SUR LA GERBE DE KALETHA, LA COURBE ET L'ENSEMBLE DE KOTTWITZ

LAURENT FARGUES

À Jean Giraud.

Résumé. Dans ce texte on reprend les travaux de Kaletha sur les formes intérieures rigides d'un groupe réductif sur un corps local d'un point de vue géométrique. On interprète en particulier la gerbe qu'il a introduite du point de vue de la courbe, en remplaçant celle-ci par une gerbe naturelle vivant au dessus de la courbe. On introduit une catégorie Tannakienne d'isocristaux étendus, généralisant la notion usuelle d'isocristal. Cela nous amène à définir et étudier un ensemble de Kottwitz étendu d'isocristaux étendus avec structure additionnelles, contenant l'ensemble usuel et dont on montre qu'il est invariant par formes intérieures. Enfin on montre que cet ensemble classifie les fibrés principaux sur la gerbe au dessus de la courbe.

Abstract. In this text we retake the work of Kaletha on rigid inner forms of a reductive group over a local field from a geometric point of view. We interpret in particuler the gerbe he introduced from the point of view of the curve, by replacing it by a natural gerbe sitting over the curve. We introduce a Tannakian category of extended isocrystals, generalizing the usual notion of isocrystal. This leads us to define and study an extended Kottwitz set of isocrystals with additional structures, containing the usual set, and for for which we prove it is invariant under inner forms. Finally we prove that this set classifies principal bundles on the gerbe sitting over the curve.

Introduction

Ce texte est né d'une double volonté :

(1) Comprendre les travaux de Kaletha ([10], [12]).
(2) Étendre les constructions géométriques de [5] afin d'atteindre toutes les formes intérieures d'un groupe réductif sur un corps local et pas seulement les formes étendues pures de Kottwitz.

Interprétation géométrique de la gerbe de Kaletha. Dans [10] Kaletha définit une gerbe galoisienne rig, que l'on notera dans ce texte Kal, sur un corps p-adique E, liée par un schéma en groupes pro-fini u. Par gerbe galoisienne on entend un 2-cocyle de $\mathrm{Gal}(\overline{E}|E)$ à valeurs dans $u(\overline{E})$. Il montre que la cohomologie de cette gerbe à valeurs dans G permet d'atteindre toutes les formes intérieures de G. Grâce à cela il peut formuler une version de la correspondance de Langlands locale pour toutes les formes intérieures d'un groupe quasidéployé fixé sur E, étendant en cela les conjectures pour les formes étendues pures de Kottwitz, cf. [9] et [12]. Une des justifications de Kaletha quant à la validité de son approche est une version globale de cette gerbe et la compatibilité aux facteurs de transfert globaux dans le cadre du transfert endoscopique ([11]). De fait, la gerbe Kal sur E est définie de façon ad hoc par un calcul de cohomologie galoisienne utilisant la théorie du corps de classe. Dans ce texte on cherche à comprendre de façon géométrique l'apparition de cette gerbe, sans cocycles mais du point de vue purement géométrique, et de fait on montre qu'elle apparaît naturellement du point de vue de la courbe. Le point de départ de cette approche résidant dans l'égalité ([3])

$$\eta_X = \eta_{cdc}$$

Date: 18 mars 2022.
L'auteur a bénéficié du support du projet ANR-19-CE40-0015 "COLOSS" et du projet ERC Advanced Grant 742608 GeoLocLang.

entre la classe fondamentale de la courbe (point de vue géométrique) et la classe fondamentale de la théorie du corps de classe (point de vue purement arithmétique). Plus précisément, le schéma en groupes u apparaît dans une suite exacte

$$1 \longrightarrow u \longrightarrow \tilde{t} \longrightarrow t \longrightarrow 1$$

où t est un pro-tore de revêtement universel $\tilde{t}$. On obtient le résultat suivant, cf. le corollaire 7.4.

Théorème 0.1. *Il existe un t-torseur naturel $\mathbb{T}$ sur la courbe X tel que l'image réciproque de la gerbe* Kal *de Kaletha à X, $X \times \mathrm{Kal}$, soit la gerbe des racines de $\mathbb{T}$, $[\tilde{t}\backslash\mathbb{T}]$.*

Cela caractérise complètement de façon géométrique la gerbe arithmétique Kal et fournit même une définition n'utilisant pas la théorie du corps de classe, cf. remarque 7.5.

Atteindre toutes les formes intérieures. Pour un groupe réductif G sur E l'ensemble de Kottwitz $B(G) = G(\breve{E})/\sigma$-conjugaison classifie les G-isocristaux ([14], [15], [17]). Lorsque $[b] \in B(G)$ est basique son centralisateur tordu J_b est une forme intérieure de G. Les formes intérieures de G ainsi obtenues sont les formes étendues pures généralisant les formes pures de Vogan. De fait, $H^1(E, G) \subset B(G)$ s'identifie aux G-isocristaux ≪ racines de l'unité ≫ i.e. ceux dont le vecteur de Newton est nul. Malheureusement, si le centre de G n'est pas connexe, *en général l'application*

$$B(G)_b \to B(G_{ad})_b = H^1(E, G_{ad})$$

qui à $[b]$ basique associe $[J_b]$ n'est pas surjective. C'est par exemple le cas de SL_n dont la seule forme étendue pure est SL_n lui-même.

Afin de comprendre le problème il est idéal de géométriser la situation et se placer du point de vue de la courbe. D'après [3] il y a une bijection

$$B(G) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(X, G)$$

qui associe à $[b]$ la classe du G-torseur étale $\mathscr{E}_b$. D'un point de vue encore plus géométrique, le morphisme structural $X \to \mathrm{Spec}(E)$ se factorise via

$$X \longrightarrow \mathrm{Kott} \longrightarrow \mathrm{Spec}(E)$$

où Kott est la gerbe de Kottwitz des foncteurs fibres sur la catégorie des isocristaux. L'application précédente est alors le tiré en arrière $H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}, G) \to H^1_{\text{ét}}(X, G)$. Il y a une suite exacte

$$H^1_{\text{ét}}(X, G) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X, G_{ad}) \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(X, Z_G).$$

De plus, d'après [3] pour tout tore T sur E, $H^2_{\text{ét}}(X, T) = 0$ (en particulier le groupe de Brauer de X est nul). Il s'en suit que l'obstruction à la surjectivité de $B(G) \to B(G_{ad})$ vit dans

$$H^2_{\text{ét}}(X, \underline{\pi}_0(Z_G)).$$

Il y a un moyen ≪ canonique ≫ de tuer cette classe : une telle classe classifie, à équivalence près, une gerbe étale de lien $\underline{\pi}_0(Z_G)$ au dessus de X et le tiré en arrière vers cette gerbe annule cette classe de cohomologie (cf. section 1).

L'exemple de SL_n est frappant. Si D_λ est une algèbre à division d'invariant $\lambda = \frac{d}{h}$ avec $(d, h) = 1$ sur E et $n = hr$ alors la forme intérieur $\mathrm{SL}_r(D_\lambda)$ de SL_n n'est pas pure dès que $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Considérons le fibré vectoriel $\mathscr{E} = \mathcal{O}(\lambda)^r$ sur la courbe. L'obstruction à relever le PSL_n-torseur associé en un SL_n-torseur est donnée par

$$c_1(\det \mathscr{E}) \in H^1_{\text{ét}}(X, \mu_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.\eta_X$$

c'est à dire $(rd$ modulo $n).\eta_X$. Cette obstruction est tuée au dessus de la gerbe des racines n-ièmes de $\mathcal{O}(1)$, gerbe de classe η_X dans $H^2_{\text{ét}}(X, \mu_n)$. De fait, sur cette gerbe

$$\mathscr{E} \otimes \left(\sqrt[n]{\mathcal{O}(1)} \right)^{\otimes -rd}$$

est naturellement un SL_n-torseur relevant notre PSL_n-torseur.

Suivant ces idées on démontre le théorème suivant, cf. les théorèmes 8.9 et 8.10.

Théorème 0.2. *(1) Soit $\mathfrak{X} = [\,\tilde{t}\backslash\mathbb{T}\,] \to X$. Alors, pour tout groupe diagonalisable D sur E, on a $H^2_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, D) = 0$. En particulier, $H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, G) \to H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, G_{ad})$ est surjectif.*

(2) Il en va de même en remplaçant la gerbe « géométrique » $\mathfrak{X}$ par la gerbe « arithmétique » $\mathrm{Kott} \times \mathrm{Kal}$.

Extension du domaine de la lutte. Il est naturel, après divers essais pour arriver à la bonne définition, d'introduire *l'ensemble de Kottwitz étendu*

$$B_e(G)$$

comme le sous-ensemble de

$$H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott} \times \mathrm{Kal}, G)$$

formé des classes telles que la classe de conjugaison Galois invariante de morphisme $u_{\overline{E}} \to G_{\overline{E}}$ soit centrale c'est à dire donnée par un morphisme $\lambda : u \to Z_G$. L'ensemble de Kottwitz se retrouve comme

$$B(G) = \{[b] \in B_e(G) \mid \lambda_b = 1\} \subset B_e(G)$$

et il y a une suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \longrightarrow B(G) \longrightarrow B_e(G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(u, Z_G) \longrightarrow 1.$$

Comme application du théorème 0.2 on obtient le résultat suivant qui rend l'utilisation de l'ensemble étendu beaucoup plus aisée que celle de sa version non-étendue, cf. la proposition 9.8 et le corollaire 9.9.

Théorème 0.3. *L'ensemble de Kottwitz étendu est invariant par formes intérieures, en particulier il existe un élément basique $[b] \in B_e(G^*)_b$ induisant une bijection $B_e(G^*) \xrightarrow{\sim} B_e(G)$ envoyant $[b]$ sur 1.*

Remarquons qu'une fois un tel b choisi on obtient une description de l'ensemble de Kottwitz « classique » $B(G)$ comme

$$\{[b'] \in B_e(G^*) \mid \lambda_{b'} = \lambda_b\} \xrightarrow{\sim} B(G).$$

Cela ramène donc également l'étude de $B(G)$ à celle de $B_e(G^*)$.

Le calcul de l'ensemble de Kottwitz d'un tore est un point essentiel de [14]. Voici son analogue, cf. la proposition 9.7.

Théorème 0.4. *Pour un tore T il y a une identification canonique*

$$B_e(T) = X_*(T)_{\mathbb{Q}}/I_\Gamma.X_*(T)$$

où la suite exacte

$$0 \longrightarrow X_*(T)_\Gamma \longrightarrow X_*(T)_{\mathbb{Q}}/I_\Gamma.X_*(T) \longrightarrow X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

s'identifie à la suite

$$0 \longrightarrow B(T) \longrightarrow B_e(T) \longrightarrow \mathit{Hom}(u, T) \longrightarrow 0.$$

Venons en maintenant à l'application κ et sa généralisation, un autre élément important de [14]. On note, cf. section 9.5.1,

$$\pi_1(G)^e_\Gamma = \langle \Phi \rangle^* / \langle \check{\Phi} \rangle + I_\Gamma.X_*(T)$$

avec $\langle \Phi \rangle^* = \{\nu \in X_*(T)_{\mathbb{Q}} \mid \forall \alpha \in \Phi,\ \langle \nu, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}\}$. Il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_1(G)_\Gamma \longrightarrow \pi_1(G)^e_\Gamma \longrightarrow \mathrm{Hom}(u, Z_G) \longrightarrow 0$$

qui permet de voir ce groupe comme une version « étendue » de $\pi_1(G)_\Gamma$. On obtient le résultat suivant, cf. section 9.5 et le théorème 9.12.

Théorème 0.5. *Il y a une application « naturelle » $\kappa : B_e(G) \to \pi_1(G)^e_\Gamma$ étendant l'application de Kottwitz $\kappa : B(G) \to \pi_1(G)_\Gamma$ et induisant une bijection*

$$\kappa : B_e(G)_b \xrightarrow{\sim} \pi_1(G)^e_\Gamma$$

en restriction aux éléments basiques.

Lien avec les travaux de Kaletha. Dans [10] Kaletha introduit un ensemble de cohomologie qui lui permet de définir ses formes intérieures rigides. Voici le lien avec l'ensemble de Kottwitz étendu qui contient donc comme cas particulier le cas de Kaletha, cf. section 10.

Théorème 0.6. *L'ensemble de Kaletha $H^1(u \to W, Z_G \to G)$ s'identifie aux G-isocristaux étendus « racines de l'unité » c'est à dire $\{[b] \in B_e(G) \mid \nu_b = 0\}$. Via l'application κ cet ensemble est* $\ker(\pi_1(G)^e_\Gamma \to X_*(Z_G)^\Gamma_{\mathbb{Q}})$.

On réinterprète également naturellement le lien entre formes intérieures étendues pures et formes rigides de [12] du point de vue de $B_e(G)$, cf. proposition 10.6.

Comparaison avec la géométrie. On obtient une généralisation du théorème principal de [3], cf. le théorème 11.4.

Théorème 0.7. *L'application tiré en arrière de* Kott $\times$ Kal *à* $\mathfrak{X}$ *induit une bijection*

$$B_e(G) \xrightarrow{\sim} \{c \in H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, G) \mid \lambda_c : u \to Z_G\}.$$

Ce théorème est le point de départ de la conjecture de géométrisation qui suit.

Conjecture de géométrisation. On définit un champ étendu Bun^e_G de G-fibrés étendus contenant le champ Bun_G des G-fibrés sur la courbe de [5] et tel que $|\mathrm{Bun}^e_G| = B_e(G)$. Il est muni d'une application localement constante $\kappa : |\mathrm{Bun}^e_G| \to \pi_1(G)^e_\Gamma$. On définit également un champ de paramètres de Langlands étendus $\mathrm{SysLoc}^e_{\widehat{G}}$. On formule alors une conjecture de géométrisation permettant d'atteindre toutes les formes intérieures d'un groupe réductif donné, cf. section 12 et la conjecture 12.8.

Conjecture 0.8. *Pour G quasi-déployé et $\psi : U(E) \to \overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$ non-dégénéré il y a une équivalence*

$$\mathrm{Coh}_{Nilp}(\mathrm{SysLoc}^e_{\widehat{G}/\overline{\mathbb{Z}}_\ell}) \simeq D_{lis}(\mathrm{Bun}^e_G, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)$$

« fournissant une correspondance de Langlands locale » pour toutes les G_b, $[b] \in B_e(G)$ basique et donc toutes les formes intérieures de G.

