

Isocristaux munis de structures additionnelles

Laurent Fargues

11 mars 2004

1 Préliminaires

1.1 Introduction

La motivation est la suivante. Soit G un groupe p -divisible sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Son isocristal de Dieudonné vérifie alors l'inégalité de Mazur : son polygone de Newton est supérieur à celui de Hodge et tous deux ont mêmes points terminaux. A polygone de Hodge fixé, parmi les polygones de Newton possibles il en existe un maximal ayant une seule pente, celui "supersingulier".

Considérons maintenant un groupe p -divisible muni d'une action de $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, c'est à dire d'une décomposition $G = G_1 \oplus G_2$. Supposons que les hauteurs de G_1 , resp. G_2 , soient fixées : n_1 , resp. n_2 . Notons de même d_1 , d_2 leurs dimensions et supposons les fixées. L'inégalité de Mazur pour le polygone de Newton du groupe p -divisible G est alors plus faible que celle couplée pour les groupe G_1 et G_2 . De plus, parmi les polygones de Newton de G_1 et G_2 il y a un maximal, mais il a deux pentes : d_1/n_1 et d_2/n_2 , il n'est plus supersingulier en général.

Ce cas particulier très simple correspond au cas des isocristaux munis d'une $GL_{n_1} \times GL_{n_2}$ -structure et ayant pour polygone de Hodge fixé le polygone donné par le cocaractère de Shimura

$$\mu(z) = \text{diag}(\underbrace{z, \dots, z}_{d_1}, 1, \dots, 1) \times \text{diag}(\underbrace{z, \dots, z}_{d_2}, 1, \dots, 1)$$

Bien sûr tout se complique si l'on considère des actions d'une algèbre plus générale ou encore pire, des polarisations.

1.2 Références

Les références sont dans l'ordre chronologique

- [2] Pour l'étude des classes de σ -conjugaison dans le cas quasi-déployé
- [5] Pour l'inégalité de Mazur dans le cas non-ramifié
- [4] Pour l'étude des classes de σ -conjugaison dans le cas quelconque et l'inégalité de Mazur générale.

1.3 Notations

Définition 1. Soit $F|\mathbb{Q}_p$ une extension de degré fini et G un groupe réductif sur F . On note

- $\text{Rep } G$ la catégorie Tannakienne des représentations linéaires de dimension finie de G sur F
- ω_G le foncteur fibre canonique sur $\text{Rep } G$
- $L = \widehat{F^{nr}}$ et σ le Frobenius de $L|F$
- $\text{Isoc}_{L|F}$ la catégorie Tannakienne F -linéaire des isocristaux relativement à $L|F$ et σ , c'est à dire des couples (N, φ) où N est un L -ev. de dimension finie et $\varphi : N \xrightarrow{\sim} N$ est un isomorphisme σ -linéaire
- ω_{Isoc} le foncteur fibre canonique : $\text{Isoc}_{L|F} \longrightarrow L$ - ev.

2 Rappels sur $\text{Isoc}_{L|F}$

Cette catégorie Tannakienne n'est pas neutre. Elle est semi-simple. Son lien est abélien donc défini sur F . Il s'agit du pro-tore

$$\mathbb{D} = \varprojlim \mathbb{G}_m \text{ tel que } X^*(\mathbb{D}) = \mathbb{Q}$$

Et par définition $\mathbb{D}_L = \text{Aut}^\otimes(\omega_{\text{Isoc}})$.

Pour tout $(N, \varphi) \in \text{Isoc}_{L|F}$ si $N = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} N_\lambda$ alors \mathbb{D} agit sur N_λ via $z \mapsto z^\lambda$.

La gerbe associée est définie à isomorphisme près par un élément du $H_{\text{fpqc}}^2(\text{Spec}(F), \mathbb{D})$ (le fpqc est là car L n'est pas de type fini sur F). Mais en fait, $\text{Isoc}_{L|F}$ possède un foncteur fibre sur F^{nr} (au lieu de $\widehat{F^{nr}}$). Si $N = \bigoplus_{\lambda} N_\lambda$ en posant

$$\tilde{\omega}(N) = \bigcup_{s \gg 0} \bigoplus_{\lambda} (N_\lambda)^{\varphi^{s=\pi^s \lambda}}$$

(où $s \gg 0$ est pour la relation de divisibilité) alors

$$\tilde{\omega}(N) \otimes_{F^{nr}} L \xrightarrow{\sim} N \text{ et donc } \tilde{\omega} \otimes_{F^{nr}} L \xrightarrow{\sim} \omega_{\text{Isoc}}$$

(Si le dénominateur des pentes de N divise s on peut faire cela sur F_s l'extension non-ramifiée de degré s , mais les isocristaux dont les pentes ont un dénominateur divisant s ne sont pas stables sous \otimes).

Donc, la classe du $H_{\text{fpqc}}^2(\text{Spec}(F), \mathbb{D})$ provient d'une classe du $H_{\text{ét}}^2(F^{nr}|F, \mathbb{D})$ qui via la dualité de Tate-Nakayama s'identifie au dual de Pontryagin de \mathbb{Q} discret $\text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Alors, la classe de la gerbe associée à $\text{Isoc}_{L|F}$ correspond à la projection $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

3 Définitions et premières propriétés

Définition 2. On note $B(G) = \text{Hom}^\otimes(\text{Rep } G, \text{Isoc}_{L|F}) / \sim$ où Hom^\otimes désigne les \otimes -foncteurs fidèles (i.e. qui transforment foncteurs fibres en foncteurs fibres et \sim désigne les classes d'isomorphismes).

