathrm{Gr}_{n,n-d}^\diamond\big].$$

Il s'agit donc d'un petit $v$-champ au sens de [27].

**Remarque 8.** *Plus généralement, supposons nous donné un groupe réductif $G$ sur $\mathbb{Q}_p$ et une classe de conjugaison de cocaractère $\mu : \mathbb{G}_{m\overline{\mathbb{Q}}_p} \to G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$. Soit $E$ le corps reflex de définition de $\{\mu\}$. Supposons fixé un sous-groupe compact ouvert $K \subset G(\mathbb{Q}_p)$. On peut alors considérer le champ sur Spa$(E)^\diamond$*

$$\mathrm{HT}_{G,\mu,K} = \big[\, \underline{K}\backslash \mathrm{Gr}_{B_{dR}}^{\leqslant\mu} \,\big],$$

*où $\mathrm{Gr}_{B_{dR}}^{\leq\mu}$ désigne la cellule de Schubert fermée associée à $\mu$ dans la $B_{dR}$-grassmannienne affine de Scholze (*[30]*). Nous nous restreignons au cas précédent du groupe linéaire et de $\mu$ minuscule pour une première approche concrète.*

Ce champ est muni de correspondances de Hecke. Pour chaque élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, une correspondance entre $\mathrm{HT}_{G,\mu}$ est lui-même formée des uplets $(S^\sharp, \mathcal{F}, \mathcal{E}, \alpha, \mathcal{F}', \mathcal{E}', \alpha')$ et d'un isomorphisme $\mathcal{F}[\frac{1}{p}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'[\frac{1}{p}]$, tel que la position relative de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ soit donnée par notre double classe fixée.

9.2. **Stratification de Newton.** Il y a un morphisme de $v$-champs

$$\mathrm{HT}_{G,\mu} \longrightarrow \mathrm{Bun}_G,$$

où $\mathrm{Bun}_G$ désigne le champ des fibrés de rang $n$ sur la courbe ([10], [18]). Celui-ci associe à $(S^\sharp, \mathcal{F}, \mathcal{E}, \alpha)$ le fibré $\mathcal{G}$ sur $X_S$, obtenu en modifiant le fibré semi-stable de pente 0, $\mathcal{F} \otimes_{\underline{\mathbb{Z}_p}} \mathcal{O}_{X_S}$,

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\underline{\mathbb{Z}_p}} \mathcal{O}_{X_S} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow i_* \ker(\alpha \otimes 1)(D) \longrightarrow 0$$

où $i : S^\sharp \hookrightarrow X_S$ est défini par le débasculement $S^\sharp$ de $S$, $D$ est le diviseur de Cartier effectif associé à $i$ et $\alpha \otimes 1 : \mathcal{F} \otimes_{\underline{\mathbb{Z}_p}} \mathcal{O}_{S^\sharp} \twoheadrightarrow \mathcal{E}$. Cette modification est obtenue par tiré en arrière de la modification

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_S}(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_S} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{S^\sharp} \longrightarrow 0$$

tordue par $\mathcal{O}(D)$ et tensorisée par application de $\mathcal{F} \otimes_{\underline{\mathbb{Z}_p}} -$.

On peut dès lors tirer en arrière la stratification de Harder-Narasimhan de $\mathrm{Bun}_G$ et définir une *stratification de Newton de* $\mathrm{HT}_{G,\mu}$. Rappelons avant cela qu'à un élément $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n) \in (\mathbb{Q}^n)^+$, on associe un polygone concave d'origine $(0,0)$ sur l'intervalle $[0,n]$ et de pente $\nu_i$ sur l'intervalle $[i-1,i]$. Par définition, $\nu \leq \nu'$ si le polygone associé à $\nu$ est en dessous de celui associé à $\nu'$ et tous deux ont même points terminaux. Dans la suite, on va se restreindre aux $\nu$ tels que le polygone associé soit à points de rupture de coordonnées entières et de point terminal $(n,d)$.