Le cas archimédien. Dans la section 13 on traite du cas archimédien sur $\mathbb{R}$ des objets précédents. L'analogue géométrique de la courbe est la « droite projective twiwtser » $\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/z \sim -\frac{1}{\bar{z}}$. Elle est munie d'un morphisme $\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}} \to$ Kott où Kott $\to \mathrm{Spec}(\mathbb{R})$ est la gerbe non triviale de lien $\mathbb{G}_m$, l'analogue archimédien de la gerbe de Kottwitz des foncteurs fibres sur les isocristaux. L'ensemble de Kottwitz associé $B(G) = H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}, G)$ se décrit facilement, cf. section 13.2, et on vérifie que

$$B(G) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, G).$$

Notons $u = \widehat{\mathbb{Z}}$ comme schéma en groupe pro-fini constant sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{R})$. On a une identification $u = \varprojlim_{n \geq 1} U(1)[n]$ où $U(1)$ est vu comme tore sur $\mathbb{R}$.

Théorème 0.9. *(1) On a $H^1(\mathbb{R}, u) = 0$ et $H^2(\mathbb{R}, u) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

(2) Soit Kal *la gerbe non triviale de lien u sur Spec($\mathbb{R}$). Il existe un $U(1)$-torseur naturel $\mathcal{T}$ sur $\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}$ tel que $\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}} \times$* Kal *soit la gerbe des racines de $\mathcal{T}$.*

On étudie l'ensemble de Kottwitz étendu associé, cf. section 13.6, $B_e(G)$ qui est l'ensemble des classes $c \in H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott} \times \mathrm{Kal}, G)$ telles que $\lambda_c : u \to Z_G$. On montre le résultat suivant.

Théorème 0.10. *(1) On a $H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Kott} \times \mathrm{Kal}, D) = 0$ pour tout groupe diagonalisable D sur Spec($\mathbb{R}$).*

(2) L'application $B_e(G) \to B_e(G_{ad})$ est surjective et en particulier $B_e(G)$ est invariant par torsion intérieure.

(3) On a $B_e(G) \xrightarrow{\sim} \{c \in H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, G) \mid \lambda_c : u \to Z_G\}$.

Notations.

- E est une extension de degré fini de $\mathbb{Q}_p$
- $\overline{E}$ est une clôture algébrique de E fixée de groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{E}|E)$
- W_E désigne le groupe de Weil de E dans Γ
- lorsqu'on parle de $E'|E$ de degré fini on signifie une extension de E dans $\overline{E}$
- $\breve{E}$ désigne le complété de l'extension maximale non-ramifiée de E dans $\overline{E}$ et σ son Frobenius
- Isoc_E est la catégorie des isocristaux relativement à E c'est à dire les couples (D, φ) où D est un $\breve{E}$-espace vectoriel de dimension finie et φ un isomorphisme σ-linéaire
- G est un groupe réductif sur E
- G^* est une forme intérieure de G

Remerciements : Ce texte est dédié à la mémoire de Jean Giraud, directeur de l'ENS Lyon de 1995 à 2000 ainsi qu'un des fondateurs de la revue Astérisque. Cinquante ans après sa publication l'ouvrage [8] reste une référence.

1. Géométrie des gerbes et effacement des classes de cohomologie de degré 2 d'après Giraud ([8])

1.1. **Effacement des classes de cohomologie.** Soit X un topos d'objet final $*$ et A un groupe abélien dans X. Si $\mathcal{T}$ est un A-torseur, puisque $\mathcal{T}$ possède une section après tiré en arrière via $\mathcal{T} \to *$, l'image de $[\mathcal{T}] \in H^1(X, A)$ dans $H^1(\mathcal{T}, A)$ est nulle. On dispose ainsi d'un moyen canonique de tuer les éléments de $H^1(X, A)$. On va voir qu'il en est de même de $H^2(X, A)$.

Soit donc $\mathfrak{X}$ une gerbe de lien A dans X. Ainsi, pour tout $U \in \mathrm{Ob}X$ et $x \in \mathfrak{X}(U)$ il y a une identification canonique $A_{|U} = \underline{\mathrm{Aut}}(x)$. On utilisera parfois la notation

$$\begin{array}{c} \mathfrak{X} \\ {\scriptstyle BA}\circlearrowleft\big\downarrow \\ * \end{array}$$

pour une telle gerbe. De fait, $\mathfrak{X}$ est naturellement munie d'une action monoïdale $BA \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ du champ de Picard $BA = [*/A]$. D'après ([8]) $\mathfrak{X}$ est déterminée à équivalence près par sa classe

$$[\mathfrak{X}] \in H^2(X, A).$$

Explicitons la construction de cette classe. Soit $U \to *$ un recouvrement tel que $\mathfrak{X}(U) \neq \emptyset$ et fixons $x \in \mathfrak{X}(U)$. Considérons le diagramme simplicial tronqué

$$U \times U \times U \times U \;\substack{\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow}\; U \times U \times U \;\substack{\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow}\; U \times U \rightrightarrows U.$$

Soit le A-torseur

$$\mathcal{T} = \underline{\mathrm{Isom}}(p_1^* x, p_2^* x)$$

au dessus de $U \times U$. Il est muni d'un isomorphisme canonique

$$u : p_{12}^* \mathcal{T} \overset{A}{\times} p_{23}^* \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} p_{13}^* \mathcal{T}. \tag{1}$$

On a de plus la relation de cocycle

$$p_{123}^* u - p_{124}^* u + p_{134}^* u - p_{234}^* u = 0 \in A(U \times U \times U \times U). \tag{2}$$

Cela induit une équivalence entre les couples $(\mathfrak{X}, x)$ comme précédemment et la catégorie des $U \times U$-torseurs $\mathcal{T}$ munis d'un isomorphisme tel que dans l'équation (1) satisfaisant la relation de cocycle (2). Le champ $\mathfrak{X}$ est le quotient de

$$U \times_{\mathfrak{X}} U = \mathcal{T} \rightrightarrows U.$$

Soit $V \to U \times U$ un recouvrement trivialisant $\mathcal{T}$. Soit alors $K_\bullet$ le cosquelette du complexe simplicial tronqué

$$V \coprod U \;\substack{\longrightarrow\\[-2pt]\longleftarrow\\[-2pt]\longrightarrow}\; U.$$

C'est un hyper-recouvrement. Une trivialisation de $\mathcal{T}_{|V}$ permet alors de voir u comme un élément de

$$\check{Z}^2(K_\bullet, A).$$

La classe $[\mathfrak{X}]$ est alors l'image de cet élément via $\check{H}^2(K_\bullet, A) \to H^2(X, A)$.

Le topos $\tilde{\mathfrak{X}}$ associé à $\mathfrak{X}$ est la 2-limite projective

$$2 - \varprojlim_{U \to \mathfrak{X}} X/U$$

où la catégorie en indice est celle des couples (U, f) avec $U \in \mathrm{Ob}X$ et $f \in \mathfrak{X}(U)$, et X/U désigne le topos localisé au dessus de U. Il y a un morphisme de topos $\tilde{\mathfrak{X}} \to X$. La cohomologie de $\mathfrak{X}$ est, par définition, la cohomologie dans ce topos.

Proposition 1.1 ([8, Chap. VIII.5], [7])**.** *L'image de* $[\mathfrak{X}]$ *dans* $H^2(\mathfrak{X}, A)$ *est nulle.*

C'est une conséquence de ce que la gerbe image réciproque de $\mathfrak{X}$ par le morphisme de topos $\tilde{\mathfrak{X}} \to X$ possède une section sur l'objet final du topos $\tilde{\mathfrak{X}}$ et est donc triviale.

Exemple 1.2. *Soit* X *un schéma,* $\mathscr{L}$ *un fibré en droites sur* X *et* $n \geq 1$*. La classe de Chern* $c_1(\mathscr{L}) \in H^2_{fppf}(X, \mu_n)$ *est la classe de la gerbe fppf des racines* n*-ièmes de* $\mathscr{L}$*. Cette classe est tuée au dessus de cette gerbe.*

Remarque 1.3. *On dispose d'une notion plus générale de* n*-gerbe pour tout* $n \geq 1$ *(*[16, Def. 7.2.2.20]*. Lorsque* $n = 1$ *cela correspond au cas précédent d'une gerbe au sens de Giraud. Plus généralement (*[16, Coro. 7.2.2.27]*), l'ensemble* $H^{n+1}(X, A)$ *classifie les* n*-gerbes liées par* A *(dans le* ∞*-topos qui est le nerf de* X*), des « formes tordues » de l'espace d'Eilenberg MacLane* $K(A, n)$*.*

1.2. **Poussé en avant.** Si $A \to A'$ est un morphisme de groupes abéliens il y a un morphisme $H^2(X, A) \to H^2(X, A')$ qui se raffine en une opération sur les gerbes. Plus précisément, on peut définir

$$\mathfrak{X} \overset{BA}{\times} BA'$$

qui est une gerbe de lien A'. Le plus simple afin de voir que ce produit contracté a bien un sens comme champ et non 2-champ est de choisir une présentation de $\mathfrak{X}$, $U \to \mathfrak{X}$ qui fournit un A-torseur $U \times_{\mathfrak{X}} U \to U \times U$. Le poussé en avant de ce A-torseur $(U \times_{\mathfrak{X}} U) \overset{A}{\times} A' \to U \times U$ définit alors $\mathfrak{X} \overset{BA}{\times} BA'$ comme quotient de $(U \times_{\mathfrak{X}} U) \overset{A}{\times} A' \rightrightarrows U$. Il est aisé de vérifier que cela ne dépend du choix de la présentation.

1.3. **Automorphismes.** Soit $\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ l'ensemble des 1-isomorphismes (i.e. les autoéquivalences du point de vue catégorique) de $\mathfrak{X}$. On note

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})/\sim$$

l'ensemble des classes de tels isomorphismes modulo les 2-isomorphismes. Cet ensemble forme un groupe (et ce pour n'importe quel champ). Il y a un morphisme de groupes

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})/\sim \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$$

défini de la façon suivante. Soit $F : BA \xrightarrow{\sim} BA$ une équivalence. L'image du A-torseur trivial $F(A)$ est un A-torseur dans X. Il y a de plus un isomorphisme $F : A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(F(A)) = A$ entre les groupes d'automorphismes de torseurs. Cela définit une application $\mathrm{Aut}(BA) \to \mathrm{Aut}(A)$. On vérifie que cette application descend en le morphisme cherché $\mathrm{Aut}(\mathfrak{X}) \to \mathrm{Aut}(A)$.

Proposition 1.4. *Il y a une identification* $H^1(X, A) \xrightarrow{\sim} \ker(Aut(\mathfrak{X})/\sim \to Aut(A))$.

Démonstration. Si $\mathcal{T}$ est un A-torseur alors l'action monoïdale de BA sur $\mathfrak{X}$ définit une équivalence $\mathcal{T} \overset{A}{\times} - : \mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}$. On vérifie aisément que cela définit un morphisme $H^1(X, A) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})/\sim$. Plus généralement soit $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{X})$ le champ des automorphismes de $\mathfrak{X}$. Le groupoïde $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{X})(U)$ a pour object les équivalences $\mathfrak{X}_{|U} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}_{|U}$ et morphismes les 2-isomorphismes entre deux telles équivalences. L'action monoïdale de BA définit un morphisme de champs

$$BA \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{X}) \times_{\underline{\mathrm{Aut}}(A)} \{1\}$$

i.e. le « noyau » de $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{X}) \to \underline{\mathrm{Aut}}(A)$. Pour vérifier que c'est un isomorphisme il suffit de le faire localement au dessus d'un recouvrement de l'objet final $*$. On peut donc supposer, quitte à remplacer X par X/U pour un $U \in \mathrm{Ob}(X)$, que $\mathfrak{X} = BA$ auquel cas le résultat est facile. On a donc $BA \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Aut}}(\mathfrak{X}) \times_{\underline{\mathrm{Aut}}(A)} \{1\}$ et la proposition s'en suit. $\square$

Exemple 1.5 (Suite de l'exemple 1.2)**.** *Soit $\mathfrak{X}$ la gerbe des racines n-ièmes de $\mathscr{L}$. Soit $[\mathscr{L}'] \in H^1_{fppf}(X, \mu_n)$ où $\mathscr{L}'$ est un fibré en droites muni d'un isomorphisme $\mathscr{L}'^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$. Le choix de $\mathscr{L}'$ définit une équivalence $\mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}$ qui envoie $\sqrt[n]{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{L}' \otimes \sqrt[n]{\mathscr{L}}$.*

1.4. **Description par décalage cohomologique.** Remarquons enfin la propriété suivante liée à des constructions qui vont suivre dans ce texte. Puisque $\mathfrak{X}$ est déterminée à équivalence près par sa classe dans $H^2(\mathfrak{X}, A)$, on peut trouver une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I \longrightarrow J \longrightarrow 0$$

telle que l'image de $[\mathfrak{X}]$ dans $H^2(X, I)$ soit nulle, par exemple en prenant I injectif. Dès lors $[\mathfrak{X}] = \partial[\mathcal{T}]$ avec $\mathcal{T}$ un J-torseur. On a alors

$$\mathfrak{X} \simeq [\mathcal{T}/I].$$

Cela montre que toute gerbe liée par un groupe abélien peut s'écrire de façon « simple » en utilisant un tel procédé de décalage cohomologique.

Exemple 1.6. *Soit k un corps, T un k-tore et X un k-schéma. Soit $\mathbb{T}$ un T-torseur. Notons $\widetilde{T} = \varprojlim_{n \geq 1} T$ le revêtement universel de T de groupe de cocaractères $X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Il y a une suite exacte $1 \to U \to \widetilde{T} \to T \to 1$ où $U = \varprojlim_{n \geq 1} T[n]$. Dès lors, $\big[\mathbb{T}/\widetilde{T}\big] \to X$ est une gerbe fpqc de lien U. Il s'agit de la gerbe des racines de $\mathbb{T}$.*

1.5. **Torseurs sur une gerbe.**

1.5.1. *Généralités.* Soit H un groupe dans X. Par définition un H-torseur sur $\mathfrak{X}$ est un objet de

$$2 - \varprojlim_{U \to \mathfrak{X}} \{\text{torseurs sur } U\}$$

où $U \in \mathrm{Ob}(X)$. Cela est la même chose qu'un morphisme représentable de champs dans X, $\mathcal{T} \to \mathfrak{X}$, avec une action de H au dessus de $\mathfrak{X}$, $H \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, tel que pour tout $U \to \mathfrak{X}$, $U \in \mathrm{Ob}(X)$, le tiré en arrière $\mathcal{T} \times_{\mathfrak{X}} U \to U$ soit un H-torseur.