Remarquons que

$$\text{Hom}^\otimes(\text{Rep } G, \text{Isoc}_{L|F}) \simeq \left\{ \begin{array}{l} (\omega, \varphi) \text{ où } \omega \text{ est un foncteur fibre sur } \text{Rep } G \text{ à valeurs dans les } L\text{-ev. et} \\ \varphi : \omega \otimes_{L, \sigma} L \xrightarrow{\sim} \omega \text{ est un isomorphisme de foncteurs fibres} \end{array} \right\}$$

Mais, $H^1(L, G) = \{1\}$ (Steinberg). Donc,

$$\forall (\omega, \varphi) \in \text{Hom}^\otimes(\text{Rep } G, \text{Isoc}_{L|F}) \quad \omega \simeq \omega_G \otimes_F L$$

Considérons le sous-ensemble de $\text{Hom}^\otimes(\text{Rep } G, \text{Isoc}_{L|F})$ formé des (ω, φ) où $\omega = \omega_G \otimes_F L$ (= et pas \simeq). Étant donné que $(\omega_G \otimes_F L)^{(\sigma)} = \omega_G \otimes_F L$ et que $\text{Isom}(\omega_G \otimes L, \omega_G \otimes L) = G(L)$ on a un plongement

$$\begin{array}{l} G(L) \subset \text{Hom}^\otimes(\text{Rep } G, \text{Isoc}_{L|F}) \\ b \mapsto F_b \text{ où } F_b(V, \rho) = (V \otimes_L, \rho(b)\text{Id} \otimes \sigma) \end{array}$$

et

$$\boxed{B(G) = G(L) / \sim}$$

où on vérifie que \sim est la relation de σ -conjugaison : $b \sim gbg^{-\sigma}$.

4 Le morphisme des pentes

A $b \in G(L)$ est associé $\boxed{\nu_b : \mathbb{D}_L \longrightarrow G_L}$ le morphisme de liens associé i.e.

$$\forall (V, \rho) \in \text{Rep } G \quad (V_L, \rho(b)\sigma) = \bigoplus_{\lambda} (V_L)_{\lambda} \quad \text{et} \quad \rho \circ \nu_b(z) = \bigoplus_{\lambda} \underbrace{z^{\lambda}}_{\text{sur } (V_L)_{\lambda}}$$

et donc, $[b] \in B(G)$ définit une classe de conjugaison sous $G(L)$ de cocaractères sur L , $\nu_b : \mathbb{D}_L \rightarrow G_L$. On vérifie concrètement que

$$\boxed{\nu_{gbg^{-\sigma}} = g\nu_b g^{-1}}$$

Etant donné que ν_b n'est pas seulement un morphisme de groupes mais plutôt un morphisme de liens et \mathbb{D} est commutatif, la classe de conjugaison de ν_b est définie sur F . En fait,

$$\boxed{(\nu_b)^{\sigma} = \nu_{b^{\sigma}} = \nu_{b^{-1}bb^{\sigma}} = b^{-1}\nu_b b}$$

(En fait, grâce à l'existence de $\tilde{\omega}$ ν_b est défini sur F^{nr} i.e. sur F_s pour s grand).

Remarquons maintenant le

Lemme 1. *Si H est un groupe réductif quasi-déployé sur un corps K et $\beta : \mathbb{G}_m \rightarrow G_{\overline{K}}$ est tel que la classe de conjugaison de β est définie sur K alors cette classe de conjugaison possède un point à valeurs dans K .*

Démonstration. Soit B un Borel sur K et $T \subset B$ un tore maximal. Soit $\Delta \subset X^*(T)$ un ensemble de racines simples à valeurs dans $\text{Lie } B$. On peut supposer que $\beta \in X^*(T)$ et quitte à le ramener dans la chambre de Weyl positive que $\forall \alpha \in \Delta \quad \langle \beta, \alpha \rangle \geq 0$. Un tel β est alors unique dans sa classe de conjugaison. Mais alors,

$$\forall \tau \in \text{Gal}(\overline{K}|K) \quad \langle \beta^{\tau}, \alpha^{\tau} \rangle \geq 0$$

car B étant défini sur K $\text{Gal}(\overline{K}|K)$ permute Δ . Donc, $\forall \tau \quad \beta^{\tau} = \beta$. \square

Donc, si G est quasideployé, quitte à σ -conjuguer b , on peut supposer que ν_b est défini sur F , $\boxed{\nu_b : \mathbb{D} \rightarrow G}$.

5 Classes decent

Soit $[b] \in B(G)$. Soit $s \in \mathbb{N}$ tel que $(s.\nu_b) : \mathbb{D} \rightarrow G$ se factorise par $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{G}_m$ i.e. $\forall \lambda$ pente de b $s\lambda \in \mathbb{Z}$.

