UNIVERSITE PARIS-SUD
FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

MEMOIRE

Présenté pour obtenir

LE DIPLOME D'HABILITATION A DIRIGER
DES RECHERCHES EN SCIENCE
DE L'UNIVERSITE PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

par

Laurent Fargues

Géométrie et cohomologie de certains espaces de modules p-adiques

Soutenu le 30 novembre 2009 devant la commission d'examen :

M.	Henri CARAYOL	(université de Strasbourg)
M.	Jean-Marc FONTAINE	(université Paris 11)
M.	Michael HARRIS	(université Paris 7)
M.	Gérard LAUMON	(Rapporteur, CNRS)
M.	Michael RAPOPORT	(Rapporteur, université de Bonn)
M.	Richard TAYLOR	(Rapporteur, université d'Harvard, absent)

GÉOMÉTRIE ET COHOMOLOGIE DE CERTAINS ESPACES DE MODULES p-ADIQUES

LAURENT FARGUES

Table des matières

1. Espaces de modules locaux : généralités 1
2. Résultats sur la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink obtenus par des méthodes globales 3
3. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld 4
4. Description de l'isomorphisme entre les deux tours au niveau des squelettes et ramification des groupes de Lubin-Tate 9
5. Autodualité de la cohomologie de la tour de Drinfeld sous l'involution de Zelevinsky 18
6. Invariance par complétion formelle de la filtration de monodromie sur les cycles évanescents 22
7. Filtrations de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats et application aux groupes p-divisibles 23
8. Espaces de Banach-Colmez 27

Articles présentés 31

Références 31

1. Espaces de modules locaux : généralités

Dans mes travaux je me suis intéressé aux espaces de modules de groupes p-divisibles définis par Rapoport et Zink ([22]), leur cohomologie et la réalisation géométrique de correspondances de Langlands locales dans ces espaces de cohomologie. Commençons par rappeler quelques définitions et notations concernant ces espaces.

1.1. **Définition.** Soit p un nombre premier. Fixons une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$. On suppose donné un triplet (G, b, μ) où :

– G est un groupe réductif sur $\mathbb{Q}_p$

– si $L = W(\overline{\mathbb{F}}_p)[\frac{1}{p}]$ et $\sigma \in \mathrm{Aut}(L)$ désigne son Frobenius, b est une classe de σ-conjugaison dans $G(L)$

– $\mu : \mathbb{G}_m \longrightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ est un cocaractère minuscule pris à $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$-conjugaison près.

Notons E le corps de définition de la classe de conjugaison de μ, une extension de degré fini de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On note $\breve{E}$ le complété de l'extension maximale non ramifiée de E dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On note J_b le σ-centralisateur de b dans $G(L)$. Il s'agit des $\mathbb{Q}_p$-points d'une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi de la forme intérieure quasidéployée de G. La donnée comprend également un modèle entier $\mathcal{G}$ de G. Soit $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$ le sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{Q}_p)$ associé. Lorsque G est non ramifié $\mathcal{G}$ sera supposé réductif et donc $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$ hyperspécial. On ne suppose pas forcément G non ramifié afin d'inclure le cas des espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld.

Sous certaines conditions sur le triplet (G, b, μ) Rapoport et Zink on construit dans [22] des espaces de modules p-adiques. Plus précisément ils ont construit :

Date: 4 mars 2009.

– Un schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}$ localement formellement de type fini sur $\mathrm{Spf}(O_{\breve{E}})$ muni d'une action continue de J_b et d'une donnée de descente $\widehat{\mathcal{M}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}^{(\sigma)}$ de $\breve{E}$ à E.
– Une tour $J_b \times G(\mathbb{Q}_p)$-équivariante munie d'une donnée de descente de $\breve{E}$ à E de $\breve{E}$-espaces analytiques au sens de Berkovich
$$(\mathcal{M}_K)_K$$
où K parcourt les sous-groupes ouverts de $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$ et telle que
$$\widehat{\mathcal{M}}^{an} = \mathcal{M}_{\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)}$$
où $\widehat{\mathcal{M}}^{an}$ désigne la fibre générique de $\widehat{\mathcal{M}}$ au sens des espaces analytiques de Berkovich.

Rappelons rapidement la définition de ces espaces dans le cas le plus simple. Soient n, d deux nombres entiers tels que $n \geq 1$ et $0 \leq d \leq n$. Soient $G = \mathrm{GL}_{n/\mathbb{Q}_p}$, $\mathcal{G} = \mathrm{GL}_{n/\mathbb{Z}_p}$,
$$\mu(z) = \mathrm{diag}(\underbrace{z, \ldots, z}_{d-\text{fois}}, 1, \ldots, 1)$$
et $b \in \mathrm{GL}_n(L)$ tel que l'isocristal $(L^n, b\sigma)$ soit l'isocristal covariant d'un groupe p-divisible de dimension d et hauteur n sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Soit $\mathbb{H}$ un groupe p-divisible sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ muni d'un isomorphisme
$$(\mathbb{D}(\mathbb{H})[\tfrac{1}{p}], \varphi) \xrightarrow{\sim} (L^n, b\sigma)$$
qui induit une identification
$$J_b = \mathrm{End}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^{\times}.$$
On a $E = \mathbb{Q}_p$. Le schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}$ est alors tel que si S est un $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$-schéma sur lequel p est localement nilpotent
$$\widehat{\mathcal{M}}(S) = \{(H, \rho)\}/\sim$$
où H est un groupe p-divisible sur S et
$$\rho : \mathbb{H} \times_{\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)} \overline{S} \longrightarrow H \times_S \overline{S}$$
est une quasi-isogénie de groupes p-divisibles, $\overline{S}$ désignant la réduction modulo p de S. L'action de J_b sur $\widehat{\mathcal{M}}$ se fait via ρ et l'action de J_b par quasi-isogénies sur $\mathbb{H}$. Sur $\widehat{\mathcal{M}}^{an}$ il y a un système local étale p-adique de rang n donné par le module de Tate de la déformation universelle. Les revêtements $(\mathcal{M}_K)_{K \subset GL_n(\mathbb{Z}_p)}$ de $\widehat{\mathcal{M}}^{an}$ sont obtenus par trivialisations partielles de la représentations de monodromie associée (en la forçant à vivre dans le sous-groupe K). Plus précisément, si $K \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ est un sous-groupe ouvert alors $\mathcal{M}_K$ représente le faisceau étale sur $\widehat{\mathcal{M}}^{an}$
$$\underline{\mathrm{Isom}}\big((p^{-k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^n, H^{\mathrm{univ}}[p^k]^{an}\big)/K$$
où $k \gg 0$ est tel que $\mathrm{Id} + p^k M_n(\mathbb{Z}_p) \subset K$ et H^{univ} désigne le groupe p-divisible associé à la déformation universelle sur $\widehat{\mathcal{M}}$.

1.2. **Cohomologie.** Soit ℓ un nombre premier différent de p. On note W_E le groupe de Weil de E. L'objet principal auquel je me suis intéressé est le suivant. Pour K fixé on regarde la cohomologie étale ℓ-adique à support compact telle que définie par Vladimir Berkovich
$$H_c^{\bullet}(\mathcal{M}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$
Celle-ci est une munie d'une action de $J_b \times W_E$ où l'action de J_b est lisse de type fini (je renvoie à ma thèse [F2] pour les propriétés de base de ces représentations qui sont déduites de divers résultat de Berkovich pour la géométrie et de Bernstein pour la théorie des représentations).

Bien que la représentation de J_b précédente, $H_c^{\bullet}(\mathcal{M}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, soit de type fini elle n'est pas en général de longueur finie i.e. n'est pas admissible.

Afin de construire des correspondances de Langlands j'ai regardé la construction suivante. Soit π une représentation lisse irréductible de J_b à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Considérons
$$\varinjlim_{K} \ \mathrm{Ext}^{\bullet}_{J_b}\big(H_c^{\bullet}(\mathcal{M}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi\big).$$

C'est une représentation de $G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$ qui est lisse admissible comme représentations de $G(\mathbb{Q}_p)$ et vérifie une propriété de continuité comme représentation de W_E (cf. [F2]). On peut alors regarder la somme alternée de telles représentations dans un groupe de Grothendieck convenable de représentations de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b$. Cela définit une correspondance

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Irr}(J_b) & \longrightarrow & \mathrm{Groth}(G(\mathbb{Q}_p) \times W_E) \\ \pi & \longmapsto & \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \Big[\varinjlim_{K} \mathrm{Ext}^i_{J_b}\big(H^j_c(\mathcal{M}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi\big) \Big]. \end{array}$$

On veut relier cette correspondances à des correspondances de Langlands locales du type Jacquet-Langlands pour la correspondance entre représentations de J_b et de $G(\mathbb{Q}_p)$ (rappelons que J_b est le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi de G) et correspondance de Langlands locale ([16],[17]) pour la correspondance entre représentations de J_b et de W_E.

Pour $\Lambda \in \{\mathbb{Z}/\ell^k\mathbb{Z}, \mathbb{Q}_\ell, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\}$ on peut également définir un complexe de cohomologie lisse équivariant

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \Lambda) \in \mathbb{D}^b\big(\Lambda[G(\mathbb{Q}_p) \times J_b \times W_E^{\mathrm{disc}}]_\infty\big)$$

la catégorie dérivée des complexes de Λ-modules munis d'une action de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b \times W_E$ qui est lisse en tant que représentation de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b$. La cohomologie de ce complexe est la représentation

$$\varinjlim_{K} H^\bullet_c(\mathcal{M}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \Lambda).$$

La construction, assez technique, est expliquée dans le chapitre IV de [F4] ou bien dans [10].

2. Résultats sur la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink obtenus par des méthodes globales

Dans ma thèse ([F2]) j'ai démontré le théorème suivant par comparaison de la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink avec la cohomologie de certaines variétés de Shimura de type PEL unitaires.

Théorème 1 ([F2]). *Supposons que $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} GL_n$ avec $F|\mathbb{Q}_p$ non ramifiée et b soit une classe de σ-conjugaison basique, c'est à dire d'isocristal associé isocline. Supposons de plus que soit $J_b = D^\times$ avec D une algèbre à division sur F, soit $J_b = G(\mathbb{Q}_p)$. Notons*

$$\mathrm{JL} : \mathrm{Irr}(J_b) \longrightarrow \mathrm{Irr}(G(\mathbb{Q}_p))$$

la correspondance de Jacquet-Langlands. Soit ${}^LG$ le L-groupe sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de G. Notons

$$\sigma_\ell : \mathrm{Cusp}(G(\mathbb{Q}_p)) \longrightarrow \{L\text{-}homomorphismes : W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow {}^LG\}/\sim$$

la correspondance de Langlands locale ([16], [17]*) restreinte aux représentations supercuspidales. Soit r_μ la représentation de ${}^LG_E$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ associée à μ. Soit π une représentation irréductible de J_b telle que $\mathrm{JL}(\pi)$ soit supercuspidale. Il y a alors une égalité dans le groupe de Grothendieck* $\mathrm{Groth}(G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)$

$$\sum_i (-1)^{i+\dim \mathcal{M}} \Big[\varinjlim_{K} \mathit{Hom}_{J_b}\big(H^i_c(\mathcal{M}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi\big) \Big]_{cusp} = [\mathrm{JL}(\pi)] \otimes [r_\mu \circ \sigma_\ell(\pi)_{|W_E}](\frac{\dim \mathcal{M}}{2}).$$

Dans le théorème précédent, la restriction concernant la forme intérieure de G, c'est à dire J_b est soit compact modulo le centre soit égale à $G(\mathbb{Q}_p)$, devrait maintenant pouvoir être levée dans le théorème précédent. En effet, les seules raisons d'être de cette hypothèse proviennent de l'utilisation de formules des traces en analyse harmonique et de l'utilisation de l'existence de type au sens de Bushnell Kutzko pour les représentations précédentes, la partie géométrique ne posant aucun problème lorsqu'on suppose que la forme intérieure de G est quelconque. De nombreux progrès on été fait depuis concernant la correspondance de Jacquet-Langlands, la formule des traces et l'existence de type pour les représentations des groupes classiques (cf. [3] par exemple).

Dans [F2] j'ai également démontré le théorème suivant.

Théorème 2 ([F2])**.** *Supposons que G soit un groupe de similitudes unitaires sur $\mathbb{Q}_p$ en trois variables associé à une extension quadratique $F|F^+$ avec $F|\mathbb{Q}_p$ non ramifiée. Supposons b basique et donc $J_b = G(\mathbb{Q}_p)$. Soit $\psi : W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow {}^LG$ un L-paramètre associé à un L-paquet supercuspidal $\Pi(\psi)$ de $G(\mathbb{Q}_p)$ ([23]). L'égalité suivante est alors vérifiée dans* $\mathrm{Groth}(G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)$

$$\sum_{\pi\in\Pi(\psi)} \sum_i (-1)^{i+\dim\mathcal{M}} \Big[\varinjlim_{K} \; Hom_{J_b}\big(H^i_c(\mathcal{M}_K\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi\big)\Big]_{cusp} = \sum_{\pi\in\Pi(\psi)} [\pi]\otimes[r_\mu\circ\psi_{|W_E}](\frac{\dim\mathcal{M}}{2}).$$

De nombreux progrès on été fait concernant la correspondances de Langlands locale pour les groupes unitaires en plus de trois variables (cf. [21] par exemple). Il est probable qu'en utilisant ces résultats on puisse étendre le théorème précédent aux groupes de similitudes unitaires en plus de trois variables (comme précédemment, la partie « géométrique »de la démonstration s'étend sans problème).

3. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld

3.1. **L'isomorphisme.** Soit F une extension de degré fini de $\mathbb{Q}_p$. Fixons un entier $n \geq 1$. Soit $(\mathcal{M}^{\mathcal{LT}}_K)_{K\subset GL_n(\mathbb{Z}_p)}$ la tour de Lubin-Tate. Elle est associée aux groupes $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}\mathrm{GL}_n$ et $J_b = D^\times$ où D est l'algèbre à division d'invariant $1/n$ sur centrale sur F. C'est une tour définie sur $\widehat{F^{nr}}$. Soit $(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r})_{K\subset\mathcal{O}_D^\times}$ la tour de Drinfeld. Les groupes correspondants associés sont obtenus par permutation par rapport au cas précédent, $G = D^\times$ et $J_b = \mathrm{GL}_n(F)$.

Dans [13] Faltings a proposé un plan de démonstration afin de démontrer l'existence d'un « isomorphisme en niveau infini »entre les deux tours précédentes compatible aux actions de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$. Dans [F4] je me suis proposé de mettre en forme les arguments de Faltings.

Comme on le constate en le décrivant au niveau des points, cet isomorphisme n'est pas un isomorphisme « algébrique »entre les tours. Plus précisément il existe des $\widehat{\overline{F^{nr}}}$-points de la tour de Lubin-Tate en niveau infini qui sont envoyés via cet isomorphisme sur des $\mathbb{C}_p$-points de la tour de Drinfeld qui ne sont pas dans $\widehat{\overline{F^{nr}}}$. Il s'agit en fait d'un isomorphisme entre « les complétés p-adiques des deux tours en niveau infini ». Les modèles entiers naturels de la tour de Drinfeld sont des schémas formels p-adiques (i.e. p engendre un idéal de définition), comme c'est par exemple le cas du schéma formel $\widehat{\Omega}$ de Drinfeld. Ce n'est pas le cas des modèles entiers naturels définis par Drinfeld de la tour de Lubin-Tate. Pour pouvoir donner un sens à un tel isomorphisme il faut tout d'abord « p-adifier la tour de Lubin-Tate ». Pour cela on utilise l'existence de domaines fondamentaux dans les espaces de Lubin-Tate (sans niveau) pour l'action des correspondances de Hecke en p. Ces domaines fondamentaux sont affinoïdes quasicompacts et possèdent donc naturellement des modèles entiers p-adiques affines normaux. Il s'agit du lieu où le polygone de Newton de la multiplication par p sur le groupe formel de dimension 1 est au dessus d'un certain polygone $\mathcal{P}_{GH}$ défini dans [18]. L'idée consiste alors à reconstruire cellulairement la tour de Lubin-Tate en niveau infini en utilisant ce domaine fondamental.