**Définition 12.** *Pour $\nu \in (\mathbb{Q}^n)^+$, on note $\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{Newt}^\diamond=\nu}$, resp. $\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{Newt}^\diamond\leqslant\nu}$, le sous-champ dont les $(C,C^+)$-points, $C$ algébriquement clos, sont formés des éléments de $\mathrm{HT}_{G,\mu}(C,C^+)$ tels que, si $\mathcal{G}$ est le fibré associé par modification et $\mathcal{G} \simeq \mathcal{E}(D, p^{-1}\varphi)$, alors $\mathrm{Newt}(D,\varphi)^\diamond = \nu$, resp. $\mathrm{Newt}(D,\varphi)^\diamond \leq \nu$.*

Dit d'une autre façon, si $\mathrm{HN}(\mathcal{G})$ est donné par $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in (\mathbb{Q}^n)^+$, $\mathrm{Newt}(D,\varphi)^\diamond = (1-\lambda_n, \cdots, 1-\lambda_1)$. Pour tout $\nu$, $\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{Newt}^\diamond\leqslant\nu}$ est un sous-champ ouvert partiellement propre de $\mathrm{HT}_{G,\mu}$, qui correspond à un ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$-invariant dans la grassmannienne $\mathrm{Gr}_{n,n-d}$. La stratification correspondante de cette grassmannienne est celle de Caraiani et Scholze ([4]).

9.3. **Stratification de Harder-Narasimhan.**

**Définition 13.** *On note $\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{HN}=\nu}$, resp. $\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{HN}\leqslant\nu}$, le sous-champ dont les points sont formés des modules de Hodge-Tate rationnels (déf. 10) de polygone de Harder-Narasimhan égal à $\nu$, resp. inférieur ou égal à $\nu$.*

On a le résultat de semi-continuité suivant.

**Proposition 19.** *Pour tout $\nu$, $\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{HN}\leqslant\nu}$ est un sous-champ ouvert partiellement propre dans $\mathrm{HT}_{G,\mu}$.*

*Proof.* Notons $\mathcal{P} : [0,n] \to [0,d]$ le polygone concave associé à $\nu$. Pour $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, soit

$$Z_i = \big\{ x \in \mathrm{Gr}_{n,n-d} \mid \dim\big(\mathrm{Im}(K(x)^i \oplus (0)^{n-i} \to K(x)^{n-d})\big) \leq n - \mathcal{P}(i) \big\},$$

un fermé Zariski dans $\mathrm{Gr}_{n,n-d}$. Alors,

$$F = \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p).Z_i$$

est fermé dans $|\mathrm{Gr}_{n,n-d}|$ par compacité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}(Z_i)$. On a alors

$$\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{HN}\leqslant\nu} = \big[\,\underline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)}\backslash\big(\mathrm{Gr}_{n,n-d}^{\diamond}\smallsetminus F\big)\,\big]. \qquad \square$$

Les strates de Newton et de Harder-Narasimhan se comparent alors de la façon suivante. On note $\nu_{ss}$ le polygone qui est une droite de pente $d/n$.

**Proposition 20.** *Pour tout $\nu$, on a*

$$\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{Newt}^{\diamond}=\nu} \subset \mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{HN}\leqslant\nu}.$$

*En particulier, la strate ouverte "basique" $\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{Newt}^{\diamond}=\nu_{ss}}$ est contenue dans la strate ouverte "semi-stable" $\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{HN}=\nu_{ss}}$.*

9.4. **Lieu de type HN entier.** Les deux stratifications définies précédemment sont Hecke invariantes. On va maintenant définir des "domaines fondamentaux" pour l'action des correspondances de Hecke dans chaque strate de Harder-Narasimhan.

À chaque $x \in \mathrm{Gr}_{n,n-d}$, est associé un morphisme $\alpha_x : \mathbb{Z}_p^n \to K(x)^{n-d}$. On note $\omega_x$ le sous-$K(x)^0$-module engendré par l'image de ce morphisme. Cela définit un module de Hodge-Tate entier (déf. 10)

$$X_x = (\mathbb{Z}_p^n, \omega_x, \alpha_x) \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}_p}^{\mathrm{HT}}.$$

On munit $K(x)$ de la valuation de rang un associée à la généralisation maximale de $x$ dans notre espace adique. Comme d'habitude, on normalise cette valuation de telle manière que $v(p) = 1$. Grâce à cela on définit des fonctions continues pour $n \geq 1$,

$$x \mapsto \mathrm{HN}(X_x[p^n]),$$

de $|\mathrm{Gr}_{n,n-d}|$ à valeurs dans les polygones (ces fonctions continues se factorisent en fait par l'espace topologique de Berkovich associé).