Soit le foncteur fibre $(F_s|F$ non-ramifiée de degré s)

$$\begin{aligned} \omega_{b,s} : \text{Rep } G &\longrightarrow F_s - \text{ev.} \\ (V, \rho) &\longmapsto (V_L)^{(\rho(b)\sigma)^s = (s.\nu_b)(\pi)\sigma^s} \end{aligned}$$

Alors, comparé au torseur $\omega_G \otimes_F F_s$, la différence est une classe dans le $H^1(F_s, G)$. Mais d'après Steinberg $H^1(F^{nr}, G) = \{1\}$ i.e. le torseur $\text{Isom}^{\otimes}(\omega_{b,s}, \omega_G \otimes_F F_s)$ possède un point à valeurs dans une extension $F_{s'}$ de F_s , $s|s'$. Quitte à agrandir s on peut donc supposer qu'il y a un isomorphisme

$$\omega_{b,s} \simeq \omega_G \otimes_F F_s$$

Soit un tel isomorphisme. Après extension des scalaires à L il fournit un isomorphisme $\omega_G \otimes_F L \xleftarrow{\sim} \omega_{b,s} \simeq (\omega_G \otimes_F F_s) \otimes_{F_s} L \simeq \omega_G \otimes_F L$. D'où un élément $g \in G(L)$. En σ -conjugant b par g on peut donc supposer que

$$\omega_{b,s} = \omega_G \otimes F_s$$

ce qui se traduit par

$$\boxed{(b\sigma)^s = (s.\nu_b)(\pi)\sigma^s}$$

On dit alors que b est decent.

6 Lemme de Shapiro

Si $F'|F$ et G est sur F' alors

$$\underbrace{B(G)}_{\substack{\text{relativement} \\ \text{\AA } F'^{nr}}} \simeq \underbrace{B(\text{Res}_{F'/F} G)}_{\substack{\text{relativement} \\ \text{\AA } F'^{nr}}}$$

Remarque 1. L'isomorphisme ci dessus change ν_b en le multipliant par $f_{F'/F}$.

7 Le groupe J_b

Définition 3. $\forall b \in G(L)$ on note

$$J_b = \text{Aut}(F_b)$$

où $F_b : \text{Rep } G \rightarrow \text{Isoc}_{L|F}$.

J_b est un groupe algébrique sur F au sens où $\forall R$ F -algèbre $J_b(R) = \text{Aut}_{F_b^{(R)}}(F_b^{(R)})$ où $F_b^{(R)}$ est obtenu par extension des scalaires aux catégories R -linéaires (remplacer les Hom par des $\text{Hom} \otimes_F R$). Ainsi,

$$J_b(R) = \{g \in G(L \otimes_F R) \mid \underbrace{gb\sigma = b\sigma g}_{\Leftrightarrow gb=b\sigma g} \in G(L \otimes_F R) \rtimes \sigma^{\mathbb{Z}}\}$$

Le groupe J_b est *réductif* sur F . La classe d'isomorphisme de J_b ne dépend que de $[b] \in B(G)$. Sur L , $\text{Isoc}_{L|F} \otimes L \simeq \text{Rep } \mathbb{D}_L$. Donc,

$$J_{b/L} \simeq \text{Centralisateur de } \nu_b \text{ dans } G_L$$

En particulier si G est quasiséployé

$$J_b \text{ est une forme tordue de } C_G(\nu_b)$$

On vérifie aussitôt que si b est "decent", $(b\sigma)^s = (s.\nu_b)(\pi)\sigma^s$ alors $J_{b/F_s} \simeq C_G(\nu_b)$. Le cocycle définissant J_b étant alors $c_\sigma = \text{int}_{b^{-1}} \in \text{Aut}(C_G(\nu_b))$.

\implies Si G est quasiséployé, $b \in C_G(\nu_b)$ puisque ν_b est défini sur F ,

$$J_b \text{ est une forme intérieure de } C_G(\nu_b), \text{ un sous-groupe de Levi de } G$$

Si G est quelconque, on vérifie que J_b est une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi de la forme intérieure quasi-déployée de G (Indication : transférer ν_b à un caractère de G^*).

8 L'inclusion $H^1(F, G) \hookrightarrow B(G)$

On a une sous-catégorie Tannakienne pleine $\text{Isoc}_{L|F}^0 \subset \text{Isoc}_{L|F}$ formée des isocristaux unités (i.e. de pentes nulles). Il y a une équivalence de \otimes -catégories

$$\begin{aligned} \text{Isoc}_{L|F}^0 &\xrightarrow{\sim} F - \text{ev.} \\ (N, \varphi) &\mapsto N^{\varphi=Id} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}^\otimes(\text{Rep } G, \text{Isoc}_{L|F}^0) / \sim & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}^\otimes(\text{Rep } G, \text{Isoc}_{L|F}) / \sim & \xlongequal{\quad} & B(G) \\ \downarrow \simeq & & & & \uparrow \\ \text{Hom}^\otimes(\text{Rep } G, F - \text{ev.}) / \sim & \xlongequal{\quad} & \{\text{foncteurs fibres de Rep } G\} / \sim & \xrightarrow{\sim} & H^1(F, G) \end{array}$$

On a donc une suite

$$\begin{array}{ccc} H^1(F, G) \hookrightarrow B(G) & \rightarrow & \text{Hom}_L(\mathbb{D}, G_L)/G(L) - \text{conjugaison} \\ [b] & \mapsto & [\nu_b] \end{array}$$

où $H^1(F, G) = \{[b] \mid [\nu_b] = 1\}$.