Soit $\mathcal{I}$ l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe $(\mathrm{GL}_{n/F} \times D^\times)/\mathbb{G}_m$ où $\mathbb{G}_m$ agit diagonalement via $x \mapsto (x, x^{-1})$. Je construis dans le chapitre I de [F4] un schéma formel p-adique muni d'une action de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$, cellulairement décomposé et dont les cellules sont paramétrées par les sommets de $\mathcal{I}$. Plus précisément soit $x \in \mathcal{I}$, $x = [\Lambda, M]$ où Λ est un réseau dans F^n et $M \subset D$ est un idéal fractionnaire. Il faut penser à Λ comme un réseau dans un module de Tate et M un réseau dans un module de Dieudonné (la multiplication par p sur le module de Tate ou le module de Dieudonné ayant le même effet cela explique pourquoi on prend l'immeuble de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ divisé par $\mathbb{G}_m$). Soit un sous-groupe ouvert $K \subset \mathrm{GL}_n(\Lambda)$. On construit un schéma formel p-adique affine topologiquement de type fini normal $\mathbb{D}_{x,K}$ sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\widehat{F^{nr}}})$ défini de façon modulaire. Si $\mathfrak{U}$ est un $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\widehat{F^{nr}}})$-schéma formel topologiquement de type fini sans p-torsion normal alors

$$\mathbb{D}_{x,K}(\mathfrak{U}) = \{(H, \rho, \eta)\}/\sim$$

où $(H,\rho) \in \widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT}}(\mathfrak{U})$,

$$\eta : \Lambda \longrightarrow T_p(H^{rig})[K]$$

est une structure de niveau K en fibre générique sur H, la hauteur de la quasi-isogénie ρ est $[\mathcal{O}_D : M]$ et le polygone de Newton de la multiplication par p sur le groupe formel de dimension 1, H, est au dessus du polygone $\mathcal{P}_{GH}$. On obtient ainsi une tour de schémas formels affines p-adiques à morphismes de transition finis (mais pas plats)

$$(\mathbb{D}_{x,K})_K$$

et on pose

$$\mathbb{D}_{x,\infty} := \varprojlim_K \mathbb{D}_{x,K}$$

(il s'agit de la limite projective dans la catégorie des schémas formels p-adiques). D'un point de vue analytique soit

$$\mathbb{D}_{x,K}^{rig} = \mathrm{Sp}(A_{x,K})$$

la fibre générique comme espace rigide de $\mathbb{D}_{x,K}$. L'algèbre affinoïde $A_{x,K}$ est une algèbre de Banach lorsqu'on la munie de la norme sup $\|.\|_\infty$. Pour $K' \subset K$ l'inclusion $A_{x,K} \subset A_{x,K'}$ est isométrique relativement aux normes $\|.\|_\infty$. Soit l'algèbre normée

$$A_{x,\infty} = \bigcup_K A_{x,K}$$

munie de la norme $\|.\|_\infty$. Alors

$$\mathbb{D}_{x,\infty} = \mathrm{Spf}\Big(\big(\widehat{A_{x,\infty}}\big)^0 \Big)$$

qui est le spectre formel de la boule unité de l'algèbre de Banach complétée de $A_{x,\infty}$ pour $\|.\|\infty$.

Il y a une notion d'arêtes orientées dans l'immeuble $\mathcal{I}$. Si $x \to y$ est une telle arête on définit par le même type de procédé un schéma formel p-adique

$$\mathbb{D}_{x\to y,\infty}$$

en imposant au polygone de Newton de la multiplication par p d'être dans le « bord »du domaine fondamental (on connaît exactement les relations d'incidence entre ce domaine fondamental et ses itérées sous les correspondances de Hecke). On montre qu'il est muni de deux immersions ouvertes

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{D}_{x,\infty} \\ \mathbb{D}_{x\to y,\infty} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\ & \mathbb{D}_{y,\infty} \end{tikzcd}$$

et on définit un schéma formel p-adique $\mathfrak{X}_\infty$ muni d'une action cellulaire de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ comme recollement du diagramme suivant

$$\coprod_{x\to y} \mathbb{D}_{x\to y,\infty} \rightrightarrows \coprod_x \mathbb{D}_{x,\infty} \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty.$$

La tour de Drinfeld $(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r})_{K\subset \mathcal{O}_D^\times}$ possède des modèles entiers p-adiques normaux canoniques. En effet, $\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{D}r}$ est un schéma formel p-adique (une union disjointe indexée par $\mathbb{Z}$ de schémas formels isomorphes au schéma formel $\widehat{\Omega}$ de Drinfeld). Il suffit alors pour $K \subset \mathcal{O}_D^\times$ de prendre comme modèle de $\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r}$ le normalisé $\widehat{\mathcal{M}}_K^{\mathcal{D}r}$ de $\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{D}r}$ dans $\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r}$ (on développe dans [F4] une « théorie de la normalisation »dans ce type de contexte). On pose alors

$$\mathfrak{Y}_\infty = \varprojlim_{K\subset \mathcal{O}_D^\times} \widehat{\mathcal{M}}_K^{\mathcal{D}r}$$

comme schéma formel p-adique muni d'une action de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$. Puisque $\widehat{\Omega}$ possède une décomposition cellulaire associée à l'immeuble de $\mathrm{PGL}_{n/F}$ le schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{D}r}$ possède une décomposition cellulaire paramétrée par l'immeuble de $(\mathrm{GL}_{n/F} \times D^\times)/\mathbb{G}_m$ (cette fois ci les réseaux dans F^n paramètrent des réseaux dans le module de Dieudonné et ceux dans D des réseaux dans le module de Tate) (en fait il s'agit d'une décomposition cellulaire indexée par le complexe simplicial dual du complexe considéré pour la tour de Lubin-Tate, les cellules étant paramétrées par les simplexes maximaux de l'immeuble et non les sommets comme précédemment). On peut alors donner une construction de $\mathfrak{Y}_\infty$ par recollement de cellules affines en niveau infini comme dans le cas de la tour de Lubin-Tate.

Le théorème principal de [F4] s'énonce alors ainsi.

Théorème 3 ([F4])**.** *Il existe des « éclatements formels admissibles »$GL_n(F) \times D^\times$-équivariants $\widetilde{\mathfrak{X}}_\infty \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty$ et $\widetilde{\mathfrak{Y}}_\infty \longrightarrow \mathfrak{Y}_\infty$ et un isomorphisme*

$$\widetilde{\mathfrak{X}}_\infty \simeq \widetilde{\mathfrak{Y}}_\infty$$

qui est compatible à l'action de $GL_n(F) \times D^\times$ lorsque l'on tord celle-ci par l'involution $(g, d) \mapsto ({}^t g, d^{-1})$.

Les éclatements précédents sont dus à deux phénomènes :

- Les décomposition cellulaires des schémas formels $\mathfrak{X}_\infty$ et $\mathfrak{Y}_\infty$ ne se correspondent pas dans l'isomorphisme précédent, il faut « subdiviser les simplexes », i.e. éclater, afin qu'elles se correspondent.
- La construction de l'isomorphisme utilise des applications de périodes de deux nature. Il y a tout d'abord les applications de périodes liées au périodes de Grothendieck-Messing (l'application qui à un φ-module filtré associe le module filtré associé)([18] et [22]) qui est l'analogue du plongement $X \hookrightarrow \check{X}$ d'un domaine hermitien symétrique dans son dual compact. On utilise ensuite des applications de périodes de Hodge-Tate. Or, en général, ces deux type d'applications de périodes ne sont définies qu'après inversion de p, il faut donc éclater pour les rendre entières (le fait que cela soit possible constitue la partie la plus technique de la preuve).

3.2. **Applications cohomologiques.** Il s'agit du chapitre IV de [F4] qui est complètement original par rapport à [13].

3.2.1. *Une correspondances de Jacquet-Langlands géométrique.* Soit X un espace analytique de Berkovich. Soit G un groupe topologique et supposons X muni d'une action continue de G (cf. [6] pour la notion d'action continue sur un espace analytique de Berkovich). Si

$$U \longrightarrow X$$

est un morphisme quasi-étale avec U compact il existe un sous-groupe ouvert K de G ainsi qu'un relèvement de l'action de K sur X à U, pour $g \in K$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{g} & X. \end{array}$$

Cela résulte essentiellement du théorème d'approximation d'Elkik. De plus deux tels relèvements de l'action coïncident sur des sous-groupes plus petit. On dispose donc canoniquement d'un « germe de relèvements sur des sous-groupes ouverts de G suffisamment petits »de l'action de G sur X à U. Maintenant si $\mathcal{F}$ est un faisceau étale sur X muni d'une action de G compatible à l'action de G sur X et $U \longrightarrow X$ est comme précédemment, pour tout relèvement de l'action d'un sous-groupe ouvert K de G comme précédemment, $\mathcal{F}(U)$ est muni d'une action de K. Ainsi $\mathcal{F}(U)$ est muni d'un « germe d'action de sous-groupes ouverts suffisamment petits de G ».

La définition suivante est due à Vladimir Berkovich (notes non publiées, on renvoie au chapitre IV de [F4]).

Définition 1 (Berkovich, cf. chapitre IV de [F4])**.** *Le G-faisceau étale $\mathcal{F}$ sur X est lisse si pour tout $U \longrightarrow X$ quasi-étale avec U compact, le germe d'action de sous-groupes ouverts de G sur $\mathcal{F}(U)$ défini précédemment est lisse (i.e. le stabilisateur d'un élément est ouvert). On note*

$$(X/G)^{\sim}_{\infty}$$

la catégorie des G-faisceaux lisses.

On démontre dans le chapitre IV de [F4] que cette catégorie est un topos.

Théorème 4 ([F4])**.** *Soit S l'espace analytique associé à la variété de Severi-Brauer sur F définie par l'algèbre à division D. Soit Ω l'espace analytique de Drinfeld sur F. Il y a une équivalence de topos*

$$\mathrm{JL} : (S/D^{\times})^{\sim}_{\infty} \xrightarrow{\sim} (\Omega/GL_n(F))^{\sim}_{\infty}.$$

Expliquons comment on en est arrivé à deviner l'énoncé du théorème précédent (j'ai bénéficié pour cela de discussions avec Jean-François Dat). Pour l'espace de Lubin-Tate il y a une application des périodes définie et étudiée par Gross et Hopkins dans [18] (cf. [22] également où ce type d'application des périodes est définie en toute généralité)

$$\pi : (\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT}})^{an} = \mathcal{M}^{\mathcal{LT}}_{GL_n(\mathcal{O}_F)} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}_{/\widehat{F^{nr}}}.$$

C'est un morphisme étale surjectif d'espaces analytiques de fibres les orbites de Hecke. On a donc un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^{\mathcal{LT}}_{\infty} \arrow[d] \arrow[d, bend left=60, dotted, "\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)"] \arrow[dd, bend right=60, dotted, "\mathrm{GL}_n(F)"'] \\
\mathcal{M}^{\mathcal{LT}}_{GL_n(\mathcal{O}_F)} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{P}^{n-1}
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{M}^{\mathcal{LT}}_{\infty}$ désigne la tour de Lubin-Tate « en niveau infini ». On peut donc penser à l'espace des périodes $\mathbb{P}^{n-1}$ comme le quotient de la tour de Lubin-Tate en niveau infini par l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$ (i.e. l'action des correspondances de Hecke)

$$\text{« } \mathcal{M}^{\mathcal{LT}}_{\infty}/\mathrm{GL}_n(F) = \mathbb{P}^{n-1} \text{ ».}$$

Il y a un même diagramme du coté de la tour de Drinfeld

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}_{\infty} \arrow[d] \arrow[d, bend left=60, dotted, "\mathcal{O}_D^{\times}"] \arrow[dd, bend right=60, dotted, "D^{\times}"'] \\
\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}_{\mathcal{O}_D^{\times}} \arrow[d, "\pi"] \\
\Omega
\end{tikzcd}$$

où la structure de l'application des périodes π est nettement plus simple que dans le cas de la tour de Lubin-Tate car dans ce cas π est un isomorphisme en restriction à chaque composante connexe de $\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}_{\mathcal{O}_D^{\times}}$.

L'isomorphisme équivariant

$$\mathcal{M}^{\mathcal{LT}}_{\infty} \simeq \mathcal{M}^{\mathcal{D}r}_{\infty}$$

devrait donc moralement induire un « isomorphisme de champs »

$$\left[D^{\times}\backslash\mathbb{P}^{n-1}\right] = \left[\mathrm{GL}_n(F) \times D^{\times}\backslash\mathcal{M}^{\mathcal{LT}}_{\infty}\right] \simeq \left[\mathrm{GL}_n(F) \times D^{\times}\backslash\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}_{\infty}\right] = \left[\mathrm{GL}_n(F)\backslash\Omega\right].$$

Les deux « champs » $\left[D^{\times}\backslash\mathbb{P}^{n-1}\right]$ et $\left[\mathrm{GL}_n(F)\backslash\Omega\right]$ devraient être des champs classifiant des groupes p-divisibles à isogénies près. On ne sait pas donner de sens à ces champs mais cependant on sait définir ce que sont les faisceaux sur ceux-ci, ce sont les faisceaux équivariants sur $\mathbb{P}^{n-1}$ et Ω. Le fait qu'il faille rajouter la condition de lissité de l'action provient du fait que l'on a procédé à des descentes galoisiennes infinies associée à des groupes profinis comme $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ et $\mathcal{O}_D^\times$ et qu'il faut pour cela ajouter des conditions de continuité des cocyles de descente associés.

3.2.2. *Faisceaux Hecke équivariants.* Pour une tour quelconque d'espaces de Rapoport-Zink $(\mathcal{M}_K)_{K\subset\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)}$ il y a une bonne notion de faisceaux Hecke équivariants munis d'une action lisse de J_b sur la tour $(\mathcal{M}_K)_{K\subset\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)}$. Il s'agit de systèmes de faisceaux $(\mathcal{F}_K)_{K\subset\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)}$ où $\mathcal{F}_K \in (\mathcal{M}_K/J_b)^{\sim}_{\infty}$,

- qui sont munis d'isomorphismes de compatibilité
$$\Pi^*_{K',K}\mathcal{F}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{K'}$$
pour $K' \subset K$ et où
$$\Pi_{K',K} : \mathcal{M}_{K'} \longrightarrow \mathcal{M}_K$$
désigne l'application de changement de niveau,
- qui sont munis d'isomorphismes
$$g^*\mathcal{F}_{g^{-1}Kg} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_K$$
pour $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ et $K \subset \mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$ tels que $g^{-1}Kg \subset \mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$ où
$$g : \mathcal{M}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{g^{-1}Kg},$$
- tels que les isomorphismes précédents se composent naturellement i.e. certaines conditions de cocyles sont vérifiées.

De façon plus abstraite, soit $\mathcal{S}$ la catégorie dont les objets sont les sous-groupes ouverts de $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$ et
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(K,K') = \{\bar{g} \in K\backslash G(\mathbb{Q}_p)/K' \mid g^{-1}Kg \subset K'\}$$
avec
$$\bar{g} \circ \bar{g'} = \overline{g'g}.$$
La tour $(\mathcal{M}_K)_{K\subset\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)}$ munie de ses différentes actions définit un foncteur
$$\begin{array}{ccl} \mathcal{S} & \longrightarrow & \text{espaces analytiques munis d'une action continue de } J_b \\ K & \longmapsto & \mathcal{M}_K. \end{array}$$
Cela définit un topos fibré au dessus de $\mathcal{S}$
$$K \longmapsto (\mathcal{M}_K/J_b)^{\sim}_{\infty}.$$

Définition 2. *La catégorie des faisceau de Hecke muni d'une action lisse de J_b sur la tour $(\mathcal{M}_K)_K$ est la catégorie des sections cartésiennes du topos fibré*
$$\mathcal{S} \ni K \longmapsto (\mathcal{M}_K/J_b)^{\sim}_{\infty}$$

Théorème 5 ([F4])**.** *Soit $\pi : \mathcal{M}^{\mathcal{LT}}_{GL_n(\mathcal{O}_F)} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ l'application des périodes de Gross-Hopkins et pour $K \subset GL_n(\mathcal{O}_F)$, $\Pi_{K,GL_n(\mathcal{O}_F)} : \mathcal{M}^{\mathcal{LT}}_K \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{LT}}_{GL_n(\mathcal{O}_F)}$ l'application de changement de niveaux.*

Le foncteur
$$\begin{array}{ccl} \left(\mathbb{P}^{n-1}/D^\times\right)^{\sim}_{\infty} & \longrightarrow & \textit{faisceaux de Hecke } D^\times\textit{-équivariants lisses sur la tour de Lubin-Tate} \\ \mathcal{F} & \longmapsto & \left((\pi\circ\Pi_{K,GL_n(\mathcal{O}_F)})^*\mathcal{F}\right)_{K\subset GL_n(\mathcal{O}_F)} \end{array}$$
induit une équivalence de catégories.