**Définition 14.** *Pour un polygone $\nu$, on note $\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{HN}=\nu,ss}$ le sous-champ associé aux $x \in \mathrm{Gr}_{n,n-d}^{\mathrm{HN}=\nu}$ tels que $X_x$ soit de type HN, i.e. $\mathrm{HN}(X_x[p]) = \nu$.*

Contrairement à la strate $\mathrm{HN}^{\mathrm{HN}=\nu}$ qui n'est pas quasi-compacte en général, ni associée à un ouvert admissible de la grassmannienne rigide analytique, on a le résultat suivant.

**Lemme 7.** *L'espace topologique $|\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{HN}=\nu,ss}|$ est un fermé quasi-compact de la forme $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)\backslash|\overline{U}|) \cap |\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{HN}\geq\nu}|$, avec $U$ un ouvert quasi-compact de $\mathrm{Gr}_{n,n-d}$.*

*Proof.* C'est une conséquence du fait que, $\mathrm{HN}(X_x[\frac{1}{p}]) = \nu$ et $\mathrm{HN}(X_x[p]) = \nu$, est équivalent à ce que, $\mathrm{HN}(X_x[\frac{1}{p}]) \geq \nu$ et $\mathrm{HN}(X_x[p]) = \nu$, cf. théo. 1. $\square$

D'après le théorème 6, on a un recouvrement

$$|\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{HN}=\nu}| = \bigcup_{\underline{a}\in(\mathbb{Z}^n)^+/\mathbb{Z}} Hecke_{\underline{a}} \cdot |\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{HN}=\nu,ss}|. \tag{9}$$

9.5. **Induction parabolique.** On dispose de l'énoncé suivant de "mise en famille" des filtrations de Harder-Narasimhan des modules de Hodge-Tate.

**Proposition 21.** *Soit $\nu \in (\mathbb{Q}^n)^+$ associé à un polygone de pentes $\lambda_1 > \cdots > \lambda_r$ sur les intervalles $[0, h_1], \ldots, [h_{r-1}, h_r]$, $h_r = n$. Le champ $\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{HN}=\nu}$ s'identifie alors au champ qui à $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$ associe le groupoïde des quadruplets $(S^\sharp, \mathcal{F}_\bullet, \mathcal{E}_\bullet, \alpha)$ où*

- *$\mathcal{F}_\bullet$ est un $\mathbb{Z}_p$-faisceau pro-étale filtré sur $S$*

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_r$$

  *avec*
  - *pour tout $i$, $\mathcal{F}_i$ localement constant libre de rang $h_i$*
  - *la filtration précédente est pro-étale localement scindée*

- *$\mathcal{E}_\bullet$ est un fibré vectoriel filtré sur $S^\sharp$*

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_r$$

  *avec*
  - *pour tout $i$, $\mathcal{E}_i$ localement libre de rang $h_1(1-\lambda_1) + \cdots + h_i(1-\lambda_i)$*
  - *la filtration précédente est localement scindée sur $S^\sharp$*
- *$\alpha : \mathcal{F}_\bullet \to \mathcal{E}_\bullet$ est tel que pour tout $i$,*

$$(\alpha_{|\mathcal{F}_i} \otimes 1) : \mathcal{F}_i \otimes_{\underline{\mathbb{Z}_p}} \mathcal{O}_{S^\sharp} \longrightarrow \mathcal{E}_i$$

  *est surjectif*
- *pour tout $i \geq 1$, le gradué $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \to \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ est semi-stable de pente $\lambda_i$, fibre à fibre sur $S$.*

*Proof.* Dans cette preuve, la Grassmanienne est considérée en tant que schéma. Soit $V = \mathbb{Q}_p^n$ muni de la filtration $(V_i)_{0\leq i\leq r}$ telle que $V_i = \mathbb{Q}_p^{h_i} \oplus (0)$. Notons $P$ le sous-groupe parabolique de $\mathrm{GL}_n$ associé. Soit $Y \subset \mathrm{Gr}_{n,n-d}$, le sous-schéma réduit localement fermé formé des quotients localement libres de rang $n-d$ de $\mathcal{O}^n$ tels que pour tout point $x$, l'image de $k(x)^{h_i} \oplus (0)$ soit de rang $h_1(1-\lambda_1) + \cdots + h_i(1-\lambda_i)$. Notons $\mathcal{O}^n \twoheadrightarrow \mathcal{E}$ le quotient universel sur Gr. Alors, pour tout $i$, l'image de $\mathcal{O}_Y^{h_i} \oplus (0) \to \mathcal{E}_{|Y}$ est localement libre. Dès lors,

$$\underline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)/P(\mathbb{Z}_p)} \times Y^{ad,\diamond} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{n,n-d}^{ad,\diamond}$$

et

$$\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{HN}=\nu} = \big[\, \underline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)} \setminus Z \,\big],$$

avec $Z \subset \underline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)/P(\mathbb{Z}_p)} \times Y^{ad,\diamond}$ un sous-diamant fermé. □