Remarque 2. Plus généralement $\forall [b] \in B(G) \{[b'] \in B(G) \mid \nu_{b'} \sim \nu_b\} \simeq H^1(F, J_b)$

9 Le cas des tores

Proposition 1. Il y a un isomorphisme fonctoriel en le tore T sur F compatible au changement de base

$$\boxed{B(T) \simeq X_*(T)_\Gamma}$$

—> faire le cas $T = \mathbb{G}_m$, appliquer Shapiro (alias chgt. de base) à un tore induit, pour T quelconque prendre une résolution de T par des tores induits. Le cas \mathbb{G}_m se décrit en $B(\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ via $[b] \mapsto v(b)$ (à $n \in \mathbb{Z}$ zst associé l'isocristal de Tate^{⊗n}, $F(n)$).

Pour $[\alpha] \in X_*(T)_\Gamma$, si $\alpha : \mathbb{G}_{mE} \rightarrow T_E$, si $E|E_0|F$ où $E_0|E$ est l'extension maximale non-ramifiée dans E alors l'élément de $B(T)$ associé est

$$\boxed{N_{E|E_0}(\alpha(\pi_E)) \in T(E_0) \subset T(L)}$$

9.1 Compatibilité à la dualité de Tate-Nakayama

Il s'agit du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(F, T) & \hookrightarrow & B(T) & & & & \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & & & \\ 0 & \longrightarrow & (X_*(T)_\Gamma)_{\text{torsion}} & \hookrightarrow & X_*(T)_\Gamma & \longrightarrow & X_*(T)_\Gamma \otimes \mathbb{Q} = X_*(T)_\mathbb{Q}^\Gamma \\ & & & & & & \\ & & & & [b] & \longmapsto & [\nu_b] \end{array}$$

où la ligne du bas est exacte.

9.2 Réinterprétation en termes du dual de Langlands

Exo. :

$$\boxed{B(T) \simeq X^*(\widehat{T}^\Gamma)}$$

Donc, le diagramme précédent devient

$$\begin{array}{ccc} H^1(F, T) & \hookrightarrow & B(T) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \pi_0(\widehat{T}^\Gamma)^D & \hookrightarrow & X^*(\widehat{T}^\Gamma) \end{array}$$

où le D désigne un dual de Pontryagin.

10 Classes basiques

Définition 4. $[b] \in B(G)$ est basique si ν_b est à valeurs dans le centre de G_L i.e. si J_b est une forme intérieure de G .

10.1 Classes de σ -conjugaison abélianisées

G_{sc} = revêtement universel de G_{der} .

Définition 5. $B_{ab}(G) = B(G_{sc} \rightarrow G) := H^1(\sigma^{\mathbb{Z}}, G_{sc} \rightarrow G)$ au sens de Labesse.

— Il résulte du calcul pour les tores et de l'homotopie

$$[T_{sc} \rightarrow T] \sim [G_{sc} \rightarrow G]$$

pour T un tore maximal dans G et T_{sc} son image réciproque dans G que

$$\boxed{B_{ab}(G) \simeq X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma)}$$

Le morphisme $[1 \rightarrow G] \rightarrow [G_{sc} \rightarrow G]$ induit une application d'abélianisation

$$\boxed{\kappa : B(G) \longrightarrow B_{ab}(G)}$$

Exemple 1. – Si G_{der} est simplement connexe et $D = G/G_{der}$ est le co-centre, $\kappa : B(G) \rightarrow B(D)$ est la projection

– Si $G = GL_n/F$, $\kappa : B(G) \rightarrow \mathbb{Z}$, $[b] \mapsto v(\det b)$ est le point terminal du polygone de Hodge

Proposition 2. La restriction de κ à $B(G)_{basique}$ induit un isomorphisme

$$\boxed{\kappa : B(G)_{basique} \xrightarrow{\sim} B_{ab}(G)}$$

— cf. Kottwitz I (le point clef est de remarquer que $\forall T$ elliptique $B(T) \rightarrow B(G)_{basique}$ en utilisant (Kneser) que $H^1(F, T/Z_G) \rightarrow H^1(F, G_{ad})$).

11 Classification dans le cas quasi-déployé

Soit G quasi-déployé. Le morphisme ν_b étant défini sur F , $C_G(\nu_b)$ est un sous-groupe de Levi de G . Notons le M . Étant donné que $b \in C_G(\nu_b)(L)$, $[b]$ provient de $B(M)_{basique}$. On vérifie alors que

$$B(G) \simeq \{(M, [b]) \text{ où } M \text{ est un sous-groupe de Levi de } G \text{ et } [b] \in B(M)_{basique}\} / \sim$$

où \sim est la $G(F)$ -conjugaison ($\forall g \in G(F) \ g : B(M) \xrightarrow{\sim} B(g^{-1}Mg)$).

12 L'ensemble $B(G, \mu)$

Hypothèse : On suppose ici que G est non-ramifié.

Soit $\mu : \mathbb{G}_m/\overline{F} \rightarrow G/\overline{F}$. Soit B un Borel sur F , $A \subset B$ un tore déployé maximal et T un tore maximal tel que $A \subset T \subset B$.