De même, si $\pi : \mathcal{M}^{\mathcal{D}r}_{\mathcal{O}_D^\times} \longrightarrow \Omega$ désigne l'application des périodes, le foncteur
$$\begin{array}{ccl} \left(\Omega/GL_n(F)\right)^{\sim}_{\infty} & \longrightarrow & \textit{faisceaux de Hecke } GL_n(F)\textit{-équivariants lisses sur la tour de Drinfeld} \\ \mathcal{F} & \longmapsto & \left((\pi\circ\Pi_{K,\mathcal{O}_D^\times})^*\mathcal{F}\right)_{K\subset\mathcal{O}_D^\times} \end{array}$$
induit une équivalence de catégories.

3.2.3. *Isomorphisme des complexes de cohomologie.* Soit $k \geq 1$ un entier et $\ell \neq p$ un nombre premier. Si $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_K)_K$ est un faisceau de Hecke de $\mathbb{Z}/\ell^k\mathbb{Z}$-modules J_b-équivariants lisses sur la tour de Rapoport-Zink $(\mathcal{M}_K)_K$ on peut définir son complexe de cohomologie lisse à support compact

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \mathcal{F}) \in \mathbb{D}^b\big(\mathbb{Z}/\ell^k\mathbb{Z}[G(\mathbb{Q}_p) \times J_b \times I_E]_\infty\big)$$

dont la cohomologie est la représentation de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times \times I_E$

$$\varinjlim_K \; H_c^\bullet(\mathcal{M}_K\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \mathcal{F}_K).$$

On peut étendre cela aux faisceaux de Hecke munis d'une donnée de descente de $\widehat{F^{nr}}$ à F.

On peut alors définir d'après le théorème 5, pour $\mathcal{F} \in (S/D^\times)^{\sim}_\infty$, resp. $\mathcal{G} \in (\Omega/\mathrm{GL}_n(F))^{\sim}_\infty$, des faisceaux de $\mathbb{Z}/\ell^k\mathbb{Z}$-modules,

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathcal{LT}}\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \mathcal{F}), R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \mathcal{G}) \in \mathbb{D}^b\big(\mathbb{Z}/\ell^k\mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times \times W_E]_\infty\big).$$

Théorème 6 ([F4])**.** *Soit $\mathcal{F} \in (S/D^\times)^{\sim}_\infty$. Soit $\dagger$ l'involution de $GL_n(F)$ donnée par $g \mapsto {}^tg^{-1}$. Il y a un isomorphisme*

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathcal{LT}}\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \mathcal{F})^\dagger \simeq R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \mathrm{JL}(\mathcal{F})).$$

En particulier,

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathcal{LT}}\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \mathbb{Z}/\ell^k\mathbb{Z})^\dagger \simeq R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \mathbb{Z}/\ell^k\mathbb{Z}).$$

D'après les travaux de Pascal Boyer ([8]) on connaît complètement la cohomologie de la tour de Lubin-Tate. Le théorème précédent implique que l'on connaît donc la cohomologie de la tour de Drinfeld.

La raison pour laquelle nous avons formulé et démontré le théorème précédent en termes de complexes de cohomologie équivariants plutôt que de groupes de cohomologie est que sous sa forme précédente le théorème 6 a été utilisé par Jean-François Dat dans [10]. Ils lui ont en particulier permis de démontrer la conjecture de monodromie poids pour les variétés de Shimura uniformisées par des espaces de Drinfeld.

4. Description de l'isomorphisme entre les deux tours au niveau des squelettes et ramification des groupes de Lubin-Tate

On décrit ici les résultats de l'article [F3].

4.1. Énoncé du problème.

Si $(\mathcal{M}_K)_K$ est une tour d'espaces de Rapoport-Zink considérons la tour d'espaces topologiques localement compacts munis d'une action continue de J_b

$$\big(|\mathcal{M}_K|\big)_K.$$

Cette tour d'espaces topologiques est munie d'une action de $G(\mathbb{Q}_p)$ comme précédemment. Si $K' \subset K$ l'application continue de changement de niveau

$$|\mathcal{M}_{K'}| \longrightarrow |\mathcal{M}_K|$$

est propre à fibres finies. Si de plus $K' \lhd K$ alors

$$|\mathcal{M}_K| = |\mathcal{M}_{K'}|/(K/K')$$

(on prendra garde que l'application continue $|\mathcal{M}_{K'}| \longrightarrow |\mathcal{M}_K|$ n'est pas alors un revêtement topologique de groupes K/K').

Posons

$$|\mathcal{M}_\infty| := \varprojlim_K \; |\mathcal{M}_K|$$

qui est un espace topologique localement compact muni d'une action de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b$. Ainsi, bien qu'on ne sache pas en général définir l'espace $\mathcal{M}_\infty$, on sait définir ce que devrait être l'espace topologique sous-jacent. On peut également vérifier que pour $K \subset \mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$ un sous-groupe ouvert l'application naturelle $|\mathcal{M}_\infty| \xrightarrow{\sim} |\mathcal{M}_K|$ induit un homéomorphisme

$$|\mathcal{M}_\infty|/K \xrightarrow{\sim} |\mathcal{M}_K|.$$

Soit $(\mathcal{M}_K^{\mathcal{LT}})_{K\subset GL_n(\mathcal{O}_F)}$, resp. $(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r})_{K\subset \mathcal{O}_D^\times}$, la tour de Lubin-Tate, resp. de Drinfeld. On peut montrer que l'isomorphisme du théorème 3 induit un homéomorphisme

$$|\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT}}| \xrightarrow{\sim} |\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}|$$

compatible à l'action de $\mathrm{GL}_n(F)\times D^\times$ (pour montrer l'existence d'une bijection compatible à l'action de $\mathrm{GL}_n(F)\times D^\times$ entre ces deux ensembles il n'est pas nécessaire d'invoquer le théorème 3, seule la description de l'isomorphisme au niveau des points telle que décrite dans le chapitre II de [F4] est nécessaire). Celui-ci induit un homéomorphisme

$$|(\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]})^{an}|/\mathcal{O}_D^\times = |\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT}}|/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)\times D^\times \xrightarrow{\sim} |\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}|/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)\times D^\times = |\Omega|/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$$

où

$$\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT}} = \coprod_{i\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[i]}$$

est la décomposition suivant la hauteur de la quasi-isogénie universelle. Ainsi, $\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]}$ est ce qu'on appelle « classiquement »l'espace de Lubin-Tate. Il y a donc une application continue $\mathcal{O}_D^\times$-invariante

$$|(\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]})^{an}| \longrightarrow |\Omega|/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$$

Celle-ci admet la description élémentaire suivante. Soit $K|\widehat{F^{nr}}$ une extension valuée complète pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$ étendant la valuation p-adiques. On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Soit

$$(H,\rho)\in(\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]})^{an}(K) = \widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]}(\mathcal{O}_K).$$

En particulier H est un groupe formel p-divisible de dimension 1 et hauteur n sur $\mathcal{O}_K$ muni d'une action de $\mathcal{O}_F$. Considérons l'application de Hodge-Tate de $H^\vee$

$$\alpha_{H^\vee} : T_p(H^\vee) \longrightarrow \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}$$

où $T_p(H^\vee)$ s'identifie au dual du $\mathcal{O}_F$-module $T_p(H)$ tordu par le caractère de Lubin-Tate de F (lorsque $F=\mathbb{Q}_p$, $H^\vee$ est le dual de Cartier de H, en général lorsque $F\neq\mathbb{Q}_p$ il faut recourir à [12] pour définir un tel dual). Après choix d'une base de $T_p(H)$ qui fournit une base duale de $T_p(H)^*$ et une trivialisation du caractère de Lubin-Tate (un isomorphisme $\mathbb{Z}_p(1)\simeq\mathbb{Z}_p$ lorsque $F=\mathbb{Q}_p$) cela induit un morphisme

$$\mathcal{O}_F^n \longrightarrow \omega_H\otimes\mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}$$

et après inversion de p un morphisme F-linéaire

$$F^n \longrightarrow \omega_H\otimes\mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}[\tfrac{1}{p}].$$

On montre que cela définit un élément de $\Omega(\widehat{\overline{K}})\subset\mathbb{P}^{n-1}(\widehat{\overline{K}})$ et donc un élément de $|\Omega|$. Le choix d'une base différente de $T_p(H)$ induit un élément translaté sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ dans Ω. On a donc un élément bien défini

$$\mathrm{HT}(H)\in|\Omega|/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F).$$

Cela définit donc pour tout K une application

$$(\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]})^{an}(K) \longrightarrow |\Omega|/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$$

dont on vérifie qu'elle se factorise en une application

$$\mathrm{HT} : |(\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]})^{an}| \longrightarrow |\Omega|/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F).$$

Vladimir Berkovich a défini dans [4] une rétraction $\mathrm{GL}_n(F)$-équivariante de Ω sur la réalisation géométrique de l'immeuble de Bruhat-Tits

$$r : |\Omega| \longrightarrow |\mathcal{I}(\mathrm{PGL}_{n/F})|.$$

Il y a donc une application

$$r\circ\mathrm{HT} : |(\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]})^{an}| \longrightarrow |\mathcal{I}(\mathrm{PGL}_{n/F})|/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F).$$

Le problème est alors de décrire concrètement cette application. Pour cela remarquons que si Q est un quartier de l'immeuble (une chambre vectorielle dans un appartement) d'origine la classe du réseau $\mathcal{O}_F^n$ l'application naturelle

$$Q \xrightarrow{\sim} |\mathcal{I}(\mathrm{PGL}_{n/F})|/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$$

est un homéomorphisme (au niveau des sommets il ne s'agit rien d'autre que de la décomposition de Cartan). L'espace topologique Q s'identifie à

$$\{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_1 \geq \cdots \geq t_n\}/\mathbb{R}$$

où $\mathbb{R}$ agit diagonalement par translations sur les n-uplets.

Il y a de plus un isomorphisme non canonique

$$\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]} \simeq \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\widehat{F^{nr}}}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]).$$

Après choix d'un tel système de coordonnées formelles sur l'espace des déformations $\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]}$ cela induit une identification

$$(\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]})^{an} \xrightarrow{\sim} \mathring{\mathbb{B}}^{n-1}(0,1).$$

La formulation finale du problème est alors la suivante :

Existe-t-il un bon système de coordonnées sur l'espace de Lubin-Tate $\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]}$, c'est à dire sur la boule $|\mathring{\mathbb{B}}^{n-1}(0,1)|$, dans lequel on puisse décrire l'application induite $|\mathring{\mathbb{B}}^{n-1}(0,1)| \longrightarrow Q$ et en particulier la structure simpliciale induite par celle de l'immeuble sur la boule ouverte ?

4.2. **Ramification des groupes de Lubin-Tate.**

4.2.1. *Ramification inférieure.* Afin de résoudre le problème précédent je me suis intéressé à la ramification des groupes de Lubin-Tate. Soit donc $K|F$ une extension valuée complète pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K.

Soit H un groupe p-divisible formel de dimension 1 sur $\mathcal{O}_K$ de hauteur $n[F:\mathbb{Q}_p]$ muni d'une action de $\mathcal{O}_F$ et tel que l'action induite sur $\mathrm{Lie}\, H$ soit l'action canonique. Notons $\widehat{H}$ le groupe formel associé à H.

Après avoir fixé un isomorphisme de $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$-schémas formels pointés

$$\widehat{H} \simeq \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K[\![T]\!]),$$

où le membre de gauche est pointé par la section neutre du groupe formel et celui de droite par la section $T = 0$, il y a une identification

$$\widehat{H}(\mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}) \simeq \mathfrak{m}_{\widehat{\overline{K}}}.$$

Il y a alors une fonction « valuation »

$$v : \widehat{H}(\mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}) \longrightarrow]0, +\infty].$$

qui via l'identification précédente est la fonction valuation d'un élément de $\mathfrak{m}_{\widehat{\overline{K}}}$ (et on vérifie aussitôt que cela ne dépend pas du choix de la coordonnée sur $\widehat{H}$ fait précédemment).

Par restriction aux points de torsion de $\widehat{H}(\mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}})$ cela définit une fonction valuation sur les points de torsion. On encode cette fonction valuation des points de torsion en définissant une fonction valuation sur le module de Tate rationnel

$$V_p(H) = \{(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mid x_k \in \widehat{H}(\mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}),\ \pi x_{k+1} = x_k,\ x_k = 0 \text{ pour } k \ll 0\}$$

$$\begin{array}{rcl} v : V_p(H) & \longrightarrow &]0, +\infty] \\ (x_k)_k & \longmapsto & v(x_0). \end{array}$$

Je définis alors une filtration de ramification inférieure sur le module de Tate en posant pour $\lambda \in]0, +\infty]$,

$$\mathrm{Fil}_\lambda V_p(H) = \{x \in V_p(H) \mid v(x) \geq \lambda\}.$$

On montre qu'il s'agit d'une filtration décroissante par réseaux de $V_p(H)$. On a par exemple $\mathrm{Fil}_\infty V_p(H) = T_p(H)$. On montre de plus que les sauts de cette filtration sont discrets dans $]0,+\infty]$ et s'accumulent en 0. Via l'identification

$$V_p(H)/T_p(H) = \widehat{H}[p^\infty](\mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}) = H(\mathcal{O}_{\overline{K}})$$

on a

$$\mathrm{Fil}_\lambda V_p(H)/\mathrm{Fil}_\infty V_p(H) = \{x \in \widehat{H}[p^\infty](\mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}) \mid v(x) \geq \lambda\}.$$

La donnée de la filtration précédente du module de Tate est donc équivalente à celle de la donnée de la filtration des points de torsion.

Si Λ est un réseau de $V_p(H)$ notons $[\Lambda]$ sa classe d'homothétie i.e. le sommet associé de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}(V_p(H))$.

Proposition 1 ([F3])**.** *Pour $\lambda > 0$ proche de 0 la filtration de ramification inférieure vérifie la relation de périodicité suivante :*

$$\mathrm{Fil}_{\frac{\lambda}{q^n}} V_p(H) = \pi_F^{-1}\mathrm{Fil}_\lambda V_p(H).$$

En particulier

$$X = \{[\mathrm{Fil}_\lambda V_p(H)] \mid \lambda \in]0,+\infty]\}$$

est un ensemble fini de sommets de l'immeuble. De plus la chaîne de réseaux

$$\big(\mathrm{Fil}_\lambda V_p(H)\big)_{\lambda>0,\ \lambda\ petit}$$

définit un simplexe S de l'immeuble.

Théorème 7 ([F3])**.** *L'ensemble fini X est contenu dans un appartement de l'immeuble de $\mathrm{PGL}(V_p(H))$ et même dans un quartier de sommet $[T_p(H)]$.*

Théorème 8 ([F3])**.** *Si A et B sont deux sous-ensembles de sommets de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}(V)$ notons*

$$A \vee B = \{[\Lambda + \Lambda'] \mid [\Lambda] \in A,\ [\Lambda'] \in B\}.$$

Alors le simplexe S de la proposition précédente ainsi que le sommet $[T_p(H)] = [\mathrm{Fil}_\infty V_p(H)]$ déterminent complètement l'ensemble X,

$$X = S \vee \{[T_p(H)]\}.$$

En particulier, X est contenu dans l'enclos de $S \cup \{[T_p(H)]\}$.

4.2.2. *Ramification supérieure.* Soit G un sous-schéma en groupes fini et plat de H. La fonction valuation précédente définit une filtration de $G(\mathcal{O}_{\overline{K}})$

$$\big(\{x \in G(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \mid v(x) \geq \lambda\}\big)_{\lambda \in]0,+\infty]}$$

invariante sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ et donc une filtration du groupe étale fibre générique $G \otimes K$ ou de façon équivalente, par adhérence schématique, une filtration de ramification inférieure de G par des sous-schémas en groupes finis et plats sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$,

$$(G_\lambda)_{\lambda \in]0,+\infty]}.$$

De plus si $G' \subset G$ est un sous-schéma en groupes fini et plat la filtration précédente de G détermine celle de G',

$$G'_\lambda \otimes K = G' \otimes K \cap G_\lambda \otimes K.$$

Ce type de filtration est donc compatible à la restriction à un sous-groupe, c'est pourquoi on l'appelle filtration de ramification inférieure. La filtration du module de Tate précédente se caractérise alors par l'égalité

$$\mathrm{Fil}_\lambda V_p(H)/T_p(H) = \bigcup_{k \geq 1} H[\pi^k]_\lambda(\mathcal{O}_{\overline{K}})$$

Abbes et Saito ([1]) on défini en toute généralité des filtrations de ramification supérieures des schémas en groupes finis et plats sur un anneau de valuation d'inégales caractéristiques. Celles-ci sont compatibles non plus à la restriction à un sous-groupe mais au quotient par un sous-groupe.