Soit maintenant

$$M = \mathrm{GL}_{h_1} \times \mathrm{GL}_{h_2-h_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{h_r-h_{r-1}}$$

comme sous-groupe de Levi de $\mathrm{GL}_n$. On note $\mu$ le cocharactère de $M$ dont la composante sur le facteur $\mathrm{GL}_{h_i-h_{i-1}}$ est $\mathrm{diag}(\underbrace{z,\cdots,z}_{(h_i-h_{i-1})(1-\lambda_i)},1,\cdots,1)$. De la proposition précédente on déduit le résultat suivant.

**Proposition 22.** *Il y a un morphisme*

$$\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{HN}=\nu} \longrightarrow \mathrm{HN}_{M,\mu}^{\mathrm{HN}=\nu_{ss}}$$

*qui est une extension successive de champs de Picard pro-étales de la forme*

$$\big[\, \mathcal{F} \to \mathcal{E} \,\big]$$

*où $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{Z}_p$-faisceau pro-étale localement constant de rang fini, $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}^\sharp$-module localement libre de rang fini et $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$ est $\mathbb{Z}_p$-linéaire.*

*Proof.* Le morphisme de champs est donné par la proposition 21 en “passant aux gradués”. Soit $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$, $S^\sharp$ un débasculement de $S$, $(\mathcal{F}_1, \mathcal{E}_1, \alpha_1)$ et $(\mathcal{F}_2, \mathcal{E}_2, \alpha_2)$ deux $\mathbb{Z}_p$-modules de Hodge-Tate entiers sur $S^\sharp$. On cherche à calculer le champ de Picard des extensions entre $(\mathcal{F}_2, \mathcal{E}_2, \alpha_2)$ et $(\mathcal{F}_1, \mathcal{E}_1, \alpha_1)$. Soit donc une extension

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"'] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}_2 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{E}_1 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Pro-étale localement sur $S$, les suites exactes du haut et du bas sont scindées. Après scindage, le morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$ est donné par un morphisme $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{E}_2$. De tels scindages forment un torseur pro-étale sous $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S^\sharp}}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$. On en déduit que notre champ de Picard est associé au complexe

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S^\sharp}}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \xrightarrow{\alpha_{2*} \oplus \alpha_1^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{F}_1, \mathcal{E}_2).$$

Puisque $\alpha_1 \otimes 1$ est surjectif, $\alpha_1^*$ est injectif et le complexe précédent est quasi-isomorphe à

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{F}_1, \mathcal{E}_2)/\alpha_1^* \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S^\sharp}}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2). \tag{10}$$

On conclut avec l'égalité

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{F}_1,\mathcal{E}_2)/\alpha_1^*\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S^\sharp}}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S^\sharp}}(\ker(\alpha_1\otimes 1),\mathcal{E}_2). \qquad \square$$

On utilise les notions de dimension de la section 21 de [27].

**Proposition 23.** *On a l'égalité*

$$\dim|\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{HN}=\nu}| =< \mu-\nu, 2\rho >$$

*qui coïncide avec* $\dim.\ \mathrm{trg}\ \mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{HN}=\nu}$.

*Proof.* On sait que $\mathrm{HN}_{M,\mu}^{\mathrm{HN}=\nu_{ss}}$ est un ouvert de $\mathrm{HN}_{M,\mu}$ dont on connait la dimension. Il suffit alors de reprendre le calcul d'extensions de la preuve de la proposition 22. La dimension du champ de Picard associé au complexe de l'équation (10) est

$$\big(\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{F}_1)-\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_{S^\sharp}}(\mathcal{E}_1)\big).\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_{S^\sharp}}(\mathcal{E}_2).$$

A partir de là le calcul se fait sans difficultés. $\square$

**Exemple 1.** *Prenons* $d=n-1$. *Dès lors, les stratifications de Newton et de Harder-Narasimhan coïncident. La strate ouverte est* $\Omega^{n-1}\subset\mathbb{P}^{n-1}$. *La strate où le noyau de* $\underline{\mathbb{Q}_p^n}\to\mathcal{O}(1)$ *est de dimension* $n-i$ *est isomorphe à* $\underline{\mathrm{Gr}_{n,i}(\mathbb{Q}_p)}\times\Omega^{i,\diamond}$.