12.1 Un ordre sur la chambre de Weyl positive

Soit $\Delta \subset X^*(T)$ un ensemble de racines simples relativement à (T, B) , $\Delta^\vee = \text{co-racines}$, $\Omega = \text{groupe de Weyl sur } \overline{F}$. Soit la chambre positive

$$\mathcal{C} = \{ \omega \in X_*(T)_\mathbb{Q} \mid \forall \alpha \in \Delta \quad \langle \omega, \alpha \rangle \geq 0 \}$$

Alors,

$$\mathcal{C} \simeq \Omega \backslash X_*(T) \simeq G(\overline{F}) - \text{conjugaison} \backslash X_*(G)$$

Définition 6. Soient $\omega_1, \omega_2 \in X_*(T)_\mathbb{Q}$. On dit que $\omega_1 \leq \omega_2$ si

$$\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 \in \sum_{\alpha^\vee \in \Delta^\vee} \mathbb{R}_+ \cdot \alpha^\vee$$

où $\tilde{\omega}_1$ et $\tilde{\omega}_2$ sont les représentants de ω_1 et ω_2 dans \mathcal{C} sous l'action de Ω .

Exemple 2. $G = GL_{n/F}$, $\omega_1(z) = \text{diag}(z^{\lambda_n}, \dots, z^{\lambda_1})$ $\lambda_n \geq \dots \geq \lambda_1$ i.e. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{C}$. Idem $\omega_2(z) = \text{diag}(z^{\mu_n}, \dots, z^{\mu_1})$ $\mu_n \geq \dots \geq \mu_1$. Alors, $\omega_1 \geq \omega_2 \Leftrightarrow$ Les polygones associés ont même points terminaux et celui de ω_1 est en dessous de celui de ω_2 . Où on associe à $(\lambda_n, \dots, \lambda_1)$ le polygone sur le segment $[0, n]$ débutant en $(0, 0)$ et tel que sur $[i, i+1]$ il ait pour pente λ_i .

12.2 Définition de l'ensemble

A μ sont associés $\widehat{\mu} : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $\mu_1 = \widehat{\mu}_{Z(\widehat{G})_\Gamma}$ et $\mu_2 = \widehat{\mu}_{\widehat{T}_\Gamma} \in X^*(\widehat{T})_\Gamma \otimes \mathbb{Q} \simeq X_*(A)_\mathbb{Q}$.

Lorsque G_{der} est simplement connexe et $f : G \rightarrow G/G_{\text{der}} = D$,

$$\begin{aligned} X_*(D) &\rightarrow X_*(D)_\Gamma \simeq B(D) \simeq B_{\text{ab}}(G) \\ f \circ \mu &\mapsto \mu_1 \end{aligned}$$

et si μ est défini sur $E|F$,

$$\mu_2 = \frac{1}{[E:F]} \sum_{\tau \in \text{Gal}(E|F)} (\widetilde{\mu^\tau}) \in X_*(A)_\mathbb{Q}$$

où $(\widetilde{\mu^\tau})$ est l'unique représentant de μ^τ dans \mathcal{C} .

Définition 7.

$$B(G, \mu) = \{ [b] \in B(G) \mid \kappa(b) = \mu_1 \text{ et } \nu_b \leq \mu_2 \}$$

Proposition 3. – En restriction à $B(G, \mu)$ l'application de Newton est injective : $B(G, \mu) \hookrightarrow X_*(A)_\mathbb{Q}$

– Il existe une unique classe basique dans $B(G, \mu)$

13 Une version Tannakienne de l'inégalité de Mazur

Le groupe G est toujours non-ramifié. On note $\Lambda_0 \in \text{Immeuble de } G \text{ sur } F$ un point hyperspécial. Il y a une action de $G(L) \rtimes \sigma$ sur l'immeuble de G sur L . Notons \mathcal{L} la $G(L)$ -orbite de Λ_0 . Elle est stable sous l'action de $G(L) \rtimes \sigma$. Il y a également une application inv de position relative

$$\text{inv} : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{O}_L) \backslash G(L) / \mathcal{G}(\mathcal{O}_L) \simeq \Omega \backslash X_*(T)$$

où $\mathcal{G}(\mathcal{O}_L) = \text{Stab}(\Lambda_0 \otimes \mathcal{O}_L)$ et à $\bar{\omega} \in \Omega \backslash X_*(T)$ est associé $\mathcal{G}(\mathcal{O}_L) \omega(\pi) \mathcal{G}(\mathcal{O}_L)$.

Théorème 1. Supposons qu'il existe $\Lambda \in \mathcal{L}$ tel que

$$\text{inv}(\Lambda, b\sigma\Lambda) = \bar{\mu} \in \Omega \backslash X_*(T)$$

Alors, $b \in B(G, \mu)$.

L'énoncé ci dessus signifie que si l'on a un cristal avec structures additionnelles de polygone de Hodge arithmétique avec structures additionnelles fixé, celui donné par μ alors $[b]$ vérifie une inégalité de Mazur généralisée tenant compte de la G -structure.