1.5.2. *La classe de conjugaison de morphisme associée à un torseur.* Tout H-torseur sur BA trivial lorsque tiré en arrière sur $*$ est isomorphe à

$$[A \underset{\lambda}{\backslash} H] \longrightarrow [A \backslash *] = BA$$

pour un morphisme $\lambda : A \to H$. On en déduit une identification

$$\ker(H^1(BA, H) \to H^1(X, H)) = \mathrm{Hom}(A, H)/H(*)$$

où $H(*) = \Gamma(X, H)$ agit par conjugaison et la flèche du membre de gauche est le tiré en arrière via $* \to BA$.

De cela on déduit une application

$$H^1(\mathfrak{X}, H) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{H}om(A, H)/H) \tag{3}$$

qui est le premier invariant de base associé à un torseur sur $\mathfrak{X}$ lorsqu'on essaie de les classifier. Dans cette dernière équation $\mathcal{H}om(A, H)/H$ est un faisceau quotient où H agit par conjugaison sur les morphismes de A dans H. Ce morphisme s'inscrit en fait dans une suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \longrightarrow H^1(X, H) \longrightarrow H^1(\mathfrak{X}, H) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{H}om(A, H)/H). \tag{4}$$

Exemple 1.7. *Soit* $\mathrm{Kott}_E \to Spec(E)$ *la gerbe de Kottwitz des foncteurs fibres sur* Isoc_E*, cf. section 4.1. Soit* $[b] \in B(G)$*, l'ensemble de Kottwitz ([14]), et* $\mathscr{E}_b$ *le* G*-torseur associé sur* Kott_E*. L'image de* $[\mathscr{E}_b] \in H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}_E, G)$ *via l'application (3) est* $[\nu_b] \in \left[Hom(\mathbb{D}_{\overline{E}}, G_{\overline{E}})/G(\overline{E})\right]^{\Gamma}$*. La suite exacte (4) dans ce cas revient à dire que* $H^1(E,G) = \{[b] \in B(G) \mid \nu_b = 1\}$*, les* G*-isocristaux « racines de l'unité ».*

1.5.3. *Groupe des automorphismes d'un torseur.* Rappelons que si $\mathcal{T} \to *$ est un H-torseur dans X alors $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{T})$, le groupe dans X tel que $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{T})(U) = \mathrm{Aut}(\mathcal{T} \times U)$ pour $U \in \mathrm{Ob}(X)$, est une forme intérieure de H. Plus précisément,

$$\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \overset{H,\mathrm{Ad}}{\times} H.$$

La classe d'isomorphisme de cette forme intérieure est l'image de $[\mathcal{T}]$ via $H^1(X,H) \to H^1(X,H_{ad})$. Il s'agit des fameuses « formes intérieures pures ».

La situation est plus compliquée dans le cas d'un torseur sur une gerbe. Si $\mathcal{T} \to \mathfrak{X}$ est un H-torseur notons $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{T})$ le groupe dans X qui à $U \in \mathrm{Ob}(X)$ associe $\mathrm{Aut}(\mathcal{T} \times U)$ où $\mathcal{T} \times U \to \mathfrak{X}_{|U}$ est un $H_{|U}$-torseur.

Soit $U \to \mathfrak{X}$ avec $U \to *$ un recouvrement. On peut de plus supposer que $\mathcal{T} \times_{\mathfrak{X}} U$ est trivial. On a donc un morphisme $f : A_{|U} \to H_{|U}$ associé bien défini à conjugaison près par $H(U)$. On a alors

$$\underline{Aut}(\mathcal{T})_{|U} \simeq \mathrm{Cent}_{H_{|U}}(f).$$

Rappelons que la classe de H-conjugaison de f est définie sur $*$, $[f] \in H^0(X, \mathcal{H}om(A,H)/H)$. La proposition qui suit est laissée en vérification au lecteur.

Proposition 1.8. *Supposons que* $[f] \in H^0(X, \mathcal{H}om(A,H)/H)$ *soit l'image d'un élément* $g \in Hom(A,H)$*. Alors,* $\mathcal{T}$ *possède une réduction naturelle à* $\mathrm{Cent}_H(g)$ *et* $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{T})$ *est la forme intérieure pure de* $\mathrm{Cent}_H(g)$ *obtenue par torsion de* $\mathrm{Cent}_H(g)$ *par cette réduction.*

Exemple 1.9 (Suite de l'exemple 1.7)**.** *Le groupe algébrique* J_b *est le groupe des automorphismes du torseur* $\mathscr{E}_b$ *et* $J_{b/\overline{E}} = \mathrm{Cent}_{G_{\overline{E}}}(\nu_b)$*. Si de plus* G *est quasidéployé la classe de conjugaison de* ν_b *possède un élément défini sur* E *dont le centralisateur est un sous-groupe de Levi* M *de* G*. Alors,* b *est* σ*-conjugué à un élément de* $M(\breve{E})$ *ce qui correspond à une réduction de* $\mathscr{E}_b$ *à* M*.*

1.6. **Lien avec les extensions de groupe et gerbes galoisiennes.**

1.6.1. *Généralités.* Soit G un groupe et X le topos des G-ensembles. Soit A un groupe abélien dans X c'est à dire un groupe abélien muni d'une action de G. Si $\mathfrak{X}$ est une gerbe liée par A dans X alors

$$\mathfrak{X}(\underline{G}) \neq \emptyset$$

où $\underline{G} \in X$ est l'ensemble G muni de l'action par translations à gauche (cette non vacuité est une conséquence de ce que tout G-ensemble est recouvert par une union disjointe de copies de $\underline{G}$).

Fixons $x \in \mathfrak{X}(\underline{G})$ et posons

$$E = \{(g,u) \mid g \in G \text{ et } u : g^*x \xrightarrow{\sim} x\}.$$

Dans cette définition, $g \in G$ agit sur $\underline{G} \in X$ par multiplication à droite par g^{-1}, ce qui définit un isomorphisme $G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\underline{G})$. Cet ensemble E est muni de la structure de groupe

$$(g,u).(g',u') = (gg', u' \circ g'^* u).$$

Ce groupe est de fait une extension

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1. \tag{5}$$

Cela induit une bijection entre gerbes liées par A dans X à équivalence près et les classes d'extension de G par A, bijection raffinée par une équivalence entre de telles gerbes $\mathfrak{X}$ munies de $x \in \mathfrak{X}(\underline{G})$ et la catégorie de telles extensions.

De la même manière soit k un corps, $\overline{k}$ une clôture algébrique et $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$. Soit X le topos étale de $\mathrm{Spec}(k)$ c'est à dire celui des Γ-ensembles discrets. Soit A un faisceau étale de groupes abéliens sur $\mathrm{Spec}(k)$ et $\mathfrak{X}$ une gerbe liée par A. Fixons $x \in \mathfrak{X}(\overline{k})$. On lui associe l'extension

$$1 \longrightarrow A(\overline{k}) \longrightarrow E \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

où $E = \{(\sigma, u) \mid \sigma \in \Gamma \text{ et } u : \sigma^* x \xrightarrow{\sim} x\}$. La classe de cette extension détermine alors $\mathfrak{X}$ à équivalence près.

1.6.2. *Description de l'équivalence inverse.* Bien que nous n'en n'ayons pas besoin voici comment reconstruire la gerbe associée à l'extension (5) de façon naturelle. Rappelons pour cela le concept de lien dans un topos X. Il s'agit en gros d'un groupe à automorphisme intérieur près défini localement sur X. Plus précisément, un lien dans X est une section sur $*$ du champ associé au préchamp qui à $U \in \mathrm{Ob}(X)$ associe le groupoïde
- dont les objets sont les groupes au dessus de U,
- dont les morphismes entre H_1 et H_2 sont $H_1(U)\backslash \mathrm{Isom}(H_1, H_2)/H_2(U)$, où $H_1(U)$ et $H_2(U)$ agissent par conjugaison.

Plus concrètement, un lien est donné par un groupe H sur U, $U \to *$ un recouvrement, et un isomorphisme $v : p_1^* H \xrightarrow{\sim} p_2^* H$ au dessus de $U \times U$ tel que la relation de cocycle $p_{13}^* v = p_{23}^* v \circ p_{12}^* v$ soit satisfaite à un automorphisme intérieur près.

Revenons au topos X des G-ensembles. Notons $\underline{\underline{G}}$ le groupe dans X de groupe sous-jacent G et où l'action de G est donnée par automorphismes intérieures de G sur lui-même. Il y a une action de $\underline{\underline{G}}$ sur $\underline{G}$ donnée par $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$. Cela fait de $\underline{G}$ un $\underline{\underline{G}}$-torseur

$$\begin{array}{c} \underline{G} \\ \big\downarrow \big)_{\underline{\underline{G}}} \\ * \end{array}$$

Remarquons maintenant que le groupe E dans l'extension (5) définit un lien $\underline{E}$ dans X. De fait, si $\pi : E \twoheadrightarrow G$, considérons le G-ensemble $sec(\pi)$ des sections (ensemblistes) de π muni de l'action par conjugaison de G. Le groupe $sec(\pi) \times E$ au dessus de $sec(\pi)$ est muni d'une action de G au dessus de $sec(\pi)$. L'action de $g \in G$ sur $(s, a) \in sec(\pi) \times E$ est donnée par $g.(s, a) = (s \circ \mathrm{int}_g, s(g) a s(g)^{-1})$. Ce lien au dessus de $sec(\pi)$ est muni d'une donnée de descente naturelle via $sec(\pi) \to *$ et définit le lien $\underline{E}$. La suite exacte (5) définit alors une suite exacte de liens dans X

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow \underline{E} \longrightarrow \underline{\underline{G}} \longrightarrow 1.$$

La gerbe associée à l'extension (5) est alors

$$[\underline{E} \backslash \underline{G}]$$

où $\underline{E}$ agit sur $\underline{G}$ via $\underline{E} \to \underline{\underline{G}}$.

Il s'agit donc d'un procédé de décalage cohomologique similaire à celui de la section (1.4) mais plus général en cela qu'il est non-abélien et fait intervenir un lien. Plus précisément, l'image de $[\mathfrak{X}]$ via $H^2(X, A) \to H^2(X, \underline{E})$ est triviale et $[\mathfrak{X}] = \partial[\underline{G}]$.

2. Catégories Tannakiennes de lien un pro-groupe de type multiplicatif

2.1. **Rappel.** Soit k un corps de caractéristique zéro. Rappelons ([2]) l'équivalence suivante. Il y a une équivalence de 2-catégories entre

(1) Les catégories Tannakiennes (essentiellement petites) sur k,

(2) Les gerbes fpqc sur $\mathrm{Spec}(k)$ liées par un lien qui est un schéma en groupes affine sur une extension $k'|k$.

À une catégorie Tannakienne $\mathcal{C}$ on associe la gerbe $\mathfrak{X}$ des foncteurs fibres sur $\mathcal{C}$. Plus précisément, pour S un k-schéma, $\mathfrak{X}(S)$ est le groupoïde des $\otimes$-foncteurs k-linéaires exacts fidèles

$$\mathcal{C} \longrightarrow \{\text{fibrés vectoriels sur } S\}.$$

Dans l'autre sens, à $\mathfrak{X}$ une k-gerbe fpqc on associe la catégorie Tannakienne des fibrés vectoriels sur $\mathfrak{X}$.

2.2. **Description.**

2.2.1. *Généralités.* Soit k un corps de caractéristique zéro de groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$ et D un pro-groupe algébrique de type multiplicatif. Un tel groupe D est complètement déterminé par le Γ-module discret $X^*(D)$. On munit $D(\overline{k})$ de la topologie pro-discrète obtenue en écrivant D comme limite projective de groupes de type multiplicatif (de type fini). Soit

$$c = (c_{\sigma,\tau}) \in Z^2(\Gamma, D(\overline{k}))$$

(cocycles continus) et $\mathcal{C}$ la catégorie Tannakienne associée de lien D et dont la gerbe des foncteur fibres $\mathfrak{X}$ a pour classe $[c] \in H^2(\Gamma, D(\overline{k}))$. Il s'agit d'une gerbe fpqc sur $\mathrm{Spec}(k)$ neutre sur $\mathrm{Spec}(\overline{k})$. Si $D = \varprojlim_i D_i$ est une écriture de D comme limite projective filtrante de groupes de type multiplicatif alors

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} 2 - \varprojlim_i \mathfrak{X} \overset{BD}{\times} BD_i$$

où chacun des membres de la limite projective est une gerbe étale sur $\mathrm{Spec}(k)$. Il lui correspond une écriture

$$\mathcal{C} = 2 - \varinjlim_i \mathcal{C}_i$$

où $\mathcal{C}_i$ est la catégorie Tannakienne des fibrés vectoriels sur $\mathfrak{X} \overset{BD}{\times} BD_i$.

2.2.2. *Représentations.* Soit

$$1 \longrightarrow D(\overline{k}) \longrightarrow E \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1 \tag{6}$$

la suite exacte associée au cocycle précédent. On munit E de la topologie déduite de la topologie profinie sur Γ et pro-discrète sur $D(\overline{k})$. La catégorie Tannakienne $\mathcal{C}$ s'identifie alors à celle des

- $\overline{k}$-espaces vectoriels de dimension finie V,
- munis d'une action semi-linéaire de E, pour tout $g \in E$, si $g \mapsto \tau \in \Gamma$, l'action de g est τ-linéaire,
- telle que la restriction de cette action à $D(\overline{k})$ soit donnée par une représentation algébrique de $D_{\overline{k}}$,
- lorsqu'on munit V de la topologie discrète, l'action de E est continue.

2.2.3. *Espaces vectoriels gradués.* On a la description suivante plus concrète de $\mathcal{C}$ déduite de la précédente. On considère la catégorie tensorielle des $\overline{k}$-espaces vectoriels de dimension finie $X^*(D)$-gradués

$$V = \bigoplus_{\chi \in X^*(D)} V_\chi$$

munis pour tout $\tau \in \Gamma$ d'un isomorphisme τ-linéaire $u_\tau : V \xrightarrow{\sim} V$ compatible à la graduation au sens où

$$u_\tau : V_\chi \xrightarrow{\sim} V_{\chi^\tau}.$$

On demande de plus la condition

$$u_{\sigma\tau} = \chi(c_{\sigma,\tau}).u_\sigma \circ u_\tau^\sigma : V_\chi \xrightarrow{\sim} V_{\chi^{\sigma\tau}}.$$

On ajoute la condition de discrétude usuelle de l'action de Γ.