Dans le cas des sous-schémas en groupes finis et plats $G \subset H$ cette filtration admet la description suivante. Soit

$$\begin{aligned} \eta : [0,+\infty[&\longrightarrow [0,+\infty[\\ s &\longmapsto \int_0^s |G_\lambda(\mathcal{O}_{\overline{K}})|\, d\lambda \end{aligned}$$

et la fonction de Herbrand $\psi = \eta^{-1}$. On pose alors

$$G^\lambda := G_{\psi(\lambda)}$$

et on vérifie que cela coïncide bien avec la définition d'Abbes et Saito (cf. appendice de [F3]).

Si $k \geq 1$ le morphisme

$$H[p^{k+1}]^\lambda \xrightarrow{\times \pi} H[p^k]^\lambda$$

est un épimorphisme. On pose alors pour $\lambda \in]0,+\infty[$

$$\mathrm{Fil}^\lambda V_p(H) = \varprojlim_{k\geq 1} H[\pi^k]^\lambda(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \subset \varprojlim_{k\geq 1} H[\pi^k](\mathcal{O}_{\overline{K}}) = T_p(H).$$

Proposition 2 ([F3]). *La filtration* $(\mathrm{Fil}^\lambda V_p(H))_{\lambda\in]0,+\infty[}$ *forme une filtration décroissante de* $V_p(H)$ *par des réseaux. Pour* $\lambda > 0$, λ *petit on a* $\mathrm{Fil}^\lambda V_p(H) = T_p(H)$ *et les sauts de cette filtration sont discrets dans* $]0,+\infty[$.
Pour $\lambda \gg 0$ *la filtration vérifie la relation de périodicité suivante,*

$$\mathrm{Fil}^{\lambda+1} V_p(H) = \pi \mathrm{Fil}^\lambda V_p(H)$$

En particulier cette filtration définit un ensemble fini dans l'immeuble

$$Y = \{[\mathrm{Fil}^\lambda V_p(H)] \mid \lambda > 0\}$$

et un simplexe T *associé à la chaîne de réseaux* $(\mathrm{Fil}^\lambda V_p(H))_{\lambda\gg 0}$.

Théorème 9 ([F3]). *Les simplexes* S *défini par la filtration de ramification inférieure (cf. proposition 1) et* T *défini par la filtration supérieure coïncident.*

Si A *et* B *sont deux sous-ensembles de sommets de l'immeuble de Bruhat-Tits de* $\mathrm{PGL}(V)$ *notons*

$$A \wedge B = \{[\Lambda \cap \Lambda'] \mid [\Lambda] \in A,\ [\Lambda'] \in B\}$$

Alors l'ensemble des sommets de l'immeuble parcourus par la filtration de ramification supérieure est égale à

$$Y = [T_p(H)] \wedge T.$$

En particulier la connaissance de $[T_p(H)]$ *et de* S *détermine complètement les sommets parcourus par les filtrations de ramification supérieures et inférieures.*

4.3. **Filtration de ramification et point de Hodge-Tate dans l'immeuble.** Soit H comme précédemment sur $\mathcal{O}_K$ et $\mathrm{HT}(H) \in |\Omega| \subset |\mathbb{P}(V_p(H))|$ le point défini par l'application de Hodge-Tate du dual de H. La réalisation géométrique de l'immeuble de $\mathrm{PGL}(V_p(H)^*)$ s'identifie aux classes d'équivalences (à translation près) de normes additives sur $V_p(H)^*$. Après choix d'un isomorphisme $\omega_H \simeq \mathcal{O}_K$ la norme additive associée à $\mathrm{HT}(H)$ est donnée par la valuation de l'application de Hodge-Tate

$$\|.\|_{HT(H)} : V_p(H)^* \simeq V_p(H^\vee) \xrightarrow{\alpha_{H^\vee}} \omega_H \otimes \widehat{\overline{K}} \simeq \widehat{\overline{K}} \xrightarrow{v} \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Le théorème qui suit détermine le point de l'immeuble de Bruhat-Tits associé à l'application de Hodge-Tate en fonction de la filtration de ramification supérieure.

Théorème 10 ([F3]). *Pour* $\lambda > 0$ *soit* $\|.\|^\lambda$ *la norme sur* $V_p(H)^*$ *associée au réseau* $\mathrm{Fil}^\lambda V_p(H)^\vee$ *dual du réseau* $\mathrm{Fil}^\lambda V_p(H)$. *Pour* $\lambda \gg 0$ *il existe une constante* C *telle que pour* $v \in V_p(H)^*$ *on ait*

$$\|v\|_{\mathrm{HT}(H)} = \frac{q}{q-1} \int_{\lambda-1}^{\lambda} q^{\|v\|^\mu - \|v\|^\lambda}\, d\mu + \|v\|^\lambda + C$$

On peut alors localiser le point de l'immeuble associé à l'application de Hodge-Tate de H de la façon suivante.

Théorème 11 ([F3]). *Soit* $[\|.\|_{\mathrm{HT}}] \in |\mathcal{I}(\mathrm{PGL}(V_p(H)^*))|$ *la classe d'équivalence de la norme* $\|.\|_{\mathrm{HT}}$. *Soit S le simplexe associé aux filtrations de ramification. (cf. proposition 1). Alors,*

$$[\|.\|_{\mathrm{HT}}] \in |S^\vee|,$$

la réalisation géométrique du simplexe dual $S^\vee$ de S.

4.4. **Description de l'isomorphisme au niveau des squelettes.** On en vient maintenant à la question posée dans la section 4.1.

Définition 3. *On note $\mathcal{N}ewt$ l'ensemble des fonctions continues convexes $\mathcal{P} : [1, q^n] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant*
- $\mathcal{P}(1) = 1,\ \mathcal{P}(q^n) = 0$
- $\mathcal{P}(x) > 0$ *lorsque* $1 \leq x < q^n$
- $\mathcal{P}$ *est affine sur les segments* $[q^i, q^{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$.

La donnée d'un polygone dans $\mathcal{N}ewt$ est équivalente à la donnée de n-nombres réels

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$$

vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n} (q^i - q^{i-1})\lambda_i = 1.$$

À un polygone on associe ses pentes sur les segments $[q^i, q^{i-1}]$, $1 \leq i \leq n$.

Soit $K|F$ une extension valuée complète pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$ étendant la valuation normalisée de F. Soit H un groupe de Lubin-Tate sur $\mathcal{O}_K$ de F-hauteur n. Après avoir fixé un isomorphisme de schémas formels pointés $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K[\![T]\!]) \xrightarrow{\sim} \widehat{H}$, c'est à dire une loi de groupe formel associée à $\widehat{H}$, la multiplication par π sur $\widehat{H}$ est donnée par une série formelle dans $\mathcal{O}_K[\![T]\!]$. Le polygone de Newton de cette série formelle est par définition le polygone de Newton de la multiplication par π sur H. Ses pentes $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ sont les valuations des éléments de π-torsion de $\widehat{H}(\mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}})$. Elles correspondent aux sauts de la filtrations de ramification inférieure $(H[\pi]_\lambda)_\lambda$.

On vérifie que cela définit une application continue

$$|(\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]})^{an}| \longrightarrow \mathcal{N}ewt.$$

On peut rendre cette application concrète de la façon suivante. Il existe un système de coordonnées sur la boule

$$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\widehat{F^{nr}}}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]}$$

tel que si H^{univ} désigne le groupe p-divisible sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\widehat{F^{nr}}}[\![x_1, \ldots, x_{n-1}]\!])$ associé à la déformation universelle sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\widehat{F^{nr}}}[\![x_1, \ldots, x_{n-1}]\!])$, la stratification de Newton associée à la réduction modulo p de H^{univ} soit donnée par

$$V(x_1, \ldots, x_{n-1}) \subset V(x_1, \ldots, x_{n-2}) \subset \cdots \subset V(x_1) \subset \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q[\![x_1, \ldots, x_{n-1}]\!]).$$

Dans un tel système de coordonnées le polygone de Newton de $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathring{\mathbb{B}}^{n-1}(0,1)$ est donnée par l'enveloppe convexe des points

$$(1,1), (q, v(x_1)), (q^2, v(x_2)), \ldots, (q^{n-1}, v(x_{n-1})), (q^n, 0).$$

Cela donne donc une description de l'application continue

$$|\mathring{\mathbb{B}}^{n-1}(0,1)| \xrightarrow{\sim} |(\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]})^{an}| \longrightarrow \mathcal{N}ewt.$$

Cela montre également que cette application est propre.

Définition 4. *Soit $\mathcal{P} \in \mathcal{N}ewt$ un polygone de pentes $\lambda_1 \geq \ldots \lambda_n$. Pour $1 \leq i \leq n$ on définit une suite $(\lambda_i^{(k)})_{k\geq 1}$ par récurrence sur k en posant*

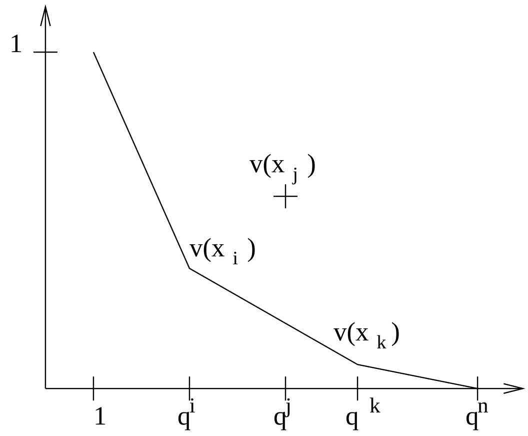

FIG. 1. Le polygone de Newton de la multiplication par π

- $\lambda_i^{(1)} = \lambda_i$
- $\lambda_i^{(k+1)}$ *est la plus grande pente de l'enveloppe convexe du polygone* $\mathcal{P} \cup \{(0, \lambda_i^{(k)})\}$ *défini sur le segment* $[0, q^n]$ *en posant* $\mathcal{P}_{|[0,1[} = +\infty$.

Remarquons enfin que l'espace topologique $\mathcal{N}ewt$ est muni d'une structure affine au sens où si $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_d \in \mathcal{N}ewt$, $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}_+^d$ sont tels que $\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1$ alors $\sum_{i=1}^d \alpha_i \mathcal{P}_i \in \mathcal{N}ewt$.

Voici maintenant l'un des théorèmes principaux de [F3].

Théorème 12 ([F3])**.** *Soit* $Q = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_1 \geq \dots \geq t_n\}/\mathbb{R}$*, un quartier dans l'immeuble de* PGL_n*. Il existe un unique homéomorphisme*

$$\varphi : \mathcal{N}ewt \xrightarrow{\sim} Q$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} |(\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]})^{an}| \arrow[r, "r\circ \mathrm{HT}"] \arrow[d] & Q \\ \mathcal{N}ewt \arrow[ur, "\simeq", "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

De plus la structure simpliciale de Q *tirée en arrière sur* $\mathcal{N}ewt$ *via* φ *est déterminée par : pour* $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < j \leq n$, *si* α_{ij} *désigne la racine affine* $(t_1, \dots, t_n) \mapsto t_i - t_j$,

- *le mur* $\{\alpha_{ij} = k\}$ *correspond à* $\{\lambda_i^{(k+1)} = \lambda_j\}$
- *le demi-appartement* $\{\alpha_{ij} \geq k\}$ *correspond à* $\{\lambda_i^{(k+1)} \geq \lambda_j\}$
- *le demi-appartement* $\{\alpha_{ij} \leq k\}$ *correspond à* $\{\lambda_i^{(k+1)} \leq \lambda_j\}$

L'application φ *est affine en restriction à chaque simplexe de* $\mathcal{N}ewt$.

D'après le théorème précédent on connaît complètement l'application $r \circ \mathrm{HT}$, i.e. φ, puisque l'on sait que φ est simpliciale vis à vis d'une structure simpliciale explicite sur $\mathcal{N}ewt$ et que φ est affine sur chaque simplexe.

4.5. **Quelques applications.**

4.5.1. *Sous-groupes canoniques.*

Définition 5. *Soit* i *un entier vérifiant* $1 \leq i \leq n-1$*. Soit* $k \geq 1$*. Un groupe de Lubin-Tate* H *sur* $\mathcal{O}_K$ *de hauteur* n *admet un sous-groupe canonique de rang* i *et de niveau* k *s'il existe* $\lambda \in]0, +\infty[$ *tel que* $H[\pi^k]_\lambda(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ *soit libre de rang* i *sur* $\mathcal{O}_F/\pi^k\mathcal{O}_F$.

Proposition 3 ([F3]). *Le groupe H admet un sous-groupe canonique de rang i et de niveau k si et seulement si le polygone de Newton associé dans $\mathcal{N}ewt$ est dans le demi-appartement $\{\alpha_{i,i+1} > k\}$.*

Le corollaire qui suit dit qu'à la limite, le bord de l'espace de la tour de Lubin-Tate est paraboliquement induit.

Corollaire 1 ([F3]). *Soit $k \geq 1$ un entier. Notons pour $1 \leq i \leq n-1$, $U_{i,k} \subset (\widehat{\mathcal{M}}^{LT,[0]})^{an}$ l'ouvert où la déformation universelle possède un sous-groupe canonique canonique de rang i et niveau k. Alors,*

$$(\widehat{\mathcal{M}}^{LT,[0]})^{an} \setminus \bigcup_{1\leq i\leq n-1} U_{i,k}$$

est compact.

On a également une bonne compréhension de l'application quotient par un sous-groupes canonique.

4.5.2. *Orbites de Hecke.* Si $y \in Q$ soit $W_{\text{aff}}.y$ son orbite sous le groupe de Weyl affine dans l'appartement fixé contenant le quartier Q. Soit maintenant $x \in |(\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]})^{an}|$ et $\text{Hecke}(x)$ son orbite sous les correspondances de Hecke non ramifiées.

Proposition 4 ([F3]). *Via l'application $r \circ \text{HT} : |(\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]})^{an}| \longrightarrow Q$ on a*

$$r \circ \text{HT}(\text{Hecke}(x)) = W_{\text{aff}}.r \circ \text{HT}(x) \cap Q$$

La proposition précédente résulte en fait d'une description plus précise de l'action des opérateurs de Hecke. À chaque élément $T \in \text{GL}_n(\mathcal{O}_F)\backslash\text{GL}_n(F)/\text{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ est associé une correspondance explicite de Q dans lui-même. Via l'application $r \circ \text{HT}$ l'image de l'orbite sous T d'un point x de $|(\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{LT},[0]})^{an}|$ est l'orbite de $r \circ \text{HT}(x)$ sous cette correspondance explicite de Q dans lui-même.

4.5.3. *Domaines fondamentaux pour l'action des opérateurs de Hecke et application des périodes de Gross-Hopkins.* L'interprétation immobilière de l'action des correspondances de Hecke permet de définir des domaines fondamentaux pour l'action des correspondances de Hecke non ramifiées plus généraux que ceux définis par Gross et Hopkins dans [18]. On a également une bonne compréhension du comportement de l'application des périodes de Gross-Hopkins relativement à cette décomposition simpliciale de la boule ouverte.

4.6. **Extension au niveau Iwahori.** L'espace de Lubin-Tate en niveau Iwahori possède un modèle entier modulaire semi-stable

$$\mathfrak{Y} = \text{Spf}\big(\mathcal{O}_{\widehat{F^{nr}}}[\![y_1, \ldots, y_n]\!]/(y_1 \ldots y_n - \pi)\big).$$

La fibre générique

$$\mathfrak{Y}^{an} = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathring{\mathbb{B}}^n(0,1) \mid y_1 \ldots y_n = \pi\}$$

est une couronne ouverte généralisée. Notons

$$\Delta = \{(v_1, \ldots, v_n) \in]0,1[^n \mid \sum_i v_i = 1\}$$

un simplexe ouvert. Il y a une rétraction

$$\begin{array}{ccc} |\mathfrak{Y}^{an}| & \longrightarrow & \Delta \\ (y_1, \ldots, y_n) & \longmapsto & (v(y_1), \ldots, v(y_n)) \end{array}$$

qui permet de penser à Δ comme étant le squelette de $\mathfrak{Y}^{an}$. Soit I le sous-groupe d'Iwahori standard dans $\text{GL}_n(\mathcal{O}_F)$. Soit $\mathcal{A}$ un appartement dans l'immeuble de Bruhat-Tits de PGL_n qui contient le simplexe dont le le sous-groupe d'Iwhaori I est le fixateur. L'inclusion de l'immeuble dans l'appartement induit un homéomorphisme

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} |\mathcal{I}(\text{PGL}_{n/F})|/I.$$

On peut alors se poser la question de comprendre l'application composée

$$|\mathfrak{Y}^{an}| \xrightarrow{\text{HT}} |\Omega|/I \xrightarrow{r} |\mathcal{I}(\text{PGL}_{n/F})|/I \simeq \mathcal{A}$$

Théorème 13 ([F3]). *L'application* $|\mathfrak{Y}^{an}| \longrightarrow \mathcal{A}$ *se factorise via la rétraction* $|\mathfrak{Y}^{an}| \longrightarrow \Delta$ *en un homéomorphisme*

$$\Delta \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}.$$

La structure simpliciale déduite sur $\mathcal{A}$ est plus complexe que précédemment.