—> On suppose G_{der} simplement connexe pour simplifier. Montrons d'abord que $\kappa(b) = \mu_1$. Si $\Lambda = t\Lambda_0$ où $t \in G(L)$ alors $\exists g \in \mathcal{G}(\mathcal{O}_L)$ tel que

$$bt^\sigma \Lambda_0 = g\mu(\pi)t\Lambda_0$$

et donc

$$t^{-1}\mu(\pi)^{-1}g^{-1}bt^\sigma \in \mathcal{G}(\mathcal{O}_L)$$

Si $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{G}_{der}$ on a donc

$$f(\mu(\pi)) = f(b)f(g)(f(t)f(t)^{-\sigma})$$

Or $f(g) \in \mathcal{G}/\mathcal{G}_{der}(\mathcal{O}_L) \Rightarrow [f(g)] = 0 \in B(D)$ (théorème de Lang). Donc,

$$[f(\mu(\pi))] = [f(b)] \in B(D)$$

Montrons maintenant la seconde partie : $\nu_b \leq \mu_2$. La démonstration consiste à appliquer l'inégalité de Mazur dans chaque réalisation du G -isocrystal. Soit donc $(V, \rho) \in \text{Rep } G$. Soit T' un tore maximal de $\text{GL}(V)$ contenant $\rho(T)$. Le stabilisateur de Λ , $\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$ est tel que $\rho(\mathcal{G}(\mathcal{O}_F))$ est compact. Il existe donc un réseau Λ'_0 dans V tel que $\rho(\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)) \subset \text{GL}(\Lambda'_0)$. D'où une application $\rho : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ où \mathcal{L}' est la $G(L)$ -orbite de $\Lambda'_0 \otimes \mathcal{O}_L$. Alors,

$$\rho(\text{inv}(\Lambda, b\sigma\Lambda)) = \text{inv}(\rho(\Lambda), b\sigma\rho(\Lambda))$$

D'après l'inégalité de Mazur classique on en déduit que

$$\rho \circ \nu_b \leq \rho \circ \mu$$

Mais ν_b est défini sur F . On en déduit donc par moyennage que

$$\rho \circ \nu_b \leq \rho \circ \mu_2$$

Le théorème est donc une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 4. Soient $\omega_1, \omega_2 \in X_*(A)_{\mathbb{Q}}$. Sont équivalents

- $\omega_1 \leq \omega_2$
- $\forall \rho \in \text{Rep } G \quad \rho \circ \omega_1 \leq \rho \circ \omega_2$

→ remarquer que tout élément dominant de $X_*(A)_{\mathbb{Q}}$ est un multiple rationnel d'un plus haut poids d'une représentation définie sur F .

14 Isocristaux munis de structures additionnelles : le cas de GL_n

Nous donnons ici une description explicite pour le groupe linéaire de la classification des isocristaux munis de structures additionnelles. Soit $F|\mathbb{Q}_p$ une extension non ramifiée de degré d . Soit $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\text{GL}_n)$. Le groupe algébrique G se déploie sur F en

$$G/F = \prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \text{GL}_{n/F}$$

où le groupe $\Gamma = \text{Gal}(F|\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ opère par permutation cyclique sur les facteurs en translatant par un élément de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Un tore maximal de G défini sur \mathbb{Q}_p est $T = (F^\times)^n$. Un tore déployé maximal est $A = (\mathbb{Q}_p^\times)^n \hookrightarrow (F^\times)^n = T$. Le groupe de Weyl absolu est $W = (\mathfrak{S}_n)^d$.

L'ensemble $B(G)$ classifie les isocristaux munis d'une action de F . A la classe de σ -conjugaison de b est associée la classe d'isomorphisme de l'isocristal muni d'une action de F , $(F^n \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b \otimes \sigma)$. Il est bien connu que la catégorie des isocristaux munis d'une action de F est équivalente à la catégorie des F -isocristaux, ce qui se traduit dans le langage de Kottwitz par le lemme de Shapiro $B(G) \simeq B(\mathrm{GL}_{n/F})$ (section 6). Rappelons que dans cette correspondance si (N, φ) est muni d'une action de F alors on lui associe le F -isocristal (N_τ, φ^d) où $\tau : F \hookrightarrow L$ est fixé et $N_\tau = \{n \in N \mid \forall x \in F \ x.n = \tau(x)n\}$.

Un élément $b \in B(G)$ est donné par les pentes du F -isocristal associé

$$\lambda_1 = \frac{d_1}{h_1} > \dots > \lambda_r = \frac{d_r}{h_r}$$

où $d_i \wedge h_i = 1$, et des multiplicités m_1, \dots, m_r vérifiant $\sum_i m_i h_i = n$. Le point de Newton associé ([2]) est

$$\nu_b = \left(\underbrace{\frac{\lambda_1}{d}, \dots, \frac{\lambda_1}{d}}_{m_1 h_1}, \dots, \underbrace{\frac{\lambda_r}{d}, \dots, \frac{\lambda_r}{d}}_{m_r h_r} \right) \in X_*(A)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^n$$

(le dénominateur d provient du fait que les pentes d'un F -isocristal sont d fois les pentes de l'isocristal muni d'une action de F associé). Le centralisateur du morphisme des pentes ν_b est le sous-groupe de Levi

$$M_b = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{m_1 h_1}) \times \dots \times \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{m_r h_r})$$

et b provient d'une classe basique de M_b , où l'on rappelle qu'une classe basique est une classe possédant une unique pente. Rappelons que l'on note J_b le groupe des automorphismes de l'isocristal muni de ses structures additionnelles. Dans le cas présent, la structure additionnelle consiste en l'action de F . Le groupe J_b est donc le groupe des automorphismes du F -isocristal associé :

$$J_b = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{m_1}(D_{\lambda_1})) \times \dots \times \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{m_r}(D_{\lambda_r}))$$

où D_λ/F est une algèbre centrale simple sur F d'invariant λ .