2.3. ***G*-torseurs.** Il y a deux points de vue équivalents ici. Le premier est celui des objects de $\mathcal{C}$ munis d'une G-structure c'est à dire les $\otimes$-foncteurs fidèles

$$\mathrm{Rep}(G) \longrightarrow \mathcal{C}$$

ou celui des G-torseurs étales sur la gerbe $\mathfrak{X}$. On entend par là un objet de

$$2-\varprojlim_{U\to\mathfrak{X}} \{\text{torseurs étales sur } U\}$$

ce qui est la même chose qu'un morphisme représentable de champs fpqc $\mathcal{T} \to \mathfrak{X}$ avec une action de G au dessus de $\mathfrak{X}$, $G \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, tel que pour tout $U \to \mathfrak{X}$, U un schéma, le tiré en arrière $\mathcal{T} \times_{\mathfrak{X}} U$ soit un G-torseur étale.

Les classes d'isomorphismes de tels objets sont en bijection avec

$$H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, G).$$

On dispose de la description concrète suivante de cet ensemble en termes de « gerbes galoisiennes » c'est à dire de la suite exacte (6). Le groupe $G(\overline{k})$ est muni de l'action de E déduite de $E \to \Gamma$. Alors

$$H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, G) = H^1_{alg}(E, G(\overline{k}))$$

où $H^1_{alg}(E, G) \subset H^1(E, G(\overline{k}))$ (cohomologie continue) désigne les classes de cocycles $E \to G(\overline{k})$ dont la restriction à $D(\overline{k})$ est donnée par un morphisme algébrique $D_{\overline{k}} \to G_{\overline{k}}$.

De ce point de vue, l'application naturelle de restriction d'un cocycle algébrique à $D(\overline{k})$

$$H^1_{alg}(E, G) \longrightarrow \left[\mathrm{Hom}(D_{\overline{k}}, G_{\overline{k}})/G(\overline{k})\right]^{\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)}$$

est l'application (3) de la section 1.5 et il y a une suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \longrightarrow H^1(\Gamma, G(\overline{k})) \longrightarrow H^1_{alg}(E, G) \longrightarrow \left[\mathrm{Hom}(D_{\overline{k}}, G_{\overline{k}})/G(\overline{k})\right]^{\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)}.$$

3. Quelques constructions d'algèbre monoïdale

3.1. Racine n-ième.

3.1.1. *Construction abstraite.* Soit $(\mathcal{C}, \otimes)$ une catégorie monoïdale symétrique d'unité $\mathbf{1}$. Soit $\mathbb{L}$ un objet inversible dans $\mathcal{C}$. On définit alors pour un entier $n \geq 1$

$$\mathcal{C}[\mathbb{L}^{1/n}]$$

comme étant la catégorie des objects $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$-gradués

$$M = \bigoplus_{\alpha \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}} M_\alpha.$$

Soit $(c_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ un 2-cocycle de $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ définissant l'extension $0 \to \mathbb{Z} \to \frac{1}{n}\mathbb{Z} \to \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to 0$. On prendra concrètement ici $c_{\alpha,\beta} = \widetilde{\alpha+\beta} - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \bmod \mathbb{Z}$ où pour $\gamma \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ on note $\tilde{\gamma}$ son représentant dans $\frac{1}{n}\mathbb{Z} \cap [0,1[$. On munit $\mathcal{C}[\mathbb{L}^{1/n}]$ de la structure monoïdale telle que

$$(M \otimes N)_\alpha = \bigoplus_{\beta+\gamma=\alpha} M_\beta \otimes N_\gamma \otimes \mathbb{L}^{\otimes c_{\alpha,\beta}}.$$

On vérifie effectivement que cette règle définit bien une catégorie monoïdale symmétrique. Dans cette catégorie monoïdale $\mathbf{1}[-\frac{1}{n}]$, i.e. $\mathbf{1}$ placé en degré $\frac{1}{n}$ dans la graduation, vérifie

$$\mathbf{1}[-\frac{1}{n}]^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}$$

et est donc une « racine n-ième » de $\mathbb{L}$.

La catégorie monoïdale $\mathcal{C}[\mathbb{L}^{1/n}]$ vérifie la propriété universelle suivante. Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur monoïdal entre catégorie monoïdales symétriques. Supposons donné un objet inversible $\mathbb{I}$ dans $\mathcal{D}$ et un isomorphisme

$$F(\mathbb{L})^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{I}.$$

Le foncteur F s'étend alors en un foncteur $\mathcal{C}[\mathbb{L}^{1/n}] \longrightarrow \mathcal{D}$ envoyant $\mathbf{1}[-\frac{1}{n}]$ sur $\mathbb{I}$.

3.1.2. *Incarnation géométrique.* On dispose de l'incarnation géométrique suivante de la construction abstraite précédente.

Proposition 3.1. *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un topos annelé et $\mathscr{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang* 1*. Soit $\mathfrak{X}$ la gerbe dans X des racines n-ièmes de $\mathscr{L}$. Si* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}$ *désigne la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules dans X, la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules sur $\mathfrak{X}$ s'identifie à*

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}[\mathscr{L}^{1/n}].$$

Démonstration. La correspondance $\mathrm{Ob}X \ni U \mapsto \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_U}[\mathscr{L}_{|U}^{1/n}]$ définit un champ sur X, où l'on note $\mathcal{O}_U = (\mathcal{O}_X)_{|U}$. Il en est de même de $U \mapsto \mathcal{O}_U$-modules sur $\mathfrak{X}_{|U}$. Le foncteur naturel

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}[\mathscr{L}^{1/n}] \longrightarrow \mathcal{O}_X\text{-modules sur } \mathfrak{X}$$

s'étend en un morphisme de champs et il suffit de montrer que c'est localement un isomorphisme. On peut donc supposer $\mathscr{L}$ trivial auquel cas $\mathfrak{X} = [X/\mu_n]$ et l'énoncé est clair, cf. lemme 3.2. □

Le lemme qui suit est bien connu dans le cas des schéma mais est en fait vérifié dans n'importe quel topos annelé.

Lemme 3.2. *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un topos annelé. La catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules sur $[X/\mu_n]$ s'identifie à celle des $\mathcal{O}_X$-modules $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-gradués.*

Démonstration. Le groupe μ_n dans X est représentable par un $\mathcal{O}_X$-module libre de rang n, $\mathcal{O}_X[T]/(T^n - 1)$. La résolution simpliciale standard donnée par la présentation $* \to [*/\mu_n]$ montre que se donner un $\mathcal{O}_X$-module sur $[*/\mu_n]$ est la même chose que se donner un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{M}$ muni d'un morphisme $u : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[T]/(T^n - 1)$ vérifiant $\Delta \circ u = (u \otimes \mathrm{Id}) \circ u$ où $\Delta(T) = T \otimes T$. On écrit $u = \oplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} u_i T^i$ et la condition est alors que $u_i u_j = 0$ si $i \neq j$ et $u_i^2 = \mathrm{Id}$. On a alors $\mathcal{M} = \oplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathrm{Im}(u_i)$. □

3.2. **Une construction plus générale.**

3.2.1. *Construction abstraite.* Soit $(\mathcal{C}, \otimes)$ comme précédemment. Soit

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B/A \longrightarrow 0$$

une suite exacte de groupes abéliens. Supposons donné un foncteur entre groupoïdes de Picard

$$A \longrightarrow \mathcal{P}ic_{\mathcal{C}}$$

que l'on note $\alpha \mapsto \mathbb{L}_\alpha$. On entend par là que l'on a des isomorphismes

$$u_{\alpha,\beta} : \mathbb{L}_\alpha \otimes \mathbb{L}_\beta \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}_{\alpha+\beta}$$

satisfaisant la relation de cocycle

$$u_{\alpha+\beta,\gamma} \circ (u_{\alpha,\beta} \otimes Id) = u_{\alpha,\beta+\gamma} \circ (Id \otimes u_{\beta,\gamma})$$

et $\mathbb{L}_0 = \mathbf{1}$.

Fixons une section ensembliste $s : B \to B/A$ telle que $s(0) = 0$. Celle-ci définit un 2-cocycle $(c_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in B/A}$ à valeurs dans A,

$$c_{\alpha,\beta} = s(\alpha + \beta) - s(\alpha) - s(\beta).$$

La catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ est celle des objets B/A-gradués de $\mathcal{C}$,

$$M = \bigoplus_{\alpha \in B/A} M_\alpha.$$

On la munit du produit tensoriel tel que

$$(M \otimes N)_\alpha = \bigoplus_{\beta+\gamma=\alpha} M_\beta \otimes N_\gamma \otimes \mathbb{L}_{c_{\beta,\gamma}}.$$

On vérifie que cela forme naturellement une catégorie tensorielle symétrique. Via l'inclusion naturelle $\mathcal{C} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ le morphisme de groupoïdes de Picard $A \to \mathcal{P}ic_{\mathcal{C}}$ s'étend de plus en un morphisme

$$B \longrightarrow \mathcal{P}ic_{\tilde{\mathcal{C}}}.$$

Celui-ci est donné par la correspondance

$$B \ni \beta \longmapsto \mathbb{L}_{\beta - s(\bar{\beta})}[-\bar{\beta}].$$

Le choix d'une autre section de $B \to B/A$ envoyant 0 sur 0 donne une catégorie monoïdale $\tilde{\tilde{\mathcal{C}}}$ équivalente. Plus précisément, il y a une équivalence monoïdale

$$\begin{tikzcd} & \tilde{\mathcal{C}} \arrow[dd, "\simeq"] \\ \mathcal{C} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\ & \tilde{\tilde{\mathcal{C}}} \end{tikzcd}$$

envoyant le foncteur $B \to \mathcal{P}ic_{\tilde{\mathcal{C}}}$ sur $B \to \mathcal{P}ic_{\tilde{\tilde{\mathcal{C}}}}$. Ce couple $(\mathcal{C} \to \tilde{\mathcal{C}}, B \to \mathcal{P}ic_{\tilde{\mathcal{C}}})$ satisfait une propriété universelle que l'on laisse en exercice au lecteur.

3.2.2. *Incarnation géométrique.* Soit T un tore déployé sur $\mathbb{Z}$. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un topos annelé. Le tore T définit un groupe dans X, t, dont les sections sur $U \in \mathrm{Ob}X$ sont $t(U) = T(\mathcal{O}_X(U))$. C'est de fait clair pour $T = \mathbb{G}_m$ et donc si T est un tore déployé.

Lemme 3.3. *La correspondance qui à un t-torseur $\mathbb{T}$ associe le morphisme de groupoïdes de Picard*

$$X^*(T) \longrightarrow \mathcal{P}ic(X)$$
$$\chi \longmapsto \chi_* \mathbb{T}$$

induit une équivalence entre t-torseurs dans X et morphismes de groupoïdes de Picard $X^*(t) \to \mathcal{P}ic(X)$.

Supposons donné une surjection $T' \to T$ avec T' un tore déployé sur $\mathbb{Z}$ et soit $\mathbb{T}$ un t-torseur dans X. On note t' le groupe dans X associé à T' selon la même procédure utilisée pour T.

Proposition 3.4. *La catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules sur la gerbe $[\,t' \backslash \mathbb{T}\,]$ dans X s'identifie à la catégorie monoïdale construite dans la section 3.2.1 à partir de* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}$*, du morphisme de groupoïdes de Picard $X^*(T) \to \mathcal{P}ic(X)$ et de l'injection $X^*(T) \hookrightarrow X^*(T')$.*

Démonstration. La preuve est identique à celle de la proposition 3.1 en se ramenant au cas des $\mathcal{O}_X$-modules sur $[X/\mu_{n_1} \times \cdots \times \mu_{n_r}]$ pour des entiers $n_1, \ldots, n_r$. □

4. Un torseur et une gerbe canoniques sur la gerbe de Kottwitz

4.1. **Torseur.**

Définition 4.1. *On note* Kott_E *la gerbe de Kottwitz des foncteurs fibres sur* Isoc_E*.*

Il s'agit d'une gerbe fpqc de lien $\mathbb{D}$ sur $\mathrm{Spec}(E)$ neutre au dessus de $\mathrm{Spec}(E^{nr})$. Un foncteur fibre est donné par

$$(D, \varphi) \longmapsto \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} \bigcup_{s \gg 1} D_\lambda^{\varphi^s = s\lambda}$$

où $D = \oplus_\lambda D_\lambda$ est la décomposition de Dieudonné-Manin. On peut écrire cette gerbe comme limite de gerbes étales

$$\mathrm{Kott}_E \xrightarrow{\sim} 2 - \varprojlim_{n \geq 1} \mathrm{Kott}_E \overset{B\mathbb{D}}{\times} B\mathbb{G}_m$$

où la limite projective est prise selon l'écriture $\mathbb{D} = \varprojlim_{n\geq 1} \mathbb{G}_m$. La gerbe $\mathrm{Kott}_E \overset{B\mathbb{D}}{\times} B\mathbb{G}_m$ « en niveau n » est celle des foncteurs fibres sur la catégorie des isocristaux de pentes dans $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$.

Si $E'|E$ est de degré fini, puisque $\mathrm{Isoc}_{E'} = \mathrm{Isoc}_E \otimes_E E'$, on a

$$\mathrm{Kott}_{E'} = \mathrm{Kott}_E \times_{\mathrm{Spec}(E)} \mathrm{Spec}(E').$$

Soit $(D,\varphi) \in \mathrm{Isoc}_E$ tel que $(D,\varphi) \simeq (\breve{E}, \pi\sigma)$. Notons

$$V(D,\varphi) = \mathrm{Fil}^0 \mathrm{Hom}_\varphi(D, B_{cris})$$

où $\mathrm{Fil}^1 D = D$ et $\mathrm{Fil}^2 D = 0$. Il s'agit d'un E-espace vectoriel de dimension 1. Lorsque (D,φ) est le module de Dieudonné contravariant rationnel d'un groupe de Lubin-Tate sur $\mathcal{O}_E$ alors $V(D,\varphi)$ est son module de Tate rationnel. Soit (D',φ) un autre isocristal du même type. Le choix d'un isomorphisme $u : (D,\varphi) \xrightarrow{\sim} (D',\varphi)$ induit un isomorphisme $v : V(D,\varphi) \xrightarrow{\sim} V(D',\varphi)$. On a $\mathrm{Aut}(D,\varphi) = E^\times$ et si l'on remplace u par λu, $\lambda \in E^\times$, alors v est remplacé par $\lambda^{-1} v$. On en déduit que l'isocristal $(D,\varphi)^\vee \otimes_E V(D,\varphi)^\vee$ ne dépend pas canoniquement du choix de (D,φ) comme précédemment.