9.6. **Stratification des variétés de Shimura.** Soit $\mathscr{S}$ le complété $p$-adique du modèle entier en niveau hyperspécial en $p$ d'une variété de Shimura de type PEL ([22]). On suppose le niveau hors $p$ fixé, suffisamment petit. On suppose, de plus, que le groupe en $p$ associé est isomorphe à $\mathrm{GL}_{n\mathbb{Q}_p}\times\mathbb{G}_{m\mathbb{Q}_p}$, le facteur en $p$ correspondant au facteur de similitude. Via cette identification, on fait l'hypothèse que le cocaractère de Hodge est donné par $\mu(z)=\mathrm{diag}(\underbrace{z,\cdots,z}_{d\text{-fois}},1,\cdots,1)\times(z)$. Notons $S$ la fibre générique de $\mathscr{S}$ comme $\mathbb{Q}_p$-espace adique. Il y a un morphisme de périodes de Hodge-Tate ([13], [28])

$$\pi_{\mathrm{HT}}:S^\diamond\longrightarrow\mathrm{HT}_{G,\mu}.$$

Pour tout $\nu$,

$$\pi_{\mathrm{HT}}^{-1}\big(\mathrm{HT}_{G,\mu}^{\mathrm{Newt}^\diamond\leqslant\nu}\big)$$

est le diamant du tube au dessus de l'union finie de strates de Newton de $\mathscr{S}_{\mathbb{F}_p}$ de polygone (concave) plus petit que $\nu$. Par tiré en arrière on obtient deux stratifications Hecke invariantes

$$S^{\diamond,\mathrm{Newt}^\diamond=\nu},\ S^{\diamond,\mathrm{HN}=\nu},$$

indéxées par de tels $\nu$ avec des inclusions d'ouverts

$$S^{\diamond,\mathrm{Newt}^\diamond\leqslant\nu}\subset S^{\diamond,\mathrm{HN}\leqslant\nu}.$$

On note $S_\infty$ la variétés de Shimura en niveau infini en $p$ en tant que $\mathbb{Q}_p$-espace perfectoïde. Soit $\nu\neq\nu_{ss}$, le polygone qui est une droite de pente $\frac{d}{n}$. On note $P_\nu$ le sous-groupe parabolique de $\mathrm{GL}_{n\mathbb{Q}_p}$ associé à $\nu$. On a alors le résultat suivant qui découle de la proposition 21.

**Proposition 24.** *Il existe un diamant localement spatial* $T_\nu$ *sur Spa*$(\mathbb{Q}_p)$, *muni d'une action de* $P_\nu(\mathbb{Q}_p)$ *et de correspondances de Hecke hors p, tel que*

$$S_\infty^{\mathrm{HN}=\nu}=T_\nu\underset{\underline{P_\nu(\mathbb{Q}_p)}}{\times}\underline{G(\mathbb{Q}_p)}.$$

En d'autres termes, les strates non semi-stables sont paraboliquement induites.

9.7. **Perspectives.**

9.7.1. *Extension à d'autres groupes et au cas non minuscule.* Soit $G$ un groupe réductif sur $\mathbb{Q}_p$ et $\mu : \mathbb{G}_{m\overline{\mathbb{Q}}_p} \to G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ non forcément minuscule. Les résultats de [8] devraient permettre la construction d'une stratification de Harder-Narasimhan $G(\mathbb{Q}_p)$-invariante de

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{B}_{dR}}^{\leqslant \mu}$$

la cellule de Schubert fermée associée à $\mu$ sur Spa$(E)^\diamond$. D'après [9] et [4] on dispose d'une stratification de Newton $G(\mathbb{Q}_p)$-invariante de cette cellule indexée par l'ensemble de Kottwitz $B(G, \mu^{-1})$. On peut alors espérer que la stratification de Harder-Narasimhan soit indexée par le même type d'ensemble avec des inclusions

$$(\mathrm{Gr}_{\mathrm{B}_{dR}}^{\leqslant \mu})^{\mathrm{Newt}^\diamond \leq \nu} \subset (\mathrm{Gr}_{\mathrm{B}_{dR}}^{\leqslant \mu})^{\mathrm{HN} \leq \nu}$$

pour $\nu$ dans une chambre de Weyl positive. La conjecture suivante devrait alors résulter de techniques identiques à celles utilisées dans [6].