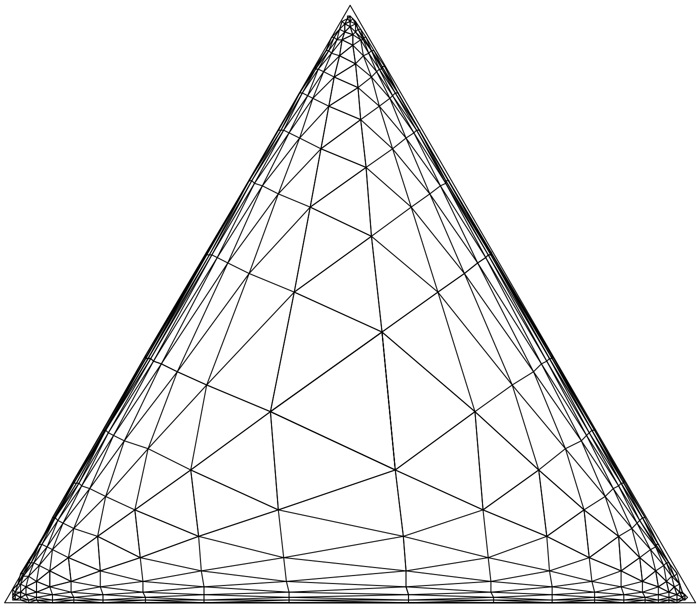

FIG. 2.

FIG. 3. L'appartement de PGL_3 dans le squelette $\Delta = \{(v_1, v_2, v_3) \in]01[^3 \mid v_1 + v_2 + v_3 = 1\}$ de $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\widehat{F^{nr}}}[[y_1, y_2, y_3]]/(y_1y_2y_3 - \pi))$, l'espace de Lubin-Tate en niveau Iwahori.

4.7. **Extension aux variétés de Shimura.** Tout ce qui suit dans cette sous-section fait l'objet d'un travail en cours dont la rédaction n'est pas terminée.

Soit $(\mathrm{Sh}_K)_{K \subset G(\mathbf{A}_f)}$ les variétés de Shimura considérées par Harris et Taylor dans [16] (les considérations qui suivent s'appliquent en fait au cadre plus général des variétés de Shimura de type PEL unitaires de signature $(1, n-1) \times (0, n) \times \cdots \times (0, n)$ en un premier p décomposé). Supposons pour simplifier que $G(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_n(F) \times \mathbb{Q}_p^\times$. On considère directement ces variétés de Shimura sur un complété p-adique de leur corps de définition, complété qui est le corps noté F précédemment. Soit

$$(\mathrm{Sh}_K^{an})_K$$

la tour de $\widehat{F^{nr}}$-espaces analytiques de Berkovich associée. Après avoir fixé un point x « supersingulier »dans la fibre spéciale de ces variétés de Shimura, la tour de Lubin-Tate s'identifie aux points de la tour $(\mathrm{Sh}_K^{an})_K$ qui se spécialisent sur x. La tour de Lubin-Tate peut donc se voir comme un ouvert de la tour $(\mathrm{Sh}_K^{an})_K$.

Théorème 14. *Soit* $\mathcal{I}^c$ *la compactification par les semi-normes de l'immeuble de Bruhat-Tits de* $\mathrm{PGL}_{n/F}$. *Il existe une application continue Hecke équivariante entre tours d'espaces topologiques*

$$\left(|\mathrm{Sh}^{an}_{K_p \mathbb{Z}_p^\times K^p}|\right)_{K_p \subset GL_n(F), K^p \subset G(\mathbf{A}_f^p)} \longrightarrow (\mathcal{I}^c/K_p)_{K_p \subset GL_n(F)}.$$

Via cette application la stratification des variétés de Shimura donnée par les tubes au dessus de la stratification de Newton de la fibre spéciale correspond à la stratification de bord de la compactification de l'immeuble.

La principale difficulté dans la démonstration du théorème précédent est la preuve de la continuité de l'application construite.

On peut de plus décrire plus précisément cette application en niveau compact maximal en p ou bien Iwahori. On définit pour cela une compactification $\mathcal{N}ewt^c$ de l'espace des polygones de Newton introduit dans la définition 3 et l'on montre qu'il y a un diagramme

$$\begin{tikzcd} {|\mathrm{Sh}^{an}_{GL_n(\mathcal{O}_F)\mathbb{Z}_p^\times K^p}|} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{I}^c/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) = Q^c \\ & \mathcal{N}ewt^c \arrow[ur, "\simeq"'] & \end{tikzcd}$$

où Q^c désigne la compactification du quartier considéré précédemment associée à la compactification de l'immeuble. L'homéomorphisme $\mathcal{N}ewt^c \xrightarrow{\sim} Q^c$ se décrit explicitement comme dans le théorème 12.

De même en niveau Iwahori en remplaçant le simplexe ouvert Δ par le simplexe, la stratification de bord étant celle par la codimension des faces de ce simplexe.

Notons enfin qu'il me semble que ce type d'outil est le mieux adapté si l'on veut développer une théorie des formes automorphes p-adiques sur ces variétés de Shimura. La paramétrisation immobilière précédente donne une description explicite de l'action des opérateurs de Hecke et des sous-groupes canoniques sur ces espaces analytiques p-adiques.

5. Autodualité de la cohomologie de la tour de Drinfeld sous l'involution de Zelevinsky

Dans [8] Pascal Boyer calcule, entre autres, la cohomologie des espaces de Lubin-Tate. Il utilise les résultats de [F5] que nous expliquons maintenant. Ces résultats ont également des applications à une conjecture de Prasad et Ramakrishnan sur les représentations autoduales des groupes p-adiques.

5.1. **Idée derrière le théorème.**

5.1.1. *Groupes d'extensions de la cohomologie de la fibre générique et groupes de torsion de la cohomologie de la fibre spéciale des espaces de Rapoport-Zink.* Dans [F2] (cf. également [F1]) j'ai démontré l'existence d'une suite spectrale de Hochschild-Serre reliant la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink basiques, certains espaces de formes automorphes et la cohomologie du lieu basique dans certaines variétés de Shimura. La formulation et la démonstration du théorème est purement analytique rigide et ne fait pas intervenir de modèles entiers des espaces de Rapoport-Zink ou des variétés de Shimura. Dans [20] Elena Mantovan a démontré une formule reliant la cohomologie à support compact des espaces de Rapoport-Zink non nécessairement basiques, la cohomologie de certaines variétés d'Igusa et la cohomologie des strates de Newton de certaines variétés de Shimura. La démonstration de [20] fait intervenir certains modèles entiers auxiliaires des espaces en jeu. Originellement la formulation des résultats de [20] était formulée en termes de la cohomologie à support compact à coefficients dans le complexe des cycles proches sur la fibre spéciale de ces modèles. Se posait de plus le problème de faire le lien entre les résultats de [F2] et de [20] dans le cas de la strate basique, la formulation de [F2] faisant intervenir des groupes d'extension dans la catégorie des représentations lisses du groupe p-adique J_b et celle de [20] des groupes de torsion. J'ai expliqué à l'auteur de [20] (cf. [14]) comment passer de la formulation de [F2] à celle de [20] c'est à dire comment passer de la formulation en termes de groupes de torsion à celle en termes de groupes d'extension et formuler au final le théorème principal de [20] purement en termes analytiques rigides. Il s'agit du chapitre 8.2 de [20]. Ce résultat permettant de passer des groupes de torsion de la cohomologie à support compact de la fibre spéciale aux groupes d'extensions de la cohomologie à support compact de la fibre générique, couplé au théorème de dualité p.133 du chapitre III de [24], m'a suggéré que ces deux espaces de cohomologie sont duaux sous l'involution définie dans [24], involution elle même reliée à l'involution de Zelevinsky.

Il se trouve que dans le cas de l'espace de Drinfeld et de ses revêtements les deux espaces de cohomologie à support compact, en fibre générique et en fibre spéciale, sont isomorphes (cela est du à l'existence de modèles entiers p-adiques dont les fibres spéciales ont des composantes irréductibles propres). J'ai donc conjecturé dans [14] que la cohomologie des revêtements de la tour de Drinfeld devait satisfaire une propriété d'autodualité sous l'involution de Zelevinsky.

5.1.2. *Dualité de Poincaré équivariante.* Soit G un groupes réductif sur une extension de degré finie F de $\mathbb{Q}_p$. Notons $\mathcal{I}(G)$ l'immeuble de Bruhat-Tits de G en tant que complexe simplicial et $|\mathcal{I}(G)|$ sa réalisation géométrique. D'un point de vue champêtre,

$$B\,(G(F)) = [G(F)\backslash\bullet].$$

En tant qu'espace topologique muni d'une action de $G(F)$, l'immeuble $|\mathcal{I}(G)|$ est contractile. On peut donc penser à ce classifiant comme étant

$$\text{« } \big[\, G(F) \setminus |\mathcal{I}(G)| \,\big] \text{ ».}$$

Néanmoins on s'intéresse non pas aux ensembles munis d'une action de $G(F)$, mais plutôt aux ensembles munis d'une action lisse de $G(F)$ (i.e. le stabilisateur d'un élément est un sous-groupe ouvert de $G(F)$).

Si X est un espace topologique paracompact localement compact muni d'une action continue lisse de $G(F)$ on peut définir un topos des faisceaux $G(F)$-équivariants lisses $(X/G(F))^{\sim}_{\infty}$ et un foncteur de cohomologie à support compact équivariante lisse

$$R\Gamma_c(X/G(F),-) : \mathbb{D}^+((X/G(F))^{\sim}_{\infty}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{D}^+(\mathbb{C}[G(F)]_\infty)$$

dont la cohomologie calcule la cohomologie à support compact des faisceaux après oubli de l'action de G.

Par définition ([25]) un faisceau sur l'immeuble est constructible si sa restriction aux facettes est constante de dimension finie. Il y a une bonne notion de dualité de Verdier pour les complexes de faisceaux à cohomologie constructibles $G(F)$-équivariants lisses ([25])

$$\boldsymbol{D} : \mathbb{D}^b_c((|\mathcal{I}(G)|/G(F))^{\sim}_{\infty}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{D}^b_c((|\mathcal{I}(G)|/G(F))^{\sim}_{\infty}, \mathbb{C})$$

$$\mathrm{Id} \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{D} \circ \boldsymbol{D}$$

Soit $\mathcal{H}(G)$ l'algèbre de Hecke de G vue comme une représentation de $G \times G$ via l'action de G par translations à gauche et à droite sur lui-même. Si π est une représentation complexe lisse de $G(F)$ notons $D(\pi) = \mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, \mathcal{H}(G))$, les morphismes $G(F)$-équivariants lorsqu'on munit $\mathcal{H}(G)$ de sa structure de $G(F)$-module par translations à gauche. L'espace vectoriel $D(\pi)$ est naturellement un $G(F)$-module via l'action de $G(F)$ par translations à droites sur $\mathcal{H}(G)$. On montre de plus que si π est de type fini alors $D(\pi)$ est lisse de type fini. Si $\boldsymbol{D}$ désigne le foncteur dérivé associé on montre alors que cela induit une involution

$$\boldsymbol{D} : \mathbb{D}^b_{tf}(\mathbb{C}[G(F)]_\infty) \longrightarrow \mathbb{D}^b_{tf}(\mathbb{C}[G(F)]_\infty)$$

$$\mathrm{Id} \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{D} \circ \boldsymbol{D}$$

Le diagramme suivant est alors commutatif ([25])

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}^b_c((|\mathcal{I}(G)|/G(F))^{\sim}_{\infty}, \mathbb{C}) \arrow[r, "\boldsymbol{D}"] \arrow[d, "R\Gamma_c(|\mathcal{I}(G)|/G(F),-)"'] & \mathbb{D}^b_c((|\mathcal{I}(G)|/G(F))^{\sim}_{\infty}, \mathbb{C}) \arrow[d, "R\Gamma_c(|\mathcal{I}(G)|/G(F),-)"] \\
\mathbb{D}^b_{tf}(\mathbb{C}[G(F)]_\infty) \arrow[r, "\boldsymbol{D}"] & \mathbb{D}^b_{tf}(\mathbb{C}[G(F)]_\infty)
\end{tikzcd}$$

Soit maintenant $(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}_K)_{K\subset\mathcal{O}_D^\times}$ la tour de Drinfeld. Notons $H = (\mathrm{GL}_{n/F} \times D^\times)/\mathbb{G}_m$, un F-groupe réductif. Fixons K un sous-groupe ouvert de $\mathcal{O}_D^\times$ distingué dans $D^\times$. Notons

$$\Pi_K : \mathcal{M}^{\mathcal{D}r}_K \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{D}r}_{\mathcal{O}_D^\times} = (\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{D}r})^{an}$$

le morphisme d'oubli de la structure de niveau K. D'après Berkovich ([4]) il y a une rétraction continue propre compatible à l'action de $H(F)$

$$r : |\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}_{\mathcal{O}_D^\times}| \longrightarrow |\mathcal{I}(H)|.$$

Il y a de plus un morphisme de projection du topos étale vers le topos Zariskien ([5])

$$\tau : (\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}_{\mathcal{O}_D^\times})^{\sim}_{\text{ét}} \longrightarrow |\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}_{\mathcal{O}_D^\times}|^{\sim}.$$

Par composition ces morphismes induisent un morphisme de topos de $H(F)$-faisceaux équivariants lisses

$$\xi : (\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}_K/H(F))^{\sim}_{\infty} \longrightarrow (|\mathcal{I}(H)|/H(F))^{\sim}_{\infty}.$$

Motivé par le fait que les différents morphismes de projection précédents sont tous « propres »et que donc « $R\xi_! = R\xi_*$ »on peut penser que

$$\text{« } \boldsymbol{D} \circ R\xi_! = R\xi_! \circ \boldsymbol{D} \text{ »}$$

où dans le membre de gauche $\boldsymbol{D}$ désigne la dualité de Verdier équivariante sur l'immeuble et dans celui de gauche sur l'espace analytique. En particulier cela devrait impliquer une propriété d'autodualité du complexe de cohomologie étale à support compact équivariant lisse de $\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}_K$ sous l'involution $\boldsymbol{D}$ de $\mathbb{D}^b_{tf}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[H(F)]_\infty)$.

5.2. **Résultats.**

5.2.1. *Le théorème général de dualité de Poincaré équivariante.* Soit ℓ un nombre premier différent de p. Soit $\Lambda \in \{\mathbb{F}_\ell, \overline{\mathbb{F}}_\ell, \mathbb{Q}_\ell, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\}$. Soit G un groupe topologique localement pro-p. Modulo certaines hypothèses de finitude sur la catégorie des représentations lisses de G à valeurs dans Λ (hypothèses satisfaites lorsque G est le groupe des points d'un groupe réductif p-adique) on vérifie qu'il y a une involution

$$\boldsymbol{D} : \mathbb{D}^b_{tf}(\Lambda[G]_\infty) \longrightarrow \mathbb{D}^b_{tf}(\Lambda[G]_\infty)$$
$$\mathrm{Id} \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{D} \circ \boldsymbol{D}$$

donnée par dérivation du foncteur $\pi \mapsto \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathcal{H}(G))$.

Soit K un corps valué complet extension de $\mathbb{Q}_p$ pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut définir une variante de la catégorie $\mathbb{D}^b_{tf}(\Lambda[G]_\infty)$ qui incorpore l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ vu comme groupe discret, $\mathbb{D}^b_{tf}(\Lambda[G \times \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)^{\mathrm{disc}}]_\infty)$ où le symbole « tf »signifie de type fini comme représentation de G.