Définition 4.2. *On note* $\mathbb{L}_E = (D,\varphi)^\vee \otimes_E V(D,\varphi)^\vee \in \mathrm{Isoc}_E$ *pour un isocristal* (D,φ) *isomorphe à* $(\breve{E}, \pi\sigma)$.

On voit désormais $\mathbb{L}_E$ *comme un fibré en droites sur* Kott_E.

Pour $E'|E$ de degré fini, $\mathrm{Kott}_{E'} \to \mathrm{Kott}_E$ est un morphisme étale fini. Le lemme qui suit ne pose aucun problème.

Lemme 4.3. *Il y a une identification canonique* $N_{E'/E}(\mathbb{L}_{E'}) = \mathbb{L}_E$.

Définition 4.4. *(1) On note*

$$t = \varprojlim_{E'|E} \mathrm{Res}_{E'/E} \mathbb{G}_m$$

comme pro-tore où les applications de transition sont données par la norme.

(2) On note $\mathbb{T}$ *le* t*-torseur associé à la collection de fibrés en droites* $(\mathbb{L}_{E'})_{E'|E}$ *et les identifications du lemme 4.3*

4.2. **gerbe.**

Définition 4.5. *(1) On note*

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \varprojlim_{E'|E, n\geq 1} \mathrm{Res}_{E'/E} \mathbb{G}_m \\ &= \varprojlim_{E'|E} \mathrm{Res}_{E'/E} \mathbb{D}\end{aligned}$$

le revêtement universel de t

(2) On note

$$u = \varprojlim_{E'|E, n\geq 1} \mathrm{Res}_{E'/E} \mu_n.$$

On a donc la suite exacte

$$1 \longrightarrow u \longrightarrow \tilde{t} \longrightarrow t \longrightarrow 1 \tag{7}$$

qui permet de voir u comme « le π_1 de t ».

Définition 4.6 (Gerbe de Kottwitz étendue)**.** *On note*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Kott}^{1/\infty} = [\mathbb{T}/\tilde{t}] \arrow[d] \\ \mathrm{Kott} \arrow[u, bend left, "Bu"] \end{tikzcd}$$

la gerbe des racines de $\mathbb{T}$.

Il s'agit d'une gerbe fpqc de lien u au dessus de Kott.

On prendra garde que bien que $\mathrm{Kott}_E \otimes_E E' = \mathrm{Kott}_{E'}$, ce n'est pas le cas de $\mathrm{Kott}_E^{1/\infty}$. On a en fait une équivalence canonique

$$\mathrm{Kott}_{E'}^{1/\infty} \xrightarrow{\sim} \big(\mathrm{Kott}_E^{1/\infty} \underset{\mathrm{Spec}(E)}{\times} \mathrm{Spec}(E')\big) \overset{B(u^E\otimes_E E')}{\times} Bu^{E'}$$

où u^E est le groupe précédent associé à E et le morphisme $u^E \otimes_E E' \to u^{E'}$ est induit par le morphisme évident d'extension par zéro $\mathcal{C}(\Gamma_{E'}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Res}_{E'/E}\, \mathcal{C}(\Gamma_E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

5. Comparaison avec la gerbe de Kaletha

5.1. La gerbe de Kaletha ([10]). On dispose d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow R^1 \varprojlim_{\substack{E'|E\\ n\geq 1}} H^1(E, \mathrm{Res}_{E'/E}\mu_n) \longrightarrow H^2(E,u) \longrightarrow \varprojlim_{E'|E, n\geq 1} H^2(E, \mathrm{Res}_{E'/E}\mu_n) \longrightarrow 0.$$

Le groupe

$$H^1(E, \mathrm{Res}_{E'/E}\mu_n) = E'^\times/(E'^\times)^n$$

est fini et donc le terme de gauche est nul dans la suite exacte précédente. De plus

$$\begin{aligned} H^2(E, \mathrm{Res}_{E'/E}\mu_n) &= \mathrm{Br}(E')[n] \\ &= \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \end{aligned}$$

où l'application de transition liée à $E''|E'$ et $n|m$ est donnée par

$$\tfrac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\times \frac{m}{n}} \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}.$$

puisque pour les classes fondamentales $\mathrm{Cor}_{E''/E'}(u_{E''}) = u_{E'}$. On a donc une identification

$$H^2(E,u) = \widehat{\mathbb{Z}}. \tag{8}$$

On a de plus une suite exacte

$$0 \longrightarrow R^1 \varprojlim_{\substack{E'|E\\ n\geq 1}} H^0(E, \mathrm{Res}_{E'/E}\mu_n) \longrightarrow H^1(E,u) \longrightarrow \varprojlim_{E'|E, n\geq 1} H^1(E, \mathrm{Res}_{E'/E}\mu_n) \longrightarrow 0.$$

Puisque $H^0(E, \mathrm{Res}_{E'/E}\mu_n) = \mu_n(E')$, qui est fini, le terme de gauche est nul dans la suite précédente. Le terme de droite se réécrit

$$\varprojlim_{E'|E, n\geq 1} E'^\times/(E'^\times)^n.$$

Pour tout E' et n, puisque $(E'^\times)^n$ est un sous-groupe ouvert d'indice fini, d'après la théorie du corps de classe il existe $E''|E'$ e degré fini tel que $N_{E''/E'}(E''^\times) = (E'^\times)^n$. La limite projective précédente est donc nulle et

$$H^1(E,u) = 0.$$

Définition 5.1. *On note* Kal *la gerbe sur Spec*(E) *de classe* $\kappa \in H^2(E,u)$ *correspondant* $-1 \in \widehat{\mathbb{Z}}$ *via l'identification (8).*

Puisque $\ker(\mathrm{Aut}(\mathrm{Kal})/\sim \to \mathrm{Aut}(u)) = H^1(E,u) = 0$ (proposition 1.4), cette gerbe est définie à isomorphisme unique (à un 2-isomorphisme non-unique près) près. On peut donc bien parler de <u>la</u> gerbe définie par κ.

Remarque 5.2. *La rigidité de la gerbe* Kal *est essentielle. De fait, si on s'intéresse à l'ensemble* $H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kal}, G)$ *il se pourrait qu'il y ait des automorphismes de* Kal *agissant non trivialement sur celui-ci. La définition canonique d'un tel ensemble* $H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kal}, G)$ *à partir d'une classe dans* $H^2(E,u)$ *nécessite donc cette propriété de rigidité.*

5.2. **Une formule explicite pour la classe fondamentale.** Le corps résiduel de E et E^{nr} sont de dimension cohomologique 1 ([18, II.3.3.3]). La suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = H^p(E^{nr}|E, H^q(\overline{E}|E^{nr}, \mu_n)) \Longrightarrow H^{p+q}(E, \mu_n)$$

fournit donc un isomorphisme

$$H^1(E^{nr}|E, H^1(\overline{E}|E^{nr}, \mu_n)) \xrightarrow{\sim} H^2(E, \mu_n).$$

Lemme 5.3. *Soit π une uniformisante de E et $c \in H^1(\overline{E}|E^{nr}, \mu_n)$ la classe de Kummer associée à π modulo $((E^{nr})^\times)^n$. L'image de c dans*

$$H^1(E^{nr}|E, H^1(\overline{E}|E^{nr}, \mu_n)) = \mathrm{coker}(H^1(\overline{E}|E^{nr}, \mu_n) \xrightarrow{\sigma - Id} H^1(\overline{E}|E^{nr}, \mu_n))$$

est la classe fondamentale dans $\mathrm{Br}(E)[n]$.

Démonstration. Le morphisme composé

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(E^{nr}|E, H^1(\overline{E}|E^{nr}, \mu_n)) & \xrightarrow{\sim} & H^2(E, \mu_n) & \longrightarrow & H^2(E, \mathbb{G}_m) & = & H^2(E^{nr}|E, E^{nr,\times}) \\ & & & & & & \big\downarrow{\scriptstyle x \mapsto x^n} \\ & & & & & & H^2(E^{nr}|E, (E^{nr,\times})^n) \end{array}$$

est donné par l'application de cobord

$$\partial : H^1(E^{nr}|E, E^{nr,\times}/(E^{nr,\times})^n) \longrightarrow H^2(E^{nr}|E, (E^{nr,\times})^n).$$

L'application

$$inv : H^2(E^{nr}|E, E^{nr,\times}) \xrightarrow{v} H^2(E^{nr}|E, \mathbb{Z}) = H^1(E^{nr}|E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

composée avec

$$H^1(E^{nr}|E, H^1(\overline{E}|E^{nr}, \mu_n)) \longrightarrow H^2(E^{nr}|E, E^{nr,\times})$$

est donc donnée par

$$H^1(E^{nr}|E, E^{nr,\times}/(E^{nr,\times})^n) \xrightarrow{v} H^1(E^{nr}|E, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\times \frac{1}{n}} H^1(E^{nr}|E, \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) = \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Le résultat s'en déduit. □

5.3. **Construction explicite du 2-cocycle de Kaletha.** La suite spectrale de Hochschild-Serre $H^p(E^{nr}|E, H^q(\overline{E}|E^{nr}, u)) \Rightarrow H^{p+q}(E, u)$ fournit un isomorphisme

$$H^1(E^{nr}|E, H^1(\overline{E}|E^{nr}, u)) \xrightarrow{\sim} H^2(E, u).$$

On va utiliser cette application pour construire explicitement la classe de Kaletha dans $H^2(E, u)$.

Pour $E'|E$ de degré fini on note $E'_0|E$ l'extension maximale non-ramifiée de E dans E'.

Lemme 5.4. *On a $t(E^{nr}) \neq \{1\}$ et il existe $\underline{\pi} \in t(E^{nr})$ tel que sa composante « en niveau $E' = E$ » dans la limite $\varprojlim_{E'|E} \mathrm{Res}_{E'/E}\mathbb{G}_m$ soit donnée par un élément de $E^\times$ de valuation 1.*

Démonstration. Le choix d'un scindage de la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{E}|E^{nr}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{E}|E) \longrightarrow \mathrm{Gal}(E^{nr}|E) \longrightarrow 1$$

induit une décomposition $\overline{E} = \tilde{E}.E^{nr}$ où $\tilde{E}|E$ est totalement ramifiée. Pour $E'|E$ de degré fini on note $U(E')$ les uniformisantes de E'. Puisque qu'un tel ensemble $U(E')$ est compact

$$\varprojlim_{\tilde{E}|E'|E} U(E') \neq \emptyset$$

où les applications de transition sont données par la norme. Soit $(\pi_{E'})_{E'}$ un élément de cette limite projective. Pour $E''|E$ de degré fini de la forme $E'.E''_0$ avec $\tilde{E}|E'|E$ et $E''_0|E$ non-ramifiée on pose

$\pi_{E''} = \pi_{E'}$. De telles extensions $E''|E$ sont cofinales dans les $E'|E$ de degré fini et pour un tel E'' on a

$$\mathrm{Res}_{E''/E}\mathbb{G}_m(E^{nr}) = \prod_{E''_0 \hookrightarrow E^{nr}} (E'')^{nr,\times}.$$

On définit alors $\underline{\pi}_{E''}$ comme étant $(\pi_{E''}, 1, \dots, 1)$ dans le produit précédent où le premier facteur correspond au plongement canonique $E''_0 \hookrightarrow E^{nr}$. La collection $\underline{\pi} = (\underline{\pi}_{E''})_{E''}$ convient alors. $\square$

Par application de l'application de cobord

$$\partial : t(E^{nr}) \longrightarrow H^1(\overline{E}|E^{nr}, u)$$

on obtient une classe dans le membre de droite. Plus précisément, si $\underline{\underline{\pi}} \in \tilde{t}(\overline{E})$ s'envoie sur $\underline{\pi}$ on lui associe le 1-cocycle $\mathrm{Gal}(\overline{E}|E^{nr}) \ni \tau \mapsto \underline{\underline{\pi}}^{1-\tau} \in u(\overline{E})$. On prend alors l'image de ce 1-cocycle dans

$$H^1(E^{nr}|E, H^1(\overline{E}|E^{nr}, u)) = \mathrm{Coker}(H^1(\overline{E}|E^{nr}, u) \xrightarrow{\sigma - Id} H^1(\overline{E}|E^{nr}, u)).$$

En appliquant le lemme 5.3 on conclut qu'il s'agit de la classe de Kaletha.

Remarque 5.5. *On renvoie à la section 4.5 de* [10] *pour une approche différente concernant le calcul du* 2*-cocycle de Kaletha.*

5.4. **Comparaison des deux gerbes.**

Théorème 5.6. *Il y a une équivalence au dessus de* Kott*,*

$$\mathrm{Kott}^{1/\infty} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kott} \times \mathrm{Kal}$$

unique à un 2*-isomorphisme près.*

Démonstration. L'élément $\underline{\pi}^{-1} \in t(\breve{E})$ définit un t-isocrystal c'est à dire un t-torseur sur Kott dont on vérifie aussitôt qu'il est isomorphe à $\mathbb{T}$. L'équivalence se déduit alors du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}, t) \arrow[rrr, "\partial"] & & & H^2_{fpqc}(\mathrm{Kott}, u) \\
t(\breve{E})/\sigma - \mathrm{Id} \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r, equal] & H^1(\sigma^{\mathbb{Z}}, t(\breve{E})) \arrow[r, "H^1(\sigma^{\mathbb{Z}}, \partial)"] & H^1(E^{nr}|E, H^1(\overline{E}|E^{nr}, u)) \arrow[r, "\simeq"] & H^2(E, u) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où ∂ est l'application de bord déduite de la suite $1 \to u \to \tilde{t} \to t \to 1$.

L'unicité à un 2-isomorphisme près résulte de la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(E, u) \longrightarrow H^1_{fpqc}(\mathrm{Kott}, u) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}(\mathbb{D}, u)}_{0},$$

cf. la suite exacte (4) de la section 1.5, de l'annulation de $H^1(E, u)$ (cf. section 5.1) et de la proposition 1.4. $\square$

Remarque 5.7. *On a utilisé dans la démonstration précédente la cohomologie fpqc. Il est sous-entendu, afin que cette cohomologie soit bien définie, qu'on a au préalable fixé un cardinal supérieur au dénombrable permettant de la définir en prenant des algèbres fpqc engendrées par un nombre de générateurs plus petit ou égal à ce cardinal. Dans le topos fpqc on a* $u \xrightarrow{\sim} R \varprojlim_{E'/E, n \geq 1} \mathrm{Res}_{E'/E}\mu_n$ *et donc*

$$R\Gamma_{fpqc}(\mathrm{Kott}, u) \xrightarrow{\sim} R \varprojlim_{E'/E, n \geq 1} R\Gamma_{fpqc}(\mathrm{Kott}, \mathrm{Res}_{E'/E}, \mu_n) \xleftarrow{\sim} R \varprojlim_{E'/E, n \geq 1} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}, \mathrm{Res}_{E'/E}, \mu_n).$$

6. Isocristaux étendus

6.1. **Définition.** Commençons par la définition.