**Conjecture 1.**

*(1) Sont équivalents:*
   *(a) Les stratifications de Harder-Narasimhan et de Newton de $\mathrm{Gr}_{\mathrm{B}_{dR}}^{\leqslant \mu}$ coïncident.*
   *(b) L'inclusion $(\mathrm{Gr}_{\mathrm{B}_{dR}}^{\leqslant \mu})^{\mathrm{Newt}^\diamond = \nu_{ss}} \subset (\mathrm{Gr}_{\mathrm{B}_{dR}}^{\leqslant \mu})^{\mathrm{HN} = \nu_{ss}}$ de l'ouvert basique dans l'ouvert semi-stable est une égalité.*
   *(c) L'ensemble de Kottwitz $B(G, \mu^{-1})$ est pleinement Hodge-Newton décomposable (*[19], [6]*).*

*(2) Les strates fermées "$\mu$-ordinaire" de Newton et de Harder-Narasimhan coïncident toujours.*

Citons également la conjecture suivante extension des propositions 21 et 23.

**Conjecture 2.**

*(1) Les strates de Harder-Narasimhan non semi-stables sont paraboliquement induites.*
*(2) La dimension de la strate associé au vecteur de Harder-Narasimhan $\nu$ est donnée par le produit scalaire $< \mu - \nu, 2\rho >$.*

9.7.2. *Applications arithmétiques.* Il s'agirait ici d'utiliser les techniques de [4] couplées à la filtration de Harder-Narasimhan précédente. Plus précisément, on peut considérer le complexe $G(\mathbb{Q}_p) \times$(Hecke hors $p$)-équivariant

$$R\pi_{\mathrm{HT}*}\overline{\mathbb{F}}_\ell.$$

Cariani et Scholze montrent qu'il satisfait une certaine condition de perversité relativement à la stratification de Newton de la variété de drapeaux ([4] prop. 6.1.3). Ils calculent de plus les fibres géométriques de ce complexe en termes de cohomologie de variétés d'Igusa ([4] théo. 4.4.4). Il serait intéressant de regarder la restriction de ce complexe aux strates de Harder-Narasimhan. Par exemple, la partie supercuspidale en $p$ de ce "complexe pervers",

$$(R\pi_{\mathrm{HT}*}\overline{\mathbb{F}}_\ell)_{cusp},$$

qui devrait encore être pervers, devrait être concentrée sur la strate de Harder-Narasimhan semi-stable (propriété d'induction parabolique des strates non semi-stables). On peut alors se poser la question de savoir quelles contraintes cela impose lorsque l'on couple cette propriété de localisation avec la propriété de "perversité" et le calcul de la cohomologie des fibres géométriques, qui sont constantes le long de chaque strate de Newton.

Supposons par exemple que l'on sache montrer que:

(1) Pour tout $i$ et $\nu \neq \nu_{ss}$, $(R^i\pi_{\mathrm{HT}*}\overline{\mathbb{F}}_\ell)_{\mathcal{F}l^{\mathrm{Newt}^\diamond = \nu}}$ est un système local étale (Caraiani et Scholze montrent seulement que les fibres géométriques sont constantes).
(2) Pour tout $\nu \neq \nu_{ss}$ et toute composante connexe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}l^{\mathrm{Newt}^\diamond = \nu}$, $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{F}l^{\mathrm{HN} = \nu_{ss}}$.

On devrait alors pouvoir montrer que $(R\pi_{\mathrm{HT}*}\overline{\mathbb{F}}_\ell)_{cusp}$ est concentré sur le lieu basique et donc la partie supercuspidale en $p$ de la cohomologie de la variété de Shimura, coïncide avec la partie supercuspidale de la cohomologie du lieu basique ([12] et [33] pour des cas particuliers au niveau des sommes alternées dans des groupes de Grothendieck).