Le groupe dérivé G^{der} étant simplement connexe, $X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma) = X_*(D)_\Gamma = B(D)$ où $D = G/G^{der}$ et $Z(\widehat{G})$ désigne le centre du L-groupe connexe. Or, le déterminant induit un isomorphisme de groupes $\det : G/G^{der} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m$, et donc $B(D) = \mathbb{Z}$. On identifiera donc $X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma)$ à \mathbb{Z} . L'application de Kottwitz κ définie dans la section 6 de [3] (confère également le théorème 1.15 de [5]) est alors

$$\begin{aligned} \kappa : B(G) &\longrightarrow \mathbb{Z} = X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma) \\ b &\longmapsto v_p(\det(b)) \end{aligned}$$

et est telle que

$$\kappa(b) = \sum_{i=1}^r m_i d_i$$

qui est la dimension de l'isocristal ou encore le point terminal du polygone de Newton.

14.1 Polygone de Hodge :

Soit maintenant un cocaractère $\mu : \mathbb{G}_{m/\mathbb{Q}_p} \rightarrow G/\mathbb{Q}_p$. Étant donné un élément de $B(G)$, a chaque représentation linéaire de G est associé un isocristal filtré, la filtration étant définie par μ . Dans [5] et [4] est défini un sous-ensemble $B(G, \mu) \subset B(G)$ en termes de théorie des groupes réductifs. Cette ensemble s'interprète comme une version Tannakienne de l'inégalité de Mazur sur les polygones de Hodge et Newton au sens où étant donné un élément de $B(G)$, a chaque représentation linéaire de G est associé un isocristal filtré, la filtration étant définie par μ . L'élément de $B(G)$ est dans $B(G, \mu)$ ssi tous ces isocristaux filtrés sont tels que le polygone de Newton associé soit au

dessus de celui de Hodge et aient mêmes points terminaux.

Le cocaractère μ est défini sur F et définit un élément de

$$X_*(T)/W \simeq \{(x_{ij})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n} \mid x_{ij} \in \mathbb{Z}, \forall i \quad \forall j \leq j' \quad x_{ij} \geq x_{ij'}\}$$

sur lequel le groupe de Galois Γ opère via $\sigma.(x_{ij}) = (x_{i-1j})_{i,j}$. Nous supposons μ minuscule donné, avec les notations ci dessus, par $\mu = (\mu_{ij})_{i,j}$ où $\forall i \quad \mu_{ij} = 1$ pour $1 \leq j \leq a_i$ et $\mu_{ij} = 0$ si $j > a_i$, les a_i étant des entiers compris entre 1 et n . Le groupe de Galois $\Gamma = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ agit par permutation sur $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$, et le corps de définition de la classe de conjugaison de μ a pour groupe de Galois le stabilisateur de $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$ dans $\Gamma = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Le L-groupe connexe de G est donné par

$${}^L G^0 = \widehat{G} = \prod_{\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

et le L-groupe par ${}^L G = \widehat{G} \rtimes \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ où $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ agit par permutation cyclique des composantes. Au cocaractère μ de G , Kottwitz associe un caractère du centre du L-groupe connexe $Z(\widehat{G})$ défini par $\mu_1 = \widehat{\mu}|_{Z(\widehat{G})} \in \mathbb{Z}$ ([4] section 6.1), et donné avec nos notations par

$$\mu_1 = \sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} a_i$$

le point terminal du polygone de Hodge. De même ([4] section 6.1), Kottwitz définit μ_2 par

$$\begin{aligned} X_*(T)_\Gamma \otimes \mathbb{Q} &\simeq X_*(A)_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^n \\ \widehat{\mu}|_{\widehat{\Gamma}} \otimes 1 &\longmapsto \mu_2 \end{aligned}$$

Avec les notations précédentes

$$\mu_2 = \frac{1}{d} \sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \underbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}_{a_i}$$

Kottwitz définit dans la section 6 de [4] le sous ensemble $B(G, \mu)$ de $B(G)$ formé des classes de σ -conjugaison vérifiant le théorème de Mazur sur la position relative des polygones de Newton et de Hodge tel qu'il généralisé dans [5]. D'après ce qui précède, dans notre cas particulier cet ensemble possède la description suivante (après avoir multiplié l'inégalité $Newton(b) \leq \mu_2$ par d)

$$\begin{aligned} B(G, \mu) &= \{b \in B(G) \mid Newton(b) \leq \mu_2 \in X_*(A)_\mathbb{Q} \text{ et } \kappa(b) = \mu_1\} \\ &= \left\{ \underbrace{(\lambda_1, \dots, \lambda_1)}_{m_1 h_1}, \dots, \underbrace{(\lambda_r, \dots, \lambda_r)}_{m_r h_r} \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \underbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}_{a_i} \right\} \\ &\text{et } \sum_{i=1}^r m_i d_i = \sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} a_i \end{aligned}$$

où \leq désigne l'ordre usuel sur la chambre de Weyl positive (section 2.1 de [5]). L'inégalité s'interprète comme "le polygone de Newton est au dessus du polygone de Hodge", et l'égalité comme "les points terminaux des polygones de Newton et de Hodge sont égaux".