Théorème 15 ([F5]). *Soit X un K-espace analytique lisse purement de dimension d muni d'une action continue de G. Supposons que l'action de G sur $|X|$ soit propre et que $G\backslash|X|$ soit compact. Soit $\mathcal{L}$ un système local étale de Λ-modules sur $X_{\acute{e}t}$. Alors,*

$$R\Gamma_c\big((X\hat{\otimes}\widehat{\overline{K}}/G)_\infty, \mathcal{L}\big) \in \mathbb{D}^b_{tf}(\Lambda[G \times Gal(\overline{K}|K)^{\mathrm{disc}}]_\infty)$$

et il y a un isomorphisme

$$R\Gamma_c\big((X\hat{\otimes}\widehat{\overline{K}}/G)_\infty, \mathcal{L}^\vee\big)(d)[2d] \simeq \boldsymbol{D}\Big(R\Gamma_c\big((X\hat{\otimes}\widehat{\overline{K}}/G)_\infty, \mathcal{L}\big)\Big)$$

5.3. **Le cas de la tour de Drinfeld.** On fixe comme précédemment $\Lambda \in \{\mathbb{F}_\ell, \overline{\mathbb{F}}_\ell, \mathbb{Q}_\ell, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\}$. Lorsque Λ est de torsion on supposera toujours ℓ banal. Soit $\chi : F^\times \longrightarrow \Lambda^\times$ est un caractère lisse. Cela définit un caractère χ du centre du groupe $(\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times)/F^\times$. On définit une catégorie dérivée de représentations lisses de caractère central χ

$$\mathbb{D}^b_{tf}(\Lambda[(\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times)/F^\times \times \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)^{\mathrm{disc}}]_\infty)_\chi.$$

Soit K un sous-groupe ouvert de $\mathcal{O}_D^\times$ distingué dans $D^\times$. Posons

$$H = (\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times/K)/F^\times.$$

Pour χ un caractère central comme précédemment on dispose d'une catégorie dérivée

$$\mathbb{D}^b_{tf,\chi} := \mathbb{D}^b_{\mathrm{tf}}(\Lambda[H \times \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)^{\mathrm{disc}}]_\infty)_\chi$$

Puisque le groupe $D^\times/K.F^\times$ est fini il y a de plus une décomposition orthogonale

$$\begin{array}{ccc}\displaystyle\bigoplus_{\substack{\rho\in \mathrm{Irr}(D^\times/K)\\ \rho_{|F^\times}=\chi}} \mathbb{D}^b_{tf}(\Lambda[\mathrm{GL}_n(F)\times \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)]_\infty)_\chi & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{D}^b_{tf,\chi} \\ (C_\rho)_\rho & \longmapsto & \displaystyle\bigoplus_\rho C_\rho\otimes\rho.\end{array}$$

Soit maintenant

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r})\in \mathbb{D}^b_{tf}(H\times \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)^{\mathrm{disc}}]_\infty)$$

le complexe de cohomologie de la tour de Drinfeld en niveau K. Si Z désigne le centre de H identifié à $F^\times$ on peut projeter ce complexe de cohomologie

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r})_\chi := R\Gamma_c(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{H}(Z)}\chi\in \mathbb{D}^b_{tf,\chi}.$$

Ce complexe de cohomologie peut s'interpréter comme le complexe de cohomologie de l'espace analytique quotient $\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r}/\pi^{\mathbb{Z}}$ à coefficient dans un système local équivariant de rang 1 associé à χ, $\mathcal{L}_\chi$,

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r})_\chi = R\Gamma_c((\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r}/\pi^{\mathbb{Z}})/H,\mathcal{L}_\chi).$$

Il se décompose en

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r})_\chi = \bigoplus_{\substack{\rho\in \mathrm{Irr}(D^\times/K)\\ \rho_{|F^\times}=\chi}} R\Gamma_c(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r})_\rho\otimes\rho$$

avec $R\Gamma_c(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r})_\rho\in\mathbb{D}^b_{tf,\rho}$. L'involution $\boldsymbol{D}$ induit une équivalence

$$\boldsymbol{D}:\mathbb{D}^b_{tf,\chi}\xrightarrow{\sim}\mathbb{D}^b_{tf,\chi^{-1}}$$

qui induit elle même une équivalence pour ρ une représentation irréductible de $D^\times$ triviale sur K de caractère central χ,

$$\boldsymbol{D}:\mathbb{D}^b_{tf,\rho}\xrightarrow{\sim}\mathbb{D}^b_{tf,\rho^\vee}.$$

Du théorème 15 on déduit le théorème suivant.

Théorème 16 ([F5]). *Pour ρ une représentation lisse irréductible de $D^\times$ triviale sur K de caractère central χ il y a un isomorphisme*

$$\boldsymbol{D}\big(R\Gamma_c(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r})_\rho\big)\simeq R\Gamma_c(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r})_{\rho^\vee}(n-1)[2(n-1)]\in\mathbb{D}^b_{tf,\rho^\vee}.$$

Pour aller plus loin on a maintenant besoin du résultat suivant. Sa preuve utilise l'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et le théorème 6. Je ne connais malheureusement pas de preuve « élémentaire »de ce résultat (ce résultat est faux en général pour un espace de Rapoport-Zink quelconque).

Théorème 17 ([F5]). *La cohomologie du complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r})_\chi$ est de longueur finie comme représentation de H.*

D'après un théorème de Anne-Marie Aubert ([2]) couplé au théorème III.3.1 de [24] on peut relier l'involution $\boldsymbol{D}$ appliquée aux représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$ à l'involution de Zelevinsky ([26]). De plus, l'espace analytique $\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r}$ étant de Stein on peut montrer que $H^q_c(\mathcal{M}_K\hat{\otimes}\mathbb{C}_p,\Lambda)=0$ pour $0\leq q<n-1$. Utilisant ces ingrédients je démontre le théorème suivant à partir du théorème précédent.

Théorème 18 ([F5]). *Soit ρ une représentation lisse irréductible de $D^\times$ de caractère central χ_ρ. Posons pour $q\geq 0$,*

$$H^q_c(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r})_\rho = Hom_{D^\times}(\rho, H^q_c(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r})\otimes_{\mathcal{H}(Z)}\chi_\rho)$$

une représentations lisse de longueur finie de $GL_n(F)\times W_F$. Décomposons cette représentation suivant les composantes du centre de Bernstein de $GL_n(F)$

$$H^q_c(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r})_\rho = \bigoplus_{\mathfrak{s}\in I} H^q_c(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r})_{\rho,\mathfrak{s}}$$

où I désigne les classes d'équivalences inertielles paramétrant les composantes du centre de Bernstein. Pour $\mathfrak{s} \in I$ soit $i(\mathfrak{s}) \in \mathbb{N}$ la profondeur d'un sous-groupe parabolique associé à $\mathfrak{s}$ ($i(\mathfrak{s}) = 0$ dans le cas supercuspidal et $i(\mathfrak{s}) = n-1$ dans le cas d'une représentation de Steinberg). Alors $H_c^q(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r})_{\rho,\mathfrak{s}} = 0$ si $q \notin [n-1, n-1+i(\mathfrak{s})]$. De plus pour tout q, il y a des isomorphismes de $GL_n(F) \times W_F$-représentations lisses

$$H_c^{n-1+i(\mathfrak{s})-q}(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r})_{\check{\rho},\check{\mathfrak{s}}}(n-1) \simeq \mathrm{Zel}\big(H_c^{n-1+q}(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r})^{\sim}_{\rho,\mathfrak{s}}\big).$$

En particulier soit χ un caractère fixé de $F^\times$ et $K \subset \mathcal{O}_D^\times$, $K \lhd D^\times$. Alors, l'involution $\mathrm{Zel}\circ\widetilde{(-)}(1-n)$ induit une bijection renversant l'ordre entre le treilli des sous-représentations de $GL_n(F) \times D^\times \times W_F$ de $H_c^{n-1+q}(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r})^K_{\chi,\mathfrak{s}}$ et celui de $H_c^{n-1+i(\mathfrak{s})-q}(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r})^K_{\chi^{-1},\check{\mathfrak{s}}}$.

Notons $JH^0(H_c^\bullet(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r})^K_{\chi,\mathfrak{s}})$ l'ensemble des quotients irréductibles avec multiplicité d'une suite de Jordan-Hölder de $H_c^\bullet(\mathcal{M})^K_{\chi,\mathfrak{s}}$ comme représentation de $GL_n(F) \times D^\times \times W_F$. Alors

$$JH^0\big(H_c^{n-1+i(\mathfrak{s})-q}(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r})^K_{\chi^{-1},\check{\mathfrak{s}}}\big) = \{\mathrm{Zel}(\widetilde{\pi}) \otimes \check{\rho} \otimes \check{\sigma}(1-n) \mid \pi \otimes \rho \otimes \sigma \in \mathrm{JH}^0(H_c^{n-1+q}(\mathcal{M}^{\mathcal{D}r})^K_{\chi,\mathfrak{s}})\}$$

avec multiplicités.

Exemple 1. *Le théorème précédent dit en particulier que les représentations supercuspidales n'interviennent qu'en degré moitié.*
Le fait que les représentations de Steinberg apparaissent en degré moitié découle de ce que les caractères de $F^\times$ composés avec le déterminant apparaissent en degré maximal.

5.4. **Application à une conjecture de Prasad et Ramakrishnan.** Des résultats précédents on déduit le théorème suivant.

Théorème 19 ([F5])**.** *Soit K un sous-groupe ouvert de $\mathcal{O}_D^\times$ distingué dans $D^\times$. Soit $\chi : F^\times \longrightarrow \Lambda^\times$ un caractère lisse. Alors l'application de dualité de Poincaré restreint à la partie supercuspidale*

$$H_c^{n-1}(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r}\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\chi,cusp} \times H_c^{n-1}(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r}\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\chi^{-1},cusp} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-n+1)$$

est un accouplement parfait au sens où il induit un isomorphisme

$$H_c^{n-1}(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r}\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\chi,cusp} \xrightarrow{\sim} \Big(H_c^{n-1}(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r}\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\chi^{-1},cusp}\Big)^{\sim}.$$

On peut appliquer le théorème précédent afin de démontrer un cas particulier d'une conjecture de Prasad et Ramakrishnan. J'espère pouvoir démontrer la conjecture dans son intégralité en utilisant les résultats précédents couplés aux résultats de [10].

Corollaire 2. *Soit ρ une représentation lisse irréductible de $D^\times$ telle que $JL(\rho)$ soit une représentation supercuspidale de $GL_n(F)$. Soit $\sigma(JL(\rho))$ la représentation associée de W_F par la correspondance de Langlands locale. Supposons ρ autoduale. Alors,*
- *Si n est pair, ρ est de type orthogonale si et seulement si $\sigma(JL(\rho))$ est de type symplectique.*
- *Si n est impair, ρ est de type orthogonale si et seulement si $\sigma(JL(\rho))$ est de type orthogonal.*

6. Invariance par complétion formelle de la filtration de monodromie sur les cycles évanescents

Soit K un corps valué complet pour une valuation discrète, de corps résiduel parfait de caractéristique p. Soit X un $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$-schéma de type fini. Soit η le point générique de $spec(\mathcal{O}_K)$ et $\bar{\eta}$ un point géométrique au dessus de η associé au choix d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Soit $\bar{s}$ le point géométrique associé au dessus du point fermé de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Soit ℓ un nombre premier différent de p et

$$\mathrm{R}\Psi_\eta(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \in \mathbb{D}_c^b(X_{\bar{s}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

le complexe des cycles proches de Deligne. C'est un faisceau pervers muni d'une action du groupe de Galois $\pi_1(\eta,\bar{\eta}) = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ compatible à l'action de $\pi_1(s,\bar{s})$ sur $X_{\bar{s}}$ via l'application de spécialisation $\pi_1(\eta,\bar{\eta}) \longrightarrow \pi_1(s,\bar{s})$. Soit $I_K \subset \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ le sous-groupe d'inertie, le noyau de l'application de spécialisation précédente. Si $\mathrm{Perv}(X_{\bar{s}})$ désigne la catégorie abélienne des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers sur $X_{\bar{s}}$ il y a donc un morphisme

$$I_K \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{Perv}(X_{\bar{s}})}\big(\mathrm{R}\Psi_\eta(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\big).$$

Soit $P_K \subset I_K$ le sous-groupe de ramification sauvage. L'action de P_K sur $\mathrm{R}\Psi_\eta(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ se factorise par un sous-groupe ouvert et est donc d'ordre fini. De plus

$$I_K/P_K \simeq \prod_{\ell' \neq p} \mathbb{Z}_{\ell'}(1).$$

On peut alors définir un opérateur de monodromie

$$N : \mathrm{R}\Psi_\eta(\mathbb{Q}_p)(1) \longrightarrow \mathrm{R}\Psi_\eta(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

comme le logarithme de l'action d'un élément de I_K s'envoyant sur un générateur topologique de $\mathbb{Z}_\ell(1)$ dans I_K/P_K via l'isomorphisme précédent. C'est un endomorphisme nilpotent. Il lui est associé une filtration de monodromie

$$\mathrm{Fil}^\bullet \mathrm{R}\Psi_\eta(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

dans la catégorie abélienne $\mathrm{Perv}(X_{\bar{s}})$ et même une bi-filtration par les noyaux et images itérés de l'opérateur N (la filtration de monodromie s'obtenant comme convolée de ces deux filtrations).

Vladimir Berkovich a démontré dans [7] que la fibre du complexe $\mathrm{R}\Psi_\eta(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ en un point fermé x de $X_{\bar{s}}$ ne dépend que du complété formel de l'henselisé strict de X en x. Dans [F6] je démontre un résultat plus général qui prend en compte la filtration de monodromie.

On vérifie dans [F6] la donnée d'un tel faisceau pervers filtré est équivalent à la donnée d'un objet de la catégorie dérivée filtrée

$$K \in \mathbb{D}^b_c\mathrm{F}(X_{\bar{s}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

dont les gradués sont pervers.

Théorème 20 ([F6]). *Soit x un point fermé de $X_{\bar{s}}$. La fibre du complexe filtré K en x, $K_x \in \mathbb{D}^b\mathrm{F}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, ne dépend que du complété formel de l'hensélisé strict de X en x.*

Ce résultat a été utilisé par Pascal Boyer dans [8] où il calcule en particulier la cohomologie des espaces de Lubin-Tate. Il procède pour cela par récurrence sur la dimension des espaces de Lubin-Tate. L'hypothèse de récurrence ne porte pas seulement sur la cohomologie de ces espaces mais sur ces complexes filtrés qui apparaissent comme fibre des cycles évanescents en des points fermés de la fibre spéciale de certaines variétés Shimura.

7. Filtrations de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats et application aux groupes p-divisibles

7.1. Filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats ([F7]).

Soit X une courbe projective lisse et $\mathcal{V}$ la catégorie des fibrés vectoriels sur X. Cette catégorie vérifie les propriétés suivantes :

– C'est une catégorie exacte, sa structure de catégorie exacte étant induite par son plongement dans la catégorie des faisceaux cohérents sur X.
– Elle est munie de deux fonctions additives sur les suites exactes, rang et degré

$$\mathrm{rg},\ \deg : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

– Soit $\mathcal{V}_\eta$ la catégorie des germes de fibrés vectoriels sur des ouverts non vides de X. Si $k(X)$ désigne le corps des fonctions rationnelles sur X elle est équivalente à la catégorie des $k(X)$-espaces vectoriels de dimension fini. C'est donc une catégorie abélienne. Il y a de plus un foncteur fibre générique exacte

$$F : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}_\eta.$$

– Le foncteur fibre générique précédent vérifie que si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel sur X alors l'application

$$F : \{\text{sous-fibrés de } \mathcal{E}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{sous-fibrés de } F(\mathcal{E})\}$$

est une bijection, d'inverse donné par l'application d'adhérence schématique d'un sous-fibré de E défini sur un ouvert dense dans $\mathcal{E}$.

– Si $u : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ est un morphisme de fibré qui est un isomorphisme en fibre générique, i.e. tel que $F(u)$ soit un isomorphisme, alors

$$\deg(\mathcal{E}) \leq \deg(\mathcal{E}')$$

avec égalité si et seulement si u est un isomorphisme.

Soit maintenant p un nombre premier. Soit K une extension de $\mathbb{Q}_p$ valuée complète pour une valuation de rang 1. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des schémas en groupes commutatifs finis et plats sur $\mathcal{O}_K$ d'ordre une puissance de p. Je me suis rendu compte que la catégorie $\mathcal{C}$ vérifie des propriétés analogues à la catégorie précédente des fibrés vectoriels sur une courbe projective lisse. Plus précisément :

– La catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie exacte, sa structure de catégorie exacte étant induite par son plongement dans la catégorie abélienne des faisceaux de groupes abéliens fppf sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$.
– Elle est munie de deux fonctions additives

$$\mathrm{ht},\ \deg : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

où $\mathrm{ht}(G) = \log_p |G|$ et $\deg G = \sum_i v(a_i)$ si $\omega_G \simeq \oplus_i \mathcal{O}_K/a_i\mathcal{O}_K$.
– Soit $\mathcal{C}_K$ la catégorie des K-schémas en groupes commutatifs finis. Elle est abélienne. Il y a de plus un foncteur fibre générique

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_K.$$

– Le foncteur fibre générique précédent est tel que si $G \in \mathcal{C}$ alors l'application

$$F : \{\text{sous-objets de G dans } \mathcal{C}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{sous-objets de } G \otimes K \text{ dans } \mathcal{C}_K\}$$

est une bijection d'inverse donné par l'application d'adhérence schématique.
– Si $u : G \longrightarrow G'$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ induisant un isomorphisme en fibre générique alors

$$\deg G \leq \deg G'$$

avec égalité si et seulement si u est un isomorphisme.