Définition 6.1. *Un isocristal étendu est un fibré vectoriel sur* $\mathrm{Kott}_E^{1/\infty}$*. On note* Isoc_E^e *la catégorie Tannakienne des isocristaux étendus.*

Il s'agit donc d'une catégorie Tannakienne de lien $\mathbb{D} \times u$. Afin de décrire explicitement cette catégorie nous devons procéder à quelques constructions auxiliaires.

6.2. **Une construction de droites.**

6.2.1. *Construction abstraite.* Pour $\alpha : \Gamma \to \mathbb{Z}$ continue on définit un $\overline{\breve{E}}$-espace vectoriel de dimension 1 de la façon suivante. Soit $E'|E$ galoisienne finie telle que $\alpha : \mathrm{Gal}(E'|E) \to \mathbb{Z}$. Pour $E'|E$ de degré fini on voit $\mathrm{Isoc}_{E'}$ comme la catégorie des $\overline{\breve{E}}$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action semi-linéaire discrète de $W_{E'}$. Soit

$$x_{E'} : \mathrm{Spec}(\overline{\breve{E}}) \longrightarrow \mathrm{Kott}_E$$

le foncteur fibre standard. On pose alors

$$L_\infty^\alpha = x_{E'}^* \Big(\bigotimes_{\tau \in \mathrm{Gal}(E'|E)} (\mathbb{L}_{E'}^\tau)^{\otimes \alpha(\tau)} \Big)$$

où $\mathbb{L}_{E'}^\tau$ est le tiré en arrière du fibré en droites $\mathbb{L}_{E'}$ par l'action de τ vu comme élément agissant sur le revêtement galoisien $\mathrm{Kott}_{E'} \to \mathrm{Kott}_E$. Cette définition ne dépend pas du choix d'une telle extension $E'|E$.

Une façon plus courte de le voir est de dire que $\alpha \in X^*(t)$ et

$$L_\infty^\alpha = x_{E'}^* \Big(\mathbb{T} \otimes_E E' \overset{t_{E'},\alpha}{\times} \mathbb{A}^1 \Big)$$

où $\mathbb{T} \otimes_E E' \to \mathrm{Isoc}_{E'}$ est un $t_{E'}$-torseur, cf. définition 4.4.

Pour $\tau \in W_E$ on a de plus un isomorphisme naturel

$$(L_\infty^\alpha)^\tau \xrightarrow{\sim} L_\infty^{\alpha^\tau}. \tag{9}$$

Cela résulte du lemme qui suit.

Lemme 6.2. *Soit* V *un* $\overline{\breve{E}}$*-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire discrète de* $W_{E'}$*,* $\mathscr{E}$ *le fibré vectoriel associé sur* $\mathrm{Kott}_{E'}$ *et* $\tau \in Gal(E'|E)$ *vu comme groupe du revêtement* $\mathrm{Kott}_{E'} \to \mathrm{Kott}_E$*. Fixons* $\tilde{\tau} \in W_E$ *relevant* τ*. Alors,* $\tau^*\mathscr{E}$ *correspond à* $V \otimes_{\overline{\breve{E}},\tilde{\tau}} \overline{\breve{E}}$ *muni de l'action donnée par : pour* $\tau' \in W_{E'}$*,*

$$\tau'.(v \otimes \lambda) = (\tilde{\tau}^{-1}\tau'\tilde{\tau}.v) \otimes \tau'(\lambda).$$

Pour $\tau \in W_E$ il y a donc un isomorphisme « naturel » $\tau(x_{E'}) \xrightarrow{\sim} \tau_{|E'}.x_{E'}$ dans le groupoïde $\mathrm{Kott}_{E'}(\overline{\breve{E}})$, où $\tau_{|E'}.x_{E'}$ correspond à l'action du revêtement galoisien $\mathrm{Kott}_{E'} \to \mathrm{Kott}_E$ de groupe $\mathrm{Gal}(E'|E)$. Cela permet de définir l'isomorphisme (9).

6.2.2. *Construction concrète.* Voici maintenant une description plus concrète de la construction précédente de la collection de droites $(L_\infty^\alpha)_{\alpha \in X^*(t)}$ avec des isomorphismes $(L_\infty^\alpha)^\tau \xrightarrow{\sim} L_\infty^{\alpha^\tau}$.

Proposition 6.3. *Le choix de* $\underline{\pi} \in t(\breve{E})$ *comme dans le lemme 5.4 permet d'identifier* $L_\infty^\alpha = \overline{\breve{E}}$ *avec* $(L_\infty^\alpha)^\tau \xrightarrow{\sim} L_\infty^{\alpha^\tau}$ *donné par l'application* τ*-linéaire* $x \mapsto \alpha^\tau(\varepsilon_\tau)\tau(x)$ *où*

$$\varepsilon_\tau = \underline{\pi}^{-\frac{\sigma^{v_E(\tau)}-1}{\sigma-1}} \in t(\breve{E}).$$

Démonstration. On reprend les notations du lemme 5.4. On a

$$t(\breve{E}) = \varprojlim_{E''/E} \prod_{E''_0 \hookrightarrow E^{nr}} (\breve{E}'')^\times$$

et $\underline{\pi}$ est donné par un élément de la forme $(\pi_{E''}, 1, \ldots, 1)$ « en niveau E'' » dans la limite projective précédente.

Soit maintenant $E'|E$ galoisienne de degré fini et $\tau \in \mathrm{Gal}(E'|E)$. Le fibré en droites $\mathbb{L}_{E'}$ correspond à $\overline{\breve{E}}$ muni de l'action telle que $\tau' \in W_{E'}$ agisse par $\pi_{E'}^{-v_{E'}(\tau')}\tau'$ sur $\overline{\breve{E}}$. Ici on note $v_{E'} : W_{E'} \to \mathbb{Z}$ le morphisme tel que $\tau' \equiv \mathrm{Frob}_{E'}^{v_{E'}(\tau')}$ sur le corps résiduel. Le fibré en droites

$$\bigotimes_{\tau \in \mathrm{Gal}(E'|E)} (\mathbb{L}_{E'}^\tau)^{\otimes \alpha(\tau)}$$

correspond donc à $\overline{\breve{E}}$ où $\tau' \in W_{E'}$ agit par $\alpha(\underline{\pi})^{-v_{E'}(\tau')}\tau'$. On applique le lemme 6.2 à cet espace vectoriel. On obtient que le tiré en arrière par $\tau \in W_E$ correspond à $\overline{\breve{E}} \otimes_{\overline{\breve{E}},\tau} \overline{\breve{E}}$ où $\tau' \in W_{E'}$ agit via

$$\tau'.(x \otimes y) = (\tau^{-1}\tau'\tau.x) \otimes \tau'(y) = 1 \otimes \alpha(\underline{\pi})^{-v_{E'}(\tau')\tau}\tau'(\tau(x)y).$$

Ainsi le tiré en arrière par τ s'identifie à $\overline{\breve{E}}$ avec

$$\tau'.x = \alpha(\underline{\pi})^{-v_{E'}(\tau')\tau}\tau'(x).$$

L'espace associé à α^τ est lui $\overline{\breve{E}}$ avec

$$\tau'.x = \alpha^\tau(\underline{\pi})^{-v_{E'}(\tau')}\tau'(x).$$

L'application linéaire $x \mapsto \alpha^\tau(\varepsilon_\tau)x$ définit donc un isomorphisme entre ces deux espaces semi-linéaires. Le résultat s'en déduit. $\square$

On a donc un 1-cocyle

$$(\varepsilon_\tau)_\tau \in Z^1(W_E, t(\breve{E})).$$

qui va servir dans la suite.

6.3. **Description explicite.** La suite de groupes de cocaractères obtenue à partie de la suite exacte (7) est

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Fixons une section ensembliste de la projection $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et soit $s : \mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{Q})$ la section déduite (qui est alors Γ-équivariante). Pour $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ on note

$$c_{\alpha,\beta} = s(\alpha + \beta) - s(\alpha) - s(\beta) \in \mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{Z}).$$

Cela définit un 2-cocycle Γ-équivariant au sens où pour $\tau \in \Gamma$ on a $c_{\alpha,\beta}^\tau = c_{\alpha^\tau,\beta^\tau}$.

Théorème 6.4. *(1) La catégorie Tannakienne des isocristaux étendus est équivalente à celle des $\mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) - \overline{\breve{E}}$-espaces vectoriels de dimension finie gradués*

$$D = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} D_\alpha$$

munis d'une action semi-linéaire discrète de W_E telle que pour tout $\tau \in W_E$, $\tau : D_\alpha \to D_{\alpha^\tau}$. Le produit tensoriel est donné par

$$(D \otimes D')_\alpha = \bigoplus_{\beta+\gamma=\alpha} D_\beta \otimes D_\gamma \otimes \mathbb{L}_\infty^{c(\beta,\gamma)}.$$

(2) Plus concrètement, $(D \otimes D')_\alpha = \bigoplus_{\beta+\gamma=\alpha} D_\beta \otimes D_\gamma$ mais où pour $\tau \in W_E$ l'application $D_\beta \otimes D_\gamma \to D_{\beta^\tau} \otimes D_{\gamma^\tau}$ est donnée par

$$c(\beta,\gamma)(\varepsilon_\tau).\tau \otimes \tau$$

avec les notations de la proposition 6.3.

Démonstration. La catégorie Tannakienne $\mathrm{Isoc}_E \otimes_E \overline{E}$ est celle des $\overline{\breve{E}} \otimes_E \overline{E}$-modules libres de rang fini M munis d'une action semi-linéaire discrète de $W_E \times \{1\}$, où le produit de groupes agit sur chacun des facteurs du produit tensoriel $\overline{\breve{E}} \otimes_E \overline{E}$. On applique la proposition 3.4 de laquelle on déduit, après s'être ramené au cas de tores et non de pro-tores en écrivant la gerbe comme 2-limite projective de gerbes de type fini, que la catégorie $\mathrm{Isoc}^{1/\infty} \otimes_E \overline{E}$ est celle de telles modules $\mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$-gradués avec la règle donnée dans l'énoncé pour le produit tensoriel. La catégorie Tannakienne Isoc^e est la même catégorie mais des objets munis d'une action semi-linéaire de $W_E \times \Gamma_E$ où pour $\tau \in \Gamma_E$, si $M = \oplus_{\alpha \in \mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} M_\alpha$ alors $(1 \times \tau) : M_\alpha \xrightarrow{\sim} M_{\alpha^\tau}$. Pour un tel module $M \otimes_{\overline{\breve{E}} \otimes_E \overline{E}} \overline{\breve{E}} \xrightarrow{\sim} M^{\{1\} \times \Gamma_E}$ et le foncteur $M \mapsto M \otimes_{\overline{\breve{E}} \otimes_E \overline{E}} \overline{\breve{E}}$ induit l'équivalence avec la catégorie annoncée dans l'énoncé. □

Exemple 6.5. *Si la section de $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est choisie telle qu'elle envoie $\frac{1}{n} \mathrm{mod}\ \mathbb{Z}$ sur $\frac{1}{n}$, l'isocristal $\sqrt[n]{E(-1)}$ correspond à $\overline{\breve{E}}$ placé en degré $\alpha =$ la fonction constante de valeur $\frac{1}{n}$ modulo $\mathbb{Z}$.*

6.4. **Structure de la catégorie abélienne des isocristaux étendus.**

6.4.1. *Description explicite.* Oublions la structure monoïdale de la catégorie des isocristaux étendus. La proposition suivante résulte immédiatement du théorème 6.4.

Proposition 6.6. *La catégorie abélienne des isocristaux étendus est équivalente à celle des isocristaux (D, φ) munis d'un morphisme $u \to \mathrm{Aut}(D, \varphi)$.*

Remarquons que le foncteur qui à un isocristal étendu associe l'isocristal sous-jacent correspond au foncteur f_* au niveau des fibrés vectoriels où $f : \mathrm{Kott}^{1/\infty} \to \mathrm{Kott}$. Ce foncteur ne commute pas au produit tensoriel mais permet néanmoins de décrire la catégorie abélienne des isocristaux étendus.

6.4.2. *Semi-simplicité.*

Corollaire 6.7. *La catégorie abélienne des isocristaux étendus est semi-simple.*

Démonstration. Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ on note D_λ l'algèbre à division d'invariant λ mod $\mathbb{Z}$ sur E. On utilise la décomposition de Dieudonné-Manin. De celle-ci on déduit une équivalence entre la catégorie des isocristaux étendus et la somme directe orthogonale indexée par $\lambda \in \mathbb{Q}$ des représentations de u à valeurs dans les D_λ-espaces vectoriels de dimension finie

$$\mathrm{Isoc}^e \simeq \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}}} \mathrm{Rep}_{D_\lambda}(u).$$

Puisque $\mathrm{Rep}_{D_\lambda}(u)$ est semi-simple on conclut. □

6.4.3. *Objets simples.* Pour $\alpha \in X^*(u)$ non nul notons

$$E^\alpha = \bigoplus_{\beta \in \Gamma.\alpha} \overline{\breve{E}}[-\beta]$$

où le décalage « $[-\beta]$ » consiste à placer en degré β. On a naturellement $E^\alpha \in \mathrm{Isoc}^e$.