Rappelons qu'en effet, à une suite $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in X_*(A)_\mathbb{Q}/W = \{(y_i)_i \in \mathbb{Q}^n \mid \forall i \quad y_i \geq y_{i+1}\}$ on associe un polygone convexe à pentes rationnelles constantes sur les segments entiers $[i, i+1]$ $0 \leq i \leq n-1$ défini par

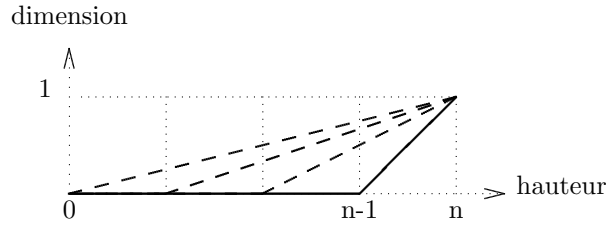
$$P(0) = 0 \text{ et } \forall 1 \leq k \leq n \quad P(k) = \sum_{r=1}^k x_{n+1-r}$$

Dans la description donnée ci dessus de $B(G, \mu)$ (i.e. après multiplication par d des inégalités) les pentes du polygone de Hodge sont donc entières et les polygones de Newton possibles sont tous les polygones convexes à pentes rationnelles P vérifiant $P(0) = 0$, P à même point terminal que celui de Hodge, est au dessus de celui-ci et a des points de rupture à coordonnées entières. Cette description permet de calculer “graphiquement” l’ensemble $B(G, \mu)$ pour un μ donné.

Exemple 3. Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, et $b \in B(G)$, $b \in B(G, \mu)$ ssi l’isocrystal filtré $(L^n, b\sigma, \mu)$ vérifie la condition usuelle : le polygone de Hodge est en dessous du polygone de Newton et ils ont mêmes points terminaux.

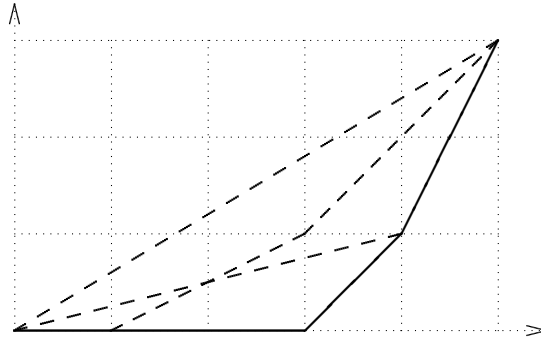
Pour un élément de $B(G)$, la condition d’appartenance à $B(G, \mu)$ généralise donc la condition sur les polygones de Newton et Hodge de l’isocrystal filtré associé qui tient compte des structures additionnelles.

Exemple 4. Dans le cas de signature $(1, n-1) \times (0, n) \times \dots \times (0, n)$ étudié dans [1] les différents polygones possibles sont les suivants (Hodge est en trait plein)



On remarque en particulier que les polygones sont totalement ordonnés et qu’il n’y a que deux pentes dont l’une est toujours étale et l’autre “de dimension 1”. Cette dernière propriété justifie l’adjectif “simple” associé aux variétés de Shimura utilisées dans [1].

Voici cependant un exemple de signature $(1, 4) \times (2, 3) \times (0, 5) \times \dots \times (0, 5)$ qui montre qu’en général la situation est beaucoup plus compliquée (nous n’avons pas dessiné tous les polygones de Newton)



Le lecteur effrayé par une pente 2 associée un groupe p -divisible remarquera que les pentes de la classe d’isogénie associée sont les pentes du polygone ci dessus divisées par d .

14.2 Classe basique dans $B(G, \mu)$

Il existe une unique classe basique dans $B(G, \mu)$. Notons la b_0 . Avec les notations précédentes celle-ci est donnée par l’unique pente

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} a_i$$

Si la pente λ est égale à $\frac{r}{s}$ où $r \wedge s = 1$, alors, la multiplicité de la pente est $\frac{n}{s}$, et l’on a

$$J_{b_0} = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_{\frac{n}{s}}(D_\lambda)$$

Références

- [1] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [2] R.E. Kottwitz. Isocrystals with additional structure. *Compositio Math.*, 56(2) :201–220, 1985.
- [3] R.E. Kottwitz. Shimura varieties and λ -adic representations. In *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions*, volume 1 of *Perspectives in Mathematics*, pages 161–209. Academic Press, 1990.
- [4] R.E. Kottwitz. Isocrystals with additional structure.II. *Compositio Math.*, 109(3) :255–339, 1997.
- [5] M. Richartz, M. Rapoport. On the classification and specialization of F-isocrystals with additional structure. *Compositio Math.*, 103(2) :153–181, 1996.