## REFERENCES


[1] Y. André. Slope filtrations. *Confluentes Mathematici*, 1, 2009.
[2] S. Bijakowski, V. Pilloni, and B. Stroh. Classicité de formes modulaires surconvergentes. *Ann. of Math. (2)*, 183(3):975–1014, 2016.
[3] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique*. Masson, Paris, 1981. Algèbre. Chapitres 4 à 7. [Algebra. Chapters 4–7].
[4] A. Caraiani and P. Scholze. On the generic part of the cohomology of compact unitary Shimura varieties. *Ann. of Math. (2)*, 186(3):649–766, 2017.
[5] H. Chen. Convergence des polygones de Harder-Narasimhan. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (120):116, 2010.
[6] M. Chen, L. Fargues, and X. Shen. On the structure of some $p$-adic period domains. `https://arxiv.org/abs/1710.06935`.
[7] P. Colmez. Espaces de Banach de dimension finie. *J. Inst. Math. Jussieu*, 1(3):331–439, 2002.
[8] C. Cornut and M. Peche Irissarry. Harder-Narasimhan filtrations for Breuil-Kisin-Fargues modules. `https://arxiv.org/abs/1801.03341`.
[9] L. Fargues. $G$-torseurs en théorie de Hodge $p$-adique. *À paraître à Compositio Math*.
[10] L. Fargues. Geometrization of the local langlands correspondence, an overview. `https://arxiv.org/abs/1602.00999`.
[11] L. Fargues. Groupes analytiques rigides $p$-divisibles II. *prépublication*.
[12] L. Fargues. Cohomologie des espaces de modules de groupes $p$-divisibles et correspondances de Langlands locales. *Astérisque*, (291):1–199, 2004. Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et correspondances de Langlands locales.
[13] L. Fargues. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques. In *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, Progress in math., 262, pages 1–325. Birkhäuser, 2008.
[14] L. Fargues. La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats. *J. Reine Angew. Math.*, 645:1–39, 2010.
[15] L. Fargues. La filtration canonique des points de torsion des groupes $p$-divisibles. *Annales scientifiques de l'ENS*, 44(6):905–961, 2011.
[16] L. Fargues. Quelques résultats et conjectures concernant la courbe. *Astérisque*, (369):325–374, 2015.
[17] L. Fargues and J.-M. Fontaine. Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge $p$-adique. *Astérisque 406*.
[18] L. Fargues and P. Scholze. Geometrization of the local Langlands correspondence. *En préparation*.
[19] U. Goertz, X. He, and S. Nie. Fully Hodge-Newton decomposable Shimura varieties. `https://arxiv.org/abs/1610.05381`.
[20] B. Gross and M. Hopkins. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. In *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, volume 158 of *Contemp. Math.*, pages 23–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
[21] N. Katz. Slope filtration of $F$-crystals. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978), Vol. I*, volume 63 of *Astérisque*, pages 113–163. Soc. Math. France, Paris, 1979.
[22] R.E. Kottwitz. Points on some Shimura varieties over finite fields. *J. Amer. Math. Soc*, 5(2):373–444, 1992.
[23] B. Levin and C. Wang-Ericksson. A Harder-Narasimhan theory for Kisin modules. `https://arxiv.org/abs/1606.00914`.
[24] L. Mocz. A New Northcott Property for Faltings Height. `https://arxiv.org/abs/1709.06098`.
[25] M. Rapoport and E. Viehmann. Towards a theory of local Shimura varieties. *Münster J. Math.*, 7(1):273–326, 2014.
[26] M. Rapoport and T. Zink. *Period spaces for p-divisible groups.* Number 141 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
[27] P. Scholze. Étale cohomology of diamonds. `https://arxiv.org/abs/1709.07343`.
[28] P. Scholze. On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties. *Ann. of Math. (2)*, 182(3):945–1066, 2015.
[29] P. Scholze and J. Weinstein. Moduli of $p$-divisible groups. *Camb. J. Math.*, 1(2):145–237, 2013.
[30] P. Scholze and J. Weinstein. Berkeley lectures on $p$-adic geometry. 2014.
[31] Xu Shen. Cell decomposition of some unitary group Rapoport-Zink spaces. *Math. Ann.*, 360(3-4):825–899, 2014.
[32] Xu Shen. On the Hodge-Newton filtration for $p$-divisible groups with additional structures. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (13):3582–3631, 2014.
[33] S.-W. Shin. On the cohomology of Rapoport-Zink spaces of EL-type. *Amer. J. Math.*, 134(2):407–452, 2012.
[34] T. Zink. On the slope filtration. *Duke Math. J.*, 109(1):79–95, 2001.



CNRS–INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU
*Email address*: `laurent.fargues@imj-prg.fr`