Proposition 6.8. *Les objets simples de Isoc^e_E sont de la forme $D \otimes E^\alpha$ avec $D \in \mathrm{Isoc}_E$ simple et $[\alpha] \in \Gamma \backslash (X^*(u) \setminus \{0\})$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{Q}$. Il s'agit de classifier les représentations irréductibles de u à valeurs dans un D_λ-espace vectoriel de dimension finie. Or celles-ci sont de la forme $D_\lambda \otimes_E \rho$ où ρ est une représentation irréductible de u i.e. de la forme $\oplus_{\beta \in \Gamma.\alpha} \beta$ pour un $\alpha \in X^*(u)$. Le résultat s'en déduit. □

Remarque 6.9. *Se pose la question de savoir si les isocristaux étendus apparaissent naturellement dans la nature de la même manière que les isocristaux apparaissent comme cohomologie cristalline des variétés propres et lisses. Une piste serait de regarder du coté des motifs exponentiels (*[6]*).*

7. La gerbe canonique sur la courbe

7.1. **Un t-torseur canonique sur la courbe.** Soit X_E la courbe sur $\mathrm{Spec}(E)$ associée au choix du corps perfectoïde $\widehat{\overline{E}}^\flat$ ([4]). On la notera parfois simplement X lorsque le corps de base est E. Elle est munie canoniquement d'un point $\infty \in X$ de corps résiduel $\widehat{\overline{E}}$. On vérifie que pour $E'|E$ de degré fini

$$N_{E'/E}(\mathcal{O}_{X_{E'}}(\infty)) = \mathcal{O}_{X_E}(\infty).$$

La collection de fibrés en droites $\left(\mathcal{O}_{X_{E'}}(\infty)\right)_{E'|E}$ définit donc un t-torseur $\mathcal{T} \to X$.

Rappelons ([4]) qu'il y a un $\otimes$-foncteur $(D,\varphi) \mapsto \mathscr{E}(D,\varphi)$ des isocristaux vers les fibrés vectoriels sur la courbe. Cela définit un morphisme de champs

$$X \longrightarrow \mathrm{Kott}.$$

Proposition 7.1. *Le t-torseur $\mathcal{T}$ est l'image réciproque de $\mathbb{T}$ (def. 4.4),*

$$\mathcal{T} = X \times_{\mathrm{Kott}} \mathbb{T}.$$

Démonstration. Revenons à la définition du fibré en droites $\mathbb{L}_E$ sur X_E (def. 4.2). Notons $i : \{\infty\} \hookrightarrow X_E$. Il y a une modification canonique de fibrés

$$0 \longrightarrow V(D,\varphi) \otimes_E \mathcal{O}_{X_E} \longrightarrow \mathscr{E}(D,\varphi)^\vee \longrightarrow i_* i^* \mathscr{E}(D,\varphi)^\vee \longrightarrow 0.$$

De celle-ci on déduit un isomorphisme canonique $\mathscr{E}(\mathbb{L}_E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_E}(\infty)$. Il en est de même pour $E'|E$ est ces isomorphismes sont compatibles aux applications normes. Le résultat s'en déduit. $\square$

Remarque 7.2. *On remarquera que l'on utilise le fibré en droites $\mathcal{O}_X(\infty)$ défini canoniquement et non le fibré $\mathcal{O}_X(1)$ qui lui dépend du choix d'une uniformisante π. Cela rend le torseur $\mathcal{T}$ complètement canonique.*

7.2. **La gerbe canonique.**

Définition 7.3. *On note*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} = [\mathcal{T}/\tilde{t}] \arrow[d] \\ X \arrow[u, bend left, "Bu"] \end{tikzcd}$$

la gerbe de lien u des racines de $\mathcal{T}$.

Comme conséquence de la proposition 7.1 et du théorème 5.6 on obtient le résultat suivant.

Corollaire 7.4. *(1) La gerbe $\mathfrak{X}$ est l'image réciproque de la gerbe* $\mathrm{Kott}^{1/\infty}$ *à X,*

$$\mathfrak{X} = X \times_{\mathrm{Kott}} \mathrm{Kott}^{1/\infty}.$$

(2) La gerbe $\mathfrak{X}$ est l'image réciproque de la gerbe Kal *à X,*

$$\mathfrak{X} = X \times_{Spec(E)} \mathrm{Kal}.$$

Remarque 7.5. *Via l'isomorphisme $H^2(E,u) \xrightarrow{\sim} H^2_{\text{ét}}(X,u)$ ([3]) le résultat précédent fournit une définition « géométrique » de la gerbe* Kal *n'utilisant pas la théorie du corps de classe !*

8. Quelques calculs de cohomologie de gerbes

8.1. **Le H^2 de la gerbe de Kaletha à coefficients finis.** Soit A un schéma en groupes commutatif fini sur $\mathrm{Spec}(E)$. Il est complètement déterminé par le Γ-module discret $X^*(A)$. Commençons par un lemme clef.

Lemme 8.1. *Pour tout classe $c \in H^2(E,A)$ il existe $\lambda : u \to A$ tel que $\lambda_* \kappa = c$.*

Démonstration. On a $\mathrm{Hom}(u,A) = X^*(A)^D$ où $(-)^D = \mathrm{Hom}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ désigne la dualité de Pontryagin. La dualité de Tate-Nakayama fournit une identification $H^2(E,A) = H^0(\Gamma, X^*(A))^D$. L'application $\mathrm{Hom}(u,A) \to H^2(E,A)$ donnée par $\lambda \mapsto \lambda_*\kappa$ s'identifie alors à $X^*(A)^D \to H^0(\Gamma, X^*(A))^D$ qui est surjective. $\square$

Le résultat principal est le suivant.

Théorème 8.2. *On a* $H^2_{\text{ét}}(\text{Kal}, A) = 0$.

La preuve se divise en deux parties : tuer d'abord la « partie arithmétique » du H^2 en montrant que $H^2_{\text{ét}}(\text{Kal}, A) \xrightarrow{\sim} H^2_{\text{ét}}(\text{Kal}_{\overline{E}}, A)$ puis la « partie géométrique sur $\overline{E}$ » en montrant l'annulation de $H^2_{\text{ét}}([\text{Spec}(\overline{E})/u_{\overline{E}}], A)$. Commençons la preuve par deux lemmes.

Lemme 8.3. *L'application* $H^2(E, A) \to H^2_{\text{ét}}(\text{Kal}, A)$ *est nulle.*

Démonstration. Soient $c \in H^2(E, A)$ et $\mathfrak{X} \to \text{Spec}(E)$ une gerbe étale de lien A et de classe $[\mathfrak{X}] = c$. D'après le lemme 8.1 il existe $\lambda : u \to A$ tel que $\lambda_* \kappa = c$. Cela signifie que l'on a une équivalence

$$\text{Kal} \overset{Bu,\lambda}{\times} BA \simeq \mathfrak{X}.$$

Le morphisme $\text{Spec}(E) \to BA = [\text{Spec}(E)/A]$ définit un morphisme $\text{Kal} \to \text{Kal} \overset{Bu,\lambda}{\times} BA$ et on a une factorisation

$$\text{Kal} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow \text{Spec}(E).$$

Il suffit d'appliquer la proposition 1.1 pour conclure. □

Lemme 8.4. *Soit* $A \to A'$ *une surjection de schémas en groupes abéliens finis sur Spec*(E)*. L'application* $H^1_{\text{ét}}(\text{Kal}, A) \to H^1_{\text{ét}}(\text{Kal}, A')$ *est alors surjective.*

Démonstration. Notons A'' le noyau de $A \to A'$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{Hom}(u, A'') \arrow[r] \arrow[d] & H^2(E, A'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^1(E, A) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\text{ét}}(\text{Kal}, A) \arrow[r] \arrow[d] & \text{Hom}(u, A) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(E, A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^1(E, A') \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\text{ét}}(\text{Kal}, A') \arrow[r] \arrow[d] & \text{Hom}(u, A') \arrow[r] \arrow[d] & H^2(E, A') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^2(E, A'') \arrow[r, "0"] & H^2_{\text{ét}}(\text{Kal}, A'') & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où on a utilisé le lemme 8.1 et le lemme 8.3. Une chasse dans ce diagramme permet de conclure. □

Preuve du théorème 8.2. Pour $E'|E$ de degré fini il y a des injections $A \hookrightarrow \text{Res}_{E'/E} A_{E'}$ compatibles lorsque $E'|E$ varie. Le lemme 8.4 montre qu'il y a une injection

$$\begin{aligned} H^2_{\text{ét}}(\text{Kal}, A) &\hookrightarrow \varinjlim_{E'/E} H^2_{\text{ét}}(\text{Kal} \times_{\text{Spec}(E)} \text{Spec}(E'), A) \\ &= H^2_{\text{ét}}(\text{Kal} \times_{\text{Spec}(E)} \text{Spec}(\overline{E}), A). \end{aligned}$$

Ce dernier groupe de cohomologie s'identifie à

$$H^2_{\text{ét}}([\text{Spec}(\overline{E})/u_{\overline{E}}], A).$$

Notons $M = A(\overline{E})$. Puisque $u_{\overline{E}}$ est un pro-groupe discret on peut réécrire ce groupe sous la forme

$$H^2_{cont}(u(\overline{E}), M)$$

(cohomologie continue des groupes). On a $u(\overline{E}) = \mathcal{C}(\Gamma, \widehat{\mathbb{Z}}(1))$ qui est un $\widehat{\mathbb{Z}}$-module topologiquement libre i.e. isomorphe à $\ell(\widehat{\mathbb{Z}})$ les suites à coefficients dans $\widehat{\mathbb{Z}}$ tendant vers 0. On a

$$H^2_{cont}(\ell(\widehat{\mathbb{Z}}), M) = \varinjlim_{n \geq 1} H^2((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{(\mathbb{N})}, M).$$

Si $0 \to M \to E \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{(\mathbb{N})} \to 0$ est une extension correspondant à une classe dans $H^2((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{(\mathbb{N})}, M)$ alors celle-ci possède une section au dessus de $\ell(\widehat{\mathbb{Z}}) \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{(\mathbb{N})}$, section qui se factorise par $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{(\mathbb{N})} \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{(\mathbb{N})}$ pour un entier m tel avec $n|m$ puisque E est annulé par un entier non-nul. La limite inductive précédente est donc nulle et on conclut. □

8.2. **Le groupe de Brauer de la gerbe de Kottwitz.** Commençons par un lemme.

Lemme 8.5. *Pour k un corps algébriquement clos on a $H^2_{\text{ét}}(B\mathbb{G}_{m,k}, \mathbb{G}_m) = 0$.*

Démonstration. On dispose de la suite spectrale

$$E_1^{ij} = H^j_{\text{ét}}(X_i, \mathbb{G}_m) \Longrightarrow H^{i+j}_{\text{ét}}(B\mathbb{G}_{m,k}, \mathbb{G}_m)$$

où $X_i = \mathbb{G}^i_{m,k}$ et l'application de bord $E_1^{ij} \to E_1^{i+1,j}$ est induite par la somme alternée des applications de face

$$d_k : G^{i+1} \to G^i, \quad 0 \leq k \leq i+1$$

avec $d_0(g_1, \dots, g_{i+1}) = (g_2, \dots, g_{i+1})$, $d_k(g_1, \dots, g_{i+1}) = (g_1, \dots, g_{k-1}, g_k g_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_{i+1})$ pour $1 \leq k \leq i$, et $d_{i+1}(g_1, \dots, g_{i+1}) = (g_1, \dots, g_i)$.

On a $E_2^{20} = \ker(k[x,y]^\times) \to k[u,v,w]^\times)$ qui est le noyau du morphisme $x^{\mathbb{Z}} y^{\mathbb{Z}} \to u^{\mathbb{Z}} v^{\mathbb{Z}} w^{\mathbb{Z}}$ donné par $x^a y^b \mapsto u^{-a} w^b$ est est donc nul. On a $E_1^{11} = \text{Pic}(\mathbb{G}_m) = 0$ et $E_1^{02} = 0$ puisque k est algébriquement clos. On conclut. □

Théorème 8.6. *Pour tout tore T sur E on a $H^2_{\text{ét}}(\text{Kott}, T) = 0$.*

Démonstration. Si $T' \to T$ est une surjection de tores de noyau un tore alors

$$H^1_{\text{ét}}(\text{Kott}, T') = B(T') \longrightarrow B(T) = H^1_{\text{ét}}(\text{Kott}, T)$$

est surjectif. Il s'en suit que si $T \to T''$ est une injection de tores alors

$$H^2_{\text{ét}}(\text{Kott}, T) \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(\text{Kott}, T'')$$

est injectif. On a une injection pour $E'|E$ de degré fini $T \hookrightarrow \text{Res}_{E'/E} T_{E'}$ et donc

$$\begin{aligned} H^2_{\text{ét}}(\text{Kott}_E, T) &\hookrightarrow \varinjlim_{E'/E} H^2_{\text{ét}}(\text{Kott}_{E'}, T_{E'}) \\ &= H^2_{\text{ét}}(\text{Kott}_E \times_{\text{Spec}(E)} \text{Spec}(\overline{E}), T_{\overline{E}}). \end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que

$$H^2_{\text{ét}}(B\mathbb{D}_{\overline{E}}, \mathbb{G}_m) = 0.$$

Écrivant $B\mathbb{D} = 2-\varprojlim_{n\geq 1} B\mathbb{G}_m$, où les applications de transition sont quasicompacts quasiséparées, on obtient

$$H^2_{\text{ét}}(B\mathbb{D}_{\overline{E}}, \mathbb{G}_m) = \varinjlim_{n\geq 1} H^2_{\text{ét}}(B\mathbb{G}_{m,\overline{E}}, \mathbb{G}_m).$$

On peut alors appliquer le lemme 8.5 pour conclure. □

8.3. **Le H^2 de la gerbe de Kottwitz étendue à coefficients dans un groupe multiplicatif.** Commençons par deux lemmes avant d'attaquer le théorème principal de cette section.

Lemme 8.7. *Pour T un tore sur E, l'application $Hom(\mathbb{D}, T) \to H^2(E, T)$ qui à $\nu : \mathbb{D} \to T$ associe $\nu_*[\text{Kott}]$, avec $[\text{Kott}] \in H^2(E, \mathbb{D})$, est surjective.*

Démonstration. Via la dualité de Tate-Nakayama, $H^2(E, \mathbb{D}) = H^0(\Gamma, X^*(\mathbb{D}))^D = \mathbb{Q}^D = \boldsymbol{A}_f$. Via cette identification, $[\text{Kott}] = 1$. De nouveau via la dualité de Tate-Nakayama, l'application $\nu \mapsto \nu_*[\text{Kott}]$ s'identifie à $X_*(T)^\Gamma_{\mathbb{Q}} \to (X^*(T)^\Gamma)^D$ qui est bien surjective. □

Lemme 8.8. *Pour un tore T sur E, l'application $H^2(E, T) \to H^2_{\text{ét}}(\text{Kott}^{1/\infty}, T)$ est nulle.*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 8.6 puisque cette application se factorise en

$$H^2(E, T) \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(\text{Kott}, T) \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(\text{Kott}^{1/\infty}, T).$$ □

Théorème 8.9. *Si D est un groupe de type multiplicatif sur E alors $H^2_{\text{ét}}(\text{Kott}^{1/\infty}, D) = 0$.*

Démonstration. On peut écrire un tel D comme une extension d'un schéma en groupes commutatif fini par un tore de façon canonique

$$1 \longrightarrow D^0 \longrightarrow D \longrightarrow \underline{\pi_0}(D) \longrightarrow 1.$$

Le théorème précédent se ramène donc au cas où D est soit un tore soit un schéma en groupes commutatif fini.