Je renvoie à [F7] pour les détails concernant la vérification des propriétés précédentes.

Partant de là j'ai démontré le théorème suivant.

Théorème 21 ([F7])**.** *Les objets de $\mathcal{C}$ admettent des filtrations de Harder-Narasimhan relativement à la fonction pente $\mu = \dfrac{\deg}{\mathrm{ht}}$.*

Ce théorème s'applique en fait en toute généralité aux catégories exactes munis de deux fonctions additives et d'un foncteur fibre générique vers une catégorie abélienne, le tout satisfaisant à des propriétés analogues à celles exposées précédemment.

Normalisons la valuation de K de telle manière que $v(p) = 1$. On peut alors vérifier que pour $G \in \mathcal{C}$ non nul

$$\mu(G) \in [0, 1].$$

De plus dans la filtration de Harder-Narasimhan du schéma en groupes G,

- la partie de pente 0 correspond à sa partie étale,
- la partie de pente 1 correspond à sa partie multiplicative.

Le théorème précédent dit que l'on dispose d'un formalisme analogue aux filtrations de Harder-Narasimhan des fibrés vectoriels. En particulier pour $\lambda \in [0, 1]$, si $\mathcal{C}^{ss}_\lambda$ désigne la sous-catégorie de $\mathcal{C}$ formée des objets semi-stables de pente λ alors $\mathcal{C}^{ss}_\lambda$ est une catégorie abélienne. On dispose donc d'une famille de catégories abéliennes

$$\left(\mathcal{C}^{ss}_\lambda\right)_{\lambda \in [0,1]}$$

qui interpole entre la catégorie abélienne des groupes étales et celle des groupes de type multiplicatif. On notera également la propriété fondamentale suivante qui découle du caractère abélien des catégories précédentes : si G est semi-stable alors pour tout entier $k \geq 1$, le noyau de la multiplication par p^k sur G est plat.

Ces filtrations sont de nature géométrique au sens où si $L|K$ est une extension valuée complète alors la filtration de G défini sur $\mathcal{O}_K$ s'envoie par extension des scalaires sur celle de $G \otimes \mathcal{O}_L$.

Enfin on notera que les filtrations précédentes se comportent bien vis à vis des structures additionnelles comme les actions d'une algèbre ou bien les polarisations.

Afin d'utiliser ces filtrations pour étudier les espaces de modules de groupes p-divisibles ou bien les variétés de Shimura, j'ai besoin d'un théorème sur les familles.

Théorème 22 ([F7]). *Soit K un corps valué complet de valuation discrète extension de $\mathbb{Q}_p$. Soit $\mathfrak{X}$ un Spf($\mathcal{O}_K$)-schéma formel topologiquement de type fini sans p-torsion. Soit G un $\mathfrak{X}$-schéma en groupes commutatif fini localement libre d'ordre une puissance de p. Notons $\mathfrak{X}^{an}$ la fibre générique de $\mathfrak{X}$ au sens des espaces analytiques de Berkovich.*

– *La fonction*

$$\begin{array}{rcl} |\mathfrak{X}^{an}| & \longrightarrow & \{\textit{Polygones concaves}\} \\ x & \longmapsto & \mathrm{HN}(G_x) \end{array}$$

est continue. De plus si $\mathcal{P}$ est un polygone concave fixé alors

$$\{x \in \mathfrak{X}^{an} \mid \mathrm{HN}(G_x) \leq \mathcal{P}\}$$

est un domaine analytique fermé dans $\mathfrak{X}$ (provenant d'un ouvert admissible de l'espace rigide fibre générique de $\mathfrak{X}$). En particulier le lieu semi-stable est un domaine analytique fermé associé à un ouvert admissible de l'espace rigide fibre générique de $\mathfrak{X}$.

– *Soit $i \in [0, \mathrm{ht}(G)] \cap \mathbb{N}$ une abscisse. Supposons que pour tout $x \in |\mathfrak{X}^{an}|$ le polygone $\mathrm{HN}(G_x)$ possède un point de rupture en i. Il existe alors un éclatement formel admissible $\widetilde{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathfrak{X}$ ainsi qu'une suite exacte de $\widetilde{\mathfrak{X}}$-schémas en groupes finis localement libres*

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \times_{\mathfrak{X}} \widetilde{\mathfrak{X}} \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$$

induisant en tout $x \in \mathfrak{X}^{an}$ le cran associé à l'abscisse i de la filtration de Harder-Narasimhan de G_x.

L'intérêt du premier point dans le théorème précédent est qu'il va nous permettre de stratifier nos espaces de modules.

7.2. **Application aux groupes p-divisibles.** Dans [F8] j'ai appliqué la théorie précédente aux groupes p-divisibles, à leurs espaces de modules ainsi qu'aux espaces analytiques p-adiques associés à certaines variétés de Shimura. L'idée consiste à utiliser les filtrations de Harder-Narasimhan précédentes afin d'établir une « théorie de la réduction »pour les groupes p-divisibles relativement à l'action des opérateurs de Hecke en p.

7.2.1. *Résultats généraux.* Soit $K|\mathbb{Q}_p$ comme précédemment. Soit H un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_K$. On commence par rassembler les polygones de Harder-Narasimhan des points de p^n-torsion de H pour tout entier n en un seul polygone. Remarquons pour cela que $\mathrm{HN}(H[p^n]) : [0, n\mathrm{HN}(H)] \longrightarrow [0, n \dim H]$.

Définition 6 ([F8]). *Le polygone de Harder-Narasimhan renormalisé de H est la fonction*

$$\begin{array}{rcl} [0, \mathrm{ht}\ H] & \longrightarrow & [0, \dim H] \\ x & \longmapsto & \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \mathrm{HN}(H[p^n])(nx). \end{array}$$

C'est un théorème de [F8] que cette limite existe bien. La fonction $\mathrm{HN}(H)$ est une fonction concave, on l'appelle cependant polygone bien qu'on ne sache pas encore que c'en est un. Le polygone renormalisé précédent est un invariant de la classe d'isogénie de H :

Proposition 5 ([F8]). *Si H' est isogène à H alors* $\mathrm{HN}(H') = \mathrm{HN}(H)$.

Définition 7 ([F8]). *Le groupe p-divisible H est dit semi-stable s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :*

– *$H[p]$ est semi-stable*

– *pour tout entier $n \geq 1$, $H[p^n]$ est semi-stable*

Définition 8 ([F8])**.** *Si $H \neq 0$ on note $\mu_H := \dfrac{\dim H}{\mathrm{ht}\ H}$.*

On remarquera que pour tout $n \geq 1$, $\mu_H = \mu(H[p^n])$.

Le premier théorème est un théorème du type Dieudonné-Manin.

Théorème 23 ([F8])**.** *Supposons la valuation de K discrète. Soit H un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_K$. Il existe alors un groupe p-divisible H' isogène à H et muni d'une filtration par des sous-groupes p-divisibles*

$$0 = H'_0 \subsetneq H'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq H'_r = H'$$

telle que :

– *Les gradués de cette filtration sont des groupes p-divisibles semi-stables.*
– *La suite $(\mu_{H'_i/H'_{i-1}})_{1\leq i\leq r}$ est strictement décroissante.*
– *La fonction $\mathrm{HN}(H)$ est le polygone concave de pentes $(\mu_{H'_i/H'_{i-1}})_{1\leq i\leq r}$ avec multiplicités $(\mathrm{ht}(H'_i/H'_{i-1}))_{1\leq i\leq r}$. En particulier ses points de rupture sont à coordonnées entières.*
– *On a l'inégalité $\mathrm{HN}(H) \leq \mathrm{Newt}(H \otimes k_K)^{\diamondsuit}$ la version concave du polygone de Newton de la réduction de H sur le corps résiduel de $\mathcal{O}_K$.*

Le dernier point a un corollaire particulièrement intéressant.

Corollaire 3. *Supposons que la réduction $H \otimes k_K$ soit isocline. Alors H est iosgène à un groupe p-divisible semi-stable.*

Le théorème précédent n'est pas suffisant pour les applications aux espaces de modules de groupes p-divisibles. On a besoin de comprendre ce qui se passe lorsque la valuation de K n'est plus discrète i.e. lorsque la ramification explose.

Supposons K quelconque. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et $C = \widehat{\overline{K}}$. Soit $\mathrm{VectFil}_{C/\mathbb{Q}_p}$ la catégorie des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie V munis d'une filtration décroissante séparée exhaustive finie $\mathrm{Fil}^\bullet(V \otimes C)$ du C-espace vectoriel $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C$. Posons

$$\mathrm{rang}(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_C) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

et

$$\deg(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_C) = \sum_i i.\dim_C \mathrm{Gr}^i V_C.$$

Les objets de $\mathrm{VectFil}_{C/\mathbb{Q}_p}$ admettent des filtrations de Harder-Narasimhan relativement à la fonction pente $\mu = \dfrac{\deg}{\mathrm{rang}}$.

Théorème 24 ([F8])**.** *Soit*

$$\alpha_H : V_p(H) \longrightarrow \omega_{H^D} \otimes C$$

l'application de Hodge-Tate de H. Alors, $\alpha_H \otimes 1 : V_p(H) \otimes C \longrightarrow \omega_{H^D} \otimes C$ est surjective. Soit

$$\mathrm{HT}(H) = (V_p(H), \mathrm{Fil}^\bullet V_p(H)_C) \in \mathrm{VectFil}_{C/\mathbb{Q}_p}$$

défini en posant $\mathrm{Fil}^0(V_p(H)_C) = V_p(H)_C$, $\mathrm{Fil}^1(V_p(H)_C) = \ker(\alpha_H \otimes 1)$ et $\mathrm{Fil}^1(V_p(H)_C) = 0$. Il y a alors une égalité de polygones

$$\mathrm{HN}(H) = \mathrm{HN}_{\mathrm{VectFil}_{C/\mathbb{Q}_p}}(\mathrm{HT}(H)).$$

En particulier $\mathrm{HN}(H)$ est un polygone à points de rupture de coordonnées entières.

Pour aller plus loin nous avons besoin d'une définition.

Définition 9. *Le groupe p-divisible H est dit modulaire s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :*

– *Il existe une extension valuée complète de valuation discrète $F|\mathbb{Q}_p$ ainsi qu'un Spf($\mathcal{O}_F$)-schéma formel localement formellement de type fini $\mathfrak{X}$, un groupe p-divisible $\mathcal{H}$ sur $\mathfrak{X}$, un plongement isométrique $F \subset C$, un point $x \in \mathfrak{X}^{an}(C)$ et un isomorphisme $\mathcal{H}_x \simeq H \otimes \mathcal{O}_C$.*

– *L'identité de* $H \otimes k_K$ *se relève en une quasi-isogénie*

$$(H \otimes k_K) \otimes \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C \longrightarrow H \otimes \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C.$$

Lorsque la valuation de K est discrète tout groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_K$ est modulaire.

Théorème 25 ([F8], [F10]). *Si* H *est modulaire on a l'inégalité*

$$\mathrm{HN}(H) \leq \mathrm{Newt}(H \otimes k_K)^{\diamondsuit}.$$

7.2.2. *Application aux espaces de modules.* Voici la principale application des résultats précédents que l'on donne dans [F8].

Théorème 26. *Soit* $\widehat{\mathcal{M}}$ *l'espace de Rapoport-Zink des déformations d'un groupes* p*-divisible sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$ *simple à isogénies près i.e. isocline de dimension et de hauteur premiers entre eux. Soit* $\mathcal{D} \subset \widehat{\mathcal{M}}^{an}$ *le domaine analytique fermé qui est le lieu de semi-stabilité de la déformation universelle intersecté avec la composante de* $\widehat{\mathcal{M}}^{an}$ *où la quasi-isogénie universelle est de hauteur dans* $\{0, \ldots, n-1\}$*. Les itérés sous les correspondances de Hecke de* $\mathcal{D}$ *forment un recouvrement localement fini de* $\widehat{\mathcal{M}}^{an}$ *indexé par* $GL_n(\mathbb{Z}_p)\backslash GL_n(\mathbb{Q}_p)/GL_n(\mathbb{Z}_p)$*.*

Dans le cas des espaces de Lubin-Tate $\mathcal{D}$ est exactement le domaine fondamental défini par Gross et Hopkins ([18]) utilisé dans [F4] (cf. section 3.1).

Théorème 27. *Sous les hypothèses du théorème 26 précédent soit* $\pi : \widehat{\mathcal{M}}^{an} \longrightarrow \mathcal{F}$ *l'application des périodes* ([22])*. Alors*

$$\pi(\widehat{\mathcal{M}}^{an}) = \pi(\mathcal{D}).$$

Soit de plus $\mathring{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}$ *le lieu stable, un ouvert de* $\widehat{\mathcal{M}}^{an}$*. Alors*

$$\pi_{|\mathring{\mathcal{D}}} : \mathring{\mathcal{D}} \xrightarrow{\sim} \pi(\mathring{\mathcal{D}})$$

est un isomorphisme.

8. Espaces de Banach-Colmez

Dans mes travaux sur les filtrations de Harder-Narasimhan exposés dans le chapitre précédent je suis tombé sur des problèmes de théorie de Hodge p-adique. Cela m'a amené après des discussions avec J.M. Fontaine à m'intéresser aux travaux de Colmez sur ce qu'il appelle les espaces de Banach de dimension finie ([9]). Il s'agit là de travaux en cours dont une première partie ([F9]) est déjà rédigée.

Le problème concerne la démonstration du théorème 25 exposé dans le chapitre précédent lorsque la valuation du corps de base n'est pas discrète.

8.1. **Groupes analytiques rigides de type p-divisible** ([F9])**.** Dans [F9] j'étudie une classe de groupes analytiques rigides d'un type particulier. Soit K un corps valué complet extension de $\mathbb{Q}_p$ pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 10 ([F9]). *Un* K*-groupe analytique rigide de type* p*-divisible est un groupe analytique rigide commutatif* G *tel que*

– *la multiplication par* p*,* $G \xrightarrow{\times p} G$ *est un morphisme fini et surjectif*
– *pour tout* $x \in |G^{an}|$*, l'espace topologique associé à l'espace analytique de Berkovich* G^{an}*,* $\lim\limits_{n \to +\infty} p^n x = 0$*.*

Comme l'affirme le théorème qui suit cette catégorie de groupes analytiques rigides contient la catégorie des groupes formels p-divisibles sur $\mathcal{O}_K$.

Théorème 28 ([F9]). *Le foncteur fibre générique*

$$\begin{array}{ccc} \textit{Groupes formels p-divisibles}/\mathcal{O}_K & \longrightarrow & K - \textit{Groupes analytiques rigides de type p-divisible} \\ H & \longmapsto & H^{rig} \end{array}$$

est pleinement fidèle d'image essentielle les groupes analytiques rigides de type p*-divisible* G *tels que comme espace analytique rigide,* $G \simeq \mathring{\mathbb{B}}^{\dim G}(0,1)$*.*

Comme les groupes formels p-divisibles les groupes analytiques rigides de type p-divisible possèdent un logarithme. On démontre en effet dans [F9] que si G est un tel groupe alors $G[p^\infty]$ est un groupe p-divisible sur K et il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow G[p^\infty] \longrightarrow G \xrightarrow{\log} \operatorname{Lie} G \otimes \mathbb{G}_a^{rig} \longrightarrow 0 \tag{1}$$

où l'application logarithme, log, fait de G un revêtement de l'espace affine $\operatorname{Lie} G \otimes \mathbb{G}_a^{rig}$ au sens de De-Jong ([11]).

L'un des théorèmes principaux de [F9] est alors le théorème de classification suivant. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. On note $C = \widehat{\overline{K}}$.

Théorème 29 ([F9])**.** *La catégorie des K-groupes analytiques rigides de type p-divisible est équivalente à la catégorie des triplets (Λ, W, f) où*
- *Λ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini munis d'une action linéaire continue de $Gal(\overline{K}|K)$*
- *W est un K-espace vectoriel de dimension finie*
- *$f : W \otimes_K C \longrightarrow \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} C(-1)$ est une application C-linéaire compatible à l'action semi-linéaire de $Gal(\overline{K}|K)$.*

Le triplet (Λ, W, f) associé à un groupe G est tel que $\Lambda = T_p(G[p^\infty])$ et $W = Lie\, G$. De plus si $G = H^{rig}$ avec H un groupe formel p-divisible sur $\mathcal{O}_K$ l'application $f : Lie\, H \otimes C \longrightarrow V_p(H) \otimes C(-1)$ est la transposée de l'application de Hodge-Tate de H^D.

8.2. **Espaces de Banach-Colmez (**[F10]**).** Dans [F10], suivant des suggestions de J.M. Fontaine, je définis et étudie une catégorie que j'appelle catégorie des espaces de Banach-Colmez. Je montre que cette catégorie est équivalente à celle définie par Colmez dans [9]. Néanmoins sa définition est assez différente de celle de Colmez, elle est de nature plus géométrique et le fait qu'elle coïncide avec celle définie par Colmez n'est pas du tout évident. Les deux points de vue sur ces objets, celui de [9] et celui de [F10], se complètent. Je montre de plus que ces objets possèdent des filtrations de type Harder-Narasimhan et étudie celles-ci.

Soit C un corps valué complet pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$ extension de $\mathbb{Q}_p$ et algébriquement clos. Dans [F10] je commence par définir une catégorie de C-espaces rigides généralisés que j'appelle catégorie des espaces spectraux de Stein. Cette catégorie contient les C-espaces rigides analytiques réduits de Stein (par exemple les espaces affinoïdes réduits et les boules ouvertes). Si X est un tel espace on peut définir ses C-points, $X(C)$, qui est un espace topologique totalement discontinu. Le foncteur

$$\begin{aligned} C\text{-espaces spectraux de Stein} &\longrightarrow \text{Top} \\ X &\longmapsto X(C) \end{aligned}$$

est fidèle. Par définition les espaces spectraux de Stein sont la catégorie opposée à la catégorie de certaines C-algèbres de Frechet d'un type particulier. Une propriété importante de ces espaces est que si

$$X_0 \longleftarrow X_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow X_i \longleftarrow X_{i+1} \longleftarrow \dots$$

est un système projectif d'espaces analytiques rigides réduits de Stein dont les morphismes de transition sont finis et surjectifs alors la limite

$$\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

existe dans la catégorie des espaces spectraux de Stein. De plus ses C-points sont l'espace topologique $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} X_n(C)$.

Définition 11 ([F10])**.** *Un espace de Banach-Colmez effectif est un groupe dans la catégorie des C-espaces spectraux de Stein de la forme $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} G$ où G est un C-groupe analytique rigide de type*

p-divisible et les morphismes de transition sont la multiplication par p,

$$G \xleftarrow{\times p} G \xleftarrow{\times p} \dots \xleftarrow{\times p} G \xleftarrow{\times p} G \xleftarrow{\times p} \dots$$

On note $U(G) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} G$. On note $\mathcal{BC}^+$ la catégorie des espaces de Banach-Colmez effectifs.

Si G est un groupe analytique rigide de type p-divisible

$$U(G)(C) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid x_n \in G(C),\ px_{n+1} = x_n\}.$$

et on vérifie que le groupe $U(G)(C)$ est naturellement un $\mathbb{Q}_p$-espace de Banach. Cela définit un foncteur fidèle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{BC}^+ & \longrightarrow & \text{Banach} \\ X & \longmapsto & X(C). \end{array}$$

La suite exacte (1) induit une suite exacte d'espaces de Banach

$$\begin{array}{rcl} 0 \longrightarrow V_p(G[p^\infty]) \longrightarrow U(G)(C) & \longrightarrow & \operatorname{Lie} G \longrightarrow 0 \\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & \log(x_0). \end{array}$$

De plus si V est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel on peut définir un espace de Banach-Colmez « étale »V^{an} qui est le spectre de l'algèbre $\mathcal{C}^0_c(V,C)$. Si W est un C-espace vectoriel de dimension finie on peut définir W^{an} qui est l'espace spectral de Stein associé à $W \otimes \mathbb{G}_a^{rig}$. Cela définit deux foncteur pleinement fidèles

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Q}_p - \text{espaces vectoriels de dimension finie} & \longrightarrow & \mathcal{BC}^+ \\ C - \text{espaces vectoriels de dimension finie} & \longrightarrow & \mathcal{BC}^+. \end{array}$$

La suite exacte précédente provient alors d'une suite de Banach-Colmez

$$V_p(G[p^\infty])^{an} \longrightarrow U(G) \longrightarrow (\operatorname{Lie} G)^{an}.$$

Théorème 30 ([F10]). *Soit H un groupe formel p-divisible modulaire sur $\mathcal{O}_C$ (cf. définition 9, par exemple H est défini sur $\mathcal{O}_K$ avec K valué complet de valuation discrète et $C|K|\mathbb{Q}_p$). Alors l'espace de Banach-Colmez $U(H^{rig})$ ne dépend que de la réduction de H sur le corps résiduel de H.*

De plus si M désigne le module de Dieudonné covariant de la réduction de H il y a des identifications d'espaces de Banach données par des applications de périodes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_p(H) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & U(H^{rig})(C) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Lie} H[\frac{1}{p}] \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Fil}(M\otimes B^+_{cris})^{\varphi=p} \arrow[r] & (M\otimes B^+_{cris})^{\varphi=p} \arrow[r] & \operatorname{Lie} H[\frac{1}{p}] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Définition 12. *On pose $U(0) = \mathbb{Q}_p^{an} \in \mathcal{BC}^+$. Si $\lambda \in \mathbb{Q}\cap]0,1]$ on pose $U(\lambda) \in \mathcal{BC}^+$ comme étant égal à $U(H^{rig})$ où H est n'importe quel groupe formel p-divisible modulaire sur $\mathcal{O}_C$ de réduction un groupe p-divisible simple à isogénie près de pente de Dieudonné-Manin λ.*

Il y a donc un isomorphisme d'espaces de Banach $U(\lambda)(C) \simeq (B^+_{cris})^{\varphi^h = p^d}$ si $\lambda = \dfrac{d}{h}$ avec $(d,h) = 1$. Pour H un groupe formel p-divisible modulaire il y a donc un isomorphisme

$$U(H^{rig}) \simeq \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} U(\lambda)^{m_\lambda}$$

où m_λ est la multiplicité de λ dans le polygone de Newton de la fibré spéciale de H.
Afin d'aller plus loin on a besoin d'élargir la catégorie précédente en lui ajoutant formellement les quotients du type $C^{an}/\mathbb{Q}_p^{an}$.

Définition 13 ([F10]). *Soit la catégorie formée des couples (X,V) où $X \in \mathcal{BC}^+$, V est un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie de $X(C)$ et*

$$Hom((X,V),(X',V')) = \{f \in Hom(X,X') \mid f(V) \subset V'\}/Hom(X,V'^{an})\}.$$

On note $\mathcal{BC}$ la catégorie précédente localisée relativement aux flèches $(X,V) \longrightarrow (X',V')$ induisant un isomorphisme $X(C)/V \xrightarrow{\sim} X'(C)/V'$. On l'appelle la catégorie des espaces de Banach-Colmez.

Le théorème principal de [F10] est alors le suivant (théorème qui a été démontré par Colmez du point de vue de ses objets par des méthodes différentes dans [9]).

Théorème 31 ([F10]). *La catégorie $\mathcal{BC}$ est abélienne. De plus le foncteur*

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{BC} & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p - \textit{espaces de Banach} \\ X & \longmapsto & X(C) \end{array}$$

est fidèle. Une suite d'espaces de Banach-Colmez est exacte si et seulement si la suite associée d'espaces de Banach l'est. Il existe deux fonctions additives dimension et hauteur

$$\dim, \mathrm{ht} : \mathcal{BC} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

telles que $\dim C^{an} = 1$, $\dim \mathbb{Q}_p^{an} = 0$, $\mathrm{ht}\, C^{an} = 0$ *et* $\mathrm{ht}\, \mathbb{Q}_p^{an} = 1$.

On a par exemple, $\dim U(G) = \dim G$ et $\mathrm{ht}\, G = \mathrm{ht}\, G[p^\infty]$.

8.3. **Filtrations de Harder-Narasimhan.** Avant d'aller plus loin j'ai besoin de deux constructions que je n'expliquerai pas ici. Tout d'abord, il se trouve que l'on peut étendre le foncteur qui à un C-espace vectoriel de dimension finie W associe $W^{an} \in \mathcal{BC}^+$ en un foncteur pleinement fidèle

$$\begin{array}{rcl} B_{dR}^+\text{-modules de longueur finie} & \longrightarrow & \mathcal{BC} \\ W & \longmapsto & W^{an}. \end{array}$$

Il se trouve ensuite que l'on peut définir pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ un espace de Banach-Colmez $U(\lambda) \in \mathcal{BC}$ tel que $U(\lambda)(C) = (B_{cris}^+)^{\varphi^h = p^d}$ si $\lambda = \dfrac{d}{h}$ avec $(d,h) = 1$ (on a défini précédemment $U(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$).

Proposition 6 ([F10]). *Soit $X \in \mathcal{BC}$. Sont équivalents :*
- *X se plonge dans l'espace de Banach-Colmez associé à un B_{dR}^+-module de longueur finie*
- *X peut s'écrire comme une extension*

$$0 \longrightarrow V^{an} \longrightarrow X \longrightarrow W^{an} \longrightarrow 0$$

où V est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie et W un B_{dR}^+-module de longueur finie.

Définition 14. *On note $\mathcal{BC}^a$ la sous-catégorie de $\mathcal{BC}$ formé des X vérifiant les conditions équivalentes de la proposition 6 précédente et tels que $Hom(C^{an}, X) = 0$.*

Par construction on a que $\forall \lambda \in \mathbb{Q}_{\geq 0},\ U(\lambda) \in \mathcal{BC}^a$.

Théorème 32 ([F10]). *La catégorie $\mathcal{BC}^a$ est une sous-catégorie exacte de $\mathcal{BC}$. De plus les objets de $\mathcal{BC}^a$ possèdent des filtrations de Harder-Narasimhan relativement à la fonction pente $\mu = \dfrac{\deg}{\mathrm{ht}}$.*

Théorème 33 ([F10]). *Pour $\lambda \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ l'objet $U(\lambda) \in \mathcal{BC}^a$ est semi-stable de pente λ.*

Voici le corollaire qui nous permet finalement d'obtenir le théorème 25.

Corollaire 4. *Soit H un groupe formel p-divisible modulaire sur $\mathcal{O}_C$. On a alors une égalité de polygones concaves*

$$\mathrm{HN}\big(U(H^{rig})\big) = \mathrm{Newt}(H \otimes k_C)^{\diamond}.$$

8.4. **Perspectives.** Se pose la question suivante : *Les $U(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, sont-ils les seuls objets semi-stables de la catégorie $\mathcal{BC}^a$?* Je n'ai pas encore assez d'intuition sur ces objets pour savoir si cela est vrai.

On doit pouvoir relier les filtrations précédentes aux filtrations définies par Kedlaya ([19]).

On doit également pouvoir définir un produit tensoriel sur la catégorie $\mathcal{BC}$ et définir un tenseur foncteur des catégories de φ-modules filtrés définies par Fontaine vers ces catégories. On pourra peut-être ainsi traduire les conditions d'admissibilité de Fontaine en termes de semi-stabilité.

On peut définir la variante suivante de la catégorie $\mathcal{BC}$. Soit K valué complet tel que $C = \widehat{\overline{K}}$. On peut alors définir une catégorie $\mathcal{BC}_K$ des K-espaces de Banach-Colmez. Il s'agit d'objets de $\mathcal{BC}$ munis d'une donnée de descente de C à K vérifiant certaines conditions. Il y a alors un foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{BC}_K & \longrightarrow & \text{Représentations banachiques continues de } \mathrm{Gal}(\overline{K}|K) \\ X & \longmapsto & X(C) \end{array}$$

On a déjà vu que ce foncteur est fidèle. Certains résultats de [15] m'amènent à conjecturer que ce foncteur est pleinement fidèle lorsque K est de valuation discrète à corps résiduel parfait, en d'autres termes tout morphisme d'espaces de Banach $X(C) \longrightarrow Y(C)$ qui commute à l'action de Galois est automatiquement analytique.

Articles présentés

[F1] Laurent Fargues. Une suite spectrale de Hochschild-Serre pour l'uniformisation de Rapoport-Zink. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(9) :739–742, 2002.

[F2] L. Fargues. Cohomologie des espaces de modules de groupes p-divisibles et correspondances de langlands locales. In *Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et Correspondances de Langlands locales, Asterisque 291*, pages 1–199, 2004.

[F3] Laurent Fargues. Application de Hodge-Tate duale d'un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramification. *Duke Math. J.*, 140(3) :499–590, 2007.

[F4] L. Fargues. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques. In *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, Progress in math., 262, pages 1–325. Birkhäuser, 2008.

[F5] Laurent Fargues. Dualité de Poincaré et involution de Zelevinsky dans la cohomologie étale équivariante des espaces analytiques rigides. *Prépublication, http://www.math.u-psud.fr/~Prepublications.html.*

[F6] Laurent Fargues. Filtration de monodromie et cycles évanescents formels. *Accepté pour publication à invent. math..*

[F7] L. Fargues. La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats. *Accepté pour publication à Journal für die reine und angewandte Mathematik.*

[F8] L. Fargues. Théorie de la réduction pour les groupes p-divisibles. *Prépublication, http://www.math.u-psud.fr/~fargues/Prepublications.*

[F9] Laurent Fargues. Groupes analytiques rigides de type p-divisible. *Prépublication, http://www.math.u-psud.fr/~Prepublications.html.*

[F10] Laurent Fargues. Les espaces de Banach-Colmez et leurs filtrations. *En préparation.*

Références

[1] Ahmed Abbes and Takeshi Saito. Ramification of local fields with imperfect residue fields. *Amer. J. Math.*, 124(5) :879–920, 2002.

[2] Anne-Marie Aubert. Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif p-adique. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(6) :2179–2189, 1995.

[3] Alexandru Ioan Badulescu. Global Jacquet-Langlands correspondence, multiplicity one and classification of automorphic representations. *Invent. Math.*, 172(2) :383–438, 2008. With an appendix by Neven Grbac.

[4] V. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, 1990.

[5] V. Berkovich. Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78 :5–161, 1993.

[6] V. Berkovich. Vanishing cycles for formal schemes. *Invent. Math.*, 115(3) :539–571, 1994.

[7] V. Berkovich. Vanishing cycles for formal schemes. II. *Invent. Math.*, 125(2) :367–390., 1996.

[8] Pascal Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de shimura simples. *À paraitre à inventiones math.*

[9] P. Colmez. Espaces de Banach de dimension finie. *J. Inst. Math. Jussieu*, 1(3) :331–439, 2002.

[10] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques. *Invent. Math.*, 169(1) :75–152, 2007.

[11] A. J. de Jong. Étale fundamental groups of non-Archimedean analytic spaces. *Compositio Math.*, 97(1-2) :89–118, 1995. Special issue in honour of Frans Oort.

[12] G. Faltings. Group schemes with strict $\mathcal{O}$-action. *Mosc. Math. J.*, 2(2) :249–279, 2002.

[13] G. Faltings. A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld. In *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 of *Contemp. Math.*, pages 115–129, 2002.

[14] Laurent Fargues. *Lettre à Elena Mantovan et Richard Taylor.*

[15] Jean-Marc Fontaine. Presque C_p-représentations. *Doc. Math.*, (Extra Vol.) :285–385 (electronic), 2003. Kazuya Kato's fiftieth birthday.

[16] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[17] Guy Henniart. Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $\mathrm{GL}(n)$ sur un corps p-adique. *Invent. Math.*, 139(2) :439–455, 2000.

[18] M. J. Hopkins and B. H. Gross. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. In *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, volume 158 of *Contemp. Math.*, pages 23–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[19] Kiran S. Kedlaya. A p-adic local monodromy theorem. *Ann. of Math. (2)*, 160(1) :93–184, 2004.

[20] Elena Mantovan. On certain unitary group Shimura varieties. *Astérisque*, (291) :201–331, 2004. Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et correspondances de Langlands locales.

[21] Colette Mœglin. Classification des séries discrètes pour certains groupes classiques p-adiques. In *Harmonic analysis, group representations, automorphic forms and invariant theory*, volume 12 of *Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap.*, pages 209–245. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.

[22] M. Rapoport, Th. Zink. *Period spaces for p-divisible groups.* Number 141 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[23] J.D. Rogawski. *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, volume 123 of *Annals of Mathematics Studies.* Princeton University Press, Princeton,NJ, 1990.

[24] P. Schneider, U. Stuhler. Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 85 :97–191, 1997.

[25] Peter Schneider. Verdier duality on the building. *J. Reine Angew. Math.*, 494 :205–218, 1998. Dedicated to Martin Kneser on the occasion of his 70th birthday.

[26] A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p-adic groups. II. On irreducible representations of $\mathrm{GL}(n)$. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(2) :165–210, 1980.

CNRS–université Paris-Sud Orsay
E-mail address: `laurent.fargues@math.u-psud.fr`