Commençons par le cas d'un schéma en groupes abélien fini A. On a $\mathrm{Hom}(u\times\mathbb{D}, A) = \mathrm{Hom}(u, A)$ et donc

$$H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kal}, A) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}^{1/\infty}, A).$$

En particulier le lemme 8.4 s'applique dans ce contexte et il suffit de montrer, comme dans la preuve du théorème 8.2, que

$$H^2_{\text{ét}}(B(\mathbb{D}_{\overline{E}} \times u_{\overline{E}}), A) = 0.$$

Comme dans la preuve du lemme 8.5 on dispose d'une suite spectrale

$$E_1^{ij} = H^j_{\text{ét}}(X_i, A) \Longrightarrow H^{i+j}_{\text{ét}}(B(\mathbb{D}_{\overline{E}} \times u_{\overline{E}}), A) \tag{10}$$

avec $X_i = (\mathbb{D}_{\overline{E}} \times u_{\overline{E}})^i$. Remarquons maintenant que

$$H^i_{\text{ét}}(\mathbb{D}_{\overline{E}}, A) = 0 \text{ si } i > 0.$$

En effet, ce groupe de cohomologie étale se réécrit sous la forme

$$\varinjlim_{n\geq 1} H^i_{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m,\overline{E}}, A)$$

où l'application de transition entre le niveau n et m avec $n|m$ est donnée par $\mathbb{G}_m \ni z \mapsto z^{\frac{m}{n}}$. L'annulation cherchée résulte alors de l'isomorphisme

$$H^1_{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m,\overline{E}}, A) \xrightarrow{\sim} A(\overline{E})(-1),$$

de ce que l'application de transition précédent induit la multiplication par $\frac{m}{n}$ dans la limite inductive précédente et du fait que $A(\overline{E})$ soit un groupe fini.

De cela on déduit que dans la suite spectrale (10), $E_1^{ij} = 0$ lorsque $j > 0$, et donc la suite spectrale dégénère et fournit l'identification

$$H^2_{\text{ét}}(B(\mathbb{D}_{\overline{E}} \times u_{\overline{E}}), A) = H^2_{cont}(u(\overline{E}), A(\overline{E}))$$

qui est nul, cf. la preuve du théorème 8.2.

Soit maintenant T un tore. Supposons que l'on ait une suite exacte de tores

$$0 \longrightarrow T'' \longrightarrow T \longrightarrow T' \longrightarrow 0.$$

Comme dans la preuve du théorème 8.2, utilisant les lemmes 8.7 et 8.8, on dispose d'un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Hom}(\mathbb{D}\times u, T'') \arrow[r] \arrow[d] & H^2(E,T'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^1(E,T) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kal}^{1/\infty}, T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathbb{D}\times u, T) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(E,T) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^1(E,T') \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kal}^{1/\infty}, T') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathbb{D}\times u, T') \arrow[r] \arrow[d] & H^2(E,T') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^2(E,T'') \arrow[r, "0"] & H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Kal}^{1/\infty}, T'') & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

On a utilisé ici que le foncteur $\mathrm{Hom}(\mathbb{D}, -)$ sur les tores sur E est exact puisque $H^1(\Gamma, X_*(t)_{\mathbb{Q}}) = 0$ pour un tore t sur E. Une chasse dans ce diagramme montre que l'application

$$H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}^{1/\infty}, T) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}^{1/\infty}, T')$$

est surjective. Comme dans la preuve du théorème 8.6 on est donc ramené à montrer que

$$H^2_{\text{ét}}(\text{Kott}^{1/\infty} \times_{\text{Spec}(E)} \text{Spec}(\overline{E}), T) = 0$$

soit encore

$$H^2_{\text{ét}}(B(\mathbb{D}_{\overline{E}} \times u_{\overline{E}}), \mathbb{G}_m) = 0.$$

Il y a une suite spectrale

$$E_1^{ij} = H^j_{\text{ét}}(X_i, \mathbb{G}_m) \Longrightarrow H^{i+j}_{\text{ét}}(B(\mathbb{G}_{m,\overline{E}} \times u_{\overline{E}}), \mathbb{G}_m)$$

avec $X_i = (\mathbb{G}_{m,\overline{E}} \times u_{\overline{E}})^i$. On a

$$E_1^{11} = \text{Pic}(\mathbb{G}_{m,\overline{E}} \times u_{\overline{E}}) = \varinjlim_{\substack{E'/E \\ n\geq 1}} \text{Pic}(\mathbb{G}_{m,\overline{E}} \times (\text{Res}_{E'/E}\mu_n)_{\overline{E}}) = 0.$$

On a bien sûr $E_1^{02} = 0$ puisque $\overline{E}$ est algébriquement clos. On a

$$\begin{aligned} E_2^{20} &= \ker(\mathcal{O}((\mathbb{G}_{m,\overline{E}} \times u_{\overline{E}})^2)^\times) \longrightarrow \mathcal{O}((\mathbb{G}_{m,\overline{E}} \times u_{\overline{E}})^3)^\times)) \\ &= \varinjlim_{\substack{E'/E \\ n\geq 1}} \ker(\mathcal{O}((\mathbb{G}_{m,\overline{E}} \times (\text{Res}_{E'/E}\mu_n)_{\overline{E}})^2)^\times) \longrightarrow \mathcal{O}((\mathbb{G}_{m,\overline{E}} \times (\text{Res}_{E'/E}\mu_n)_{\overline{E}})^3)^\times) \end{aligned}$$

dont on vérifie comme dans la preuve du lemme 8.5 qu'il est nul. □

8.4. **Le H^2 de la gerbe canonique $\mathfrak{X}$ sur la courbe.**

Théorème 8.10. *Pour D un groupe de type multiplicatif sur E on a $H^2_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, D) = 0$.*

Démonstration. Comme dans la preuve du théorème 8.9 on peut supposer que D est soit un schéma en groupes commutatif fini, soit un tore.

Commençons par le cas d'un schéma en groupes fini A. Soit

$$0 \longrightarrow A'' \longrightarrow A \longrightarrow A' \longrightarrow 0$$

une suite exacte. On utilise ([3]) que pour $0 \leq i \leq 2$, $H^i(E, A) \xrightarrow{\sim} H^i_{\text{ét}}(X, A)$. On a alors un diagramme

$$\begin{tikzcd} & & \text{Hom}(u, A'') \arrow[r] \arrow[d] & H^2(E, A'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ H^1(E, A) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, A) \arrow[r] \arrow[d] & \text{Hom}(u, A) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(E, A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ H^1(E, A') \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, A') \arrow[r] \arrow[d] & \text{Hom}(u, A') \arrow[r] \arrow[d] & H^2(E, A') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ H^2(E, A'') \arrow[r, "0"] & H^2_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, A'') & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme la flèche $H^2(E, A'') \to H^2_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, A'')$ est nulle puisqu'elle se factorise via

$$H^2(E, A'') \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(\text{Kal}, A'') \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, A'')$$

et on peut appliquer le lemme 8.3. Une chasse dans le diagramme montre alors que

$$H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, A) \to H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, A')$$

est surjectif. Comme dans la preuve du théorème 8.9 on est alors ramené à montrer que

$$H^2_{\text{ét}}([X_{\overline{E}}/u_{\overline{E}}], A) = 0.$$

Notons $M = A(\overline{E})$, un groupe abélien fini. Il y a une suite spectrale

$$E_1^{ij} = H^j_{\text{ét}}(X_i, M) \Longrightarrow H^{i+j}_{\text{ét}}([X_{\overline{E}}/u_{\overline{E}}], A)$$

où $X_i = X_{\overline{E}} \times u^i_{\overline{E}}$. On utilise ([3]) que pour $1 \leq k \leq 2$, $H^k_{\text{ét}}(X_{\overline{E}}, M) = 0$ et $H^0_{\text{ét}}(X_{\overline{E}}, M) = M$. On a donc $E_1^{ij} = 0$ pour $1 \leq j \leq 2$. On en déduit que

$$H^2_{\text{ét}}([X_{\overline{E}}/u_{\overline{E}}], A) = H^2_{cont}(\mathcal{C}(\Gamma, \widehat{\mathbb{Z}}(1)), M) = 0,$$

cf. la fin de la preuve du théorème 8.2. Cela termine le cas où D est fini.

Supposons maintenant que D soit un tore T. Soit $1 \to T'' \to T \to T' \to 1$ une suite exacte de tores. Il y a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Hom}(u,T'') \arrow[r] \arrow[d] & H^2_{\text{ét}}(X,T'') \arrow[r, equal] \arrow[d] & 0 \\
H^1_{\text{ét}}(X,T) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X},T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(u,T) \arrow[r] \arrow[d] & H^2_{\text{ét}}(X,T) \arrow[r, equal] \arrow[d] & 0 \\
H^1_{\text{ét}}(X,T') \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X},T') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(u,T') \arrow[r] \arrow[d] & H^2_{\text{ét}}(X,T') \arrow[r, equal] \arrow[d] & 0 \\
\underbrace{H^2_{\text{ét}}(X,T'')}_{0} \arrow[r] & H^2_{\text{ét}}(\mathfrak{X},T'') & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où on utilise l'annulation du $H^2_{\text{ét}}$ de la courbe à valeurs dans un tore ([3]). On en déduit la surjectivité de $H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, T) \to H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, T')$. Comme dans la preuve du théorème 8.9 on est alors ramené à montrer que

$$H^2_{\text{ét}}([X_{\overline{E}}/u_{\overline{E}}], \mathbb{G}_m) = 0.$$

On utilise la suite spectrale

$$E_1^{ij} = H^j_{\text{ét}}(X_i, \mathbb{G}_m) \Longrightarrow H^{i+j}_{\text{ét}}([X_{\overline{E}}/u_{\overline{E}}], \mathbb{G}_m)$$

avec $X_i = X_{\overline{E}} \times u^i_{\overline{E}}$. On a $E_1^{i2} = 0$ (annulation du groupe de Brauer de la courbe, cf. [3]), et $E_1^{i0} = \mathcal{C}(\Gamma, \widehat{\mathbb{Z}}(1))^i$. On a donc $E_1^{02} = 0$ et $E_2^{20} = 0$ (annulation du H^2_{cont} de $\mathcal{C}(\Gamma, \widehat{\mathbb{Z}}(1))$ comme précédemment). De plus,

$$\begin{aligned} E_1^{11} &= \mathrm{Pic}\Big(\varprojlim_{E'/E, n\geq 1} X_{\overline{E}}^{\mathcal{C}(\Gamma_E/\Gamma_{E'}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})(1)} \Big) \\ &= \varinjlim_{E'/E, n\geq 1} \mathbb{Q}^{\mathcal{C}(\Gamma_E/\Gamma_{E'}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))} \end{aligned}$$

et donc $E_2^{11} = H^1_{cont}(\mathcal{C}(\Gamma, \widehat{\mathbb{Z}}(1)), \mathbb{Q})$ où $\mathbb{Q}$ est muni de la topologie discrète et qui est bien sûr nul. Ceci conclut la preuve. □

9. L'ensemble de Kottwitz étendu

9.1. **Définition.** Rappelons que l'ensemble de Kottwitz $B(G)$ est celui des classes d'isomorphismes de G-isocristaux c'est à dire

$$B(G) = H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}, G).$$

Il se décrit concrètement comme

$$\begin{aligned} B(G) &= H^1(W_E, G(\overline{\breve{E}})) \\ &= G(\breve{E})/\sigma\text{-conjugaison}. \end{aligned}$$

Définition 9.1 (Ensemble de Kottwitz étendu)**.** *On note $B_e(G)$ l'ensemble des éléments de $H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}^{1/\infty}, G)$, les classes d'isomorphisme de G-isocristaux étendus, tels que la classe associée dans $[Hom(u_{\overline{E}}, G_{\overline{E}})/G(\overline{E})]^\Gamma$ soit centrale c'est à dire donnée par un morphisme $u \to Z_G$.*

On dispose de la description concrète suivante de l'ensemble de Kottwitz étendu. On note $[(\kappa_{\tau_1,\tau_2})] \in H^2(E, u)$ le cocycle définissant la gerbe de Kaletha.

Proposition 9.2. *On a* $B_e(G) = \{(\lambda, (c_\tau)_{\tau \in W_E})\}/\sim$ *où*

(1) $\lambda : u \to Z_G$,

(2) $c_\tau \in G(\overline{\breve{E}})$ *vérifie* $\lambda(\kappa_{\tau_1,\tau_2}) c_{\tau_1\tau_2} = c_{\tau_1} c_{\tau_2}^{\tau_1}$,

(3) $c_\tau = 1$ *pour* τ *dans un sous-groupe ouvert de* W_E,

(4) pour $g \in G(\overline{\breve{E}})$, $(\lambda, (c_\tau)_\tau) \sim (g\lambda g^{-1}, (gc_\tau g^{-\tau})_\tau)$.

Démonstration. Il y a une présentation fpqc de la gerbe Kott donnée par

$$\mathrm{Spec}(\overline{\breve{E}}) \times_{\mathrm{Spec}(E)} \underline{W_E} \rightrightarrows \mathrm{Spec}(\breve{E}) \longrightarrow \mathrm{Kott}$$

où $\underline{W_E} = \varprojlim_{U \subset W_E} W_E/U$ comme schéma en groupes pro-discret sur $\mathrm{Spec}(E)$, U parcourant les sous-groupes ouverts de W_E. De fait, la catégorie Tannakienne des fibrés vectoriels sur la gerbe quotient coïncide avec la catégorie des isocristaux et on conclut qu'il s'agit bien là d'une présentation via l'équivalence entre catégories Tannakiennes et gerbes fpqc. Soit maintenant

$$1 \longrightarrow u(\overline{E}) \longrightarrow V \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

la gerbe galoisienne associée à Kal. Il lui est associé une suite exacte de $\overline{E}$-schémas en groupes pro-finis

$$1 \longrightarrow u_{\overline{E}} \longrightarrow \underline{V} \longrightarrow \underline{\Gamma}_{\overline{E}} \longrightarrow 1.$$

Une présentation fpqc de Kal est alors donnée par

$$\underline{V} \rightrightarrows \mathrm{Spec}(\overline{E}) \longrightarrow \mathrm{Kal}$$

où le premier morphisme $\underline{V} \to \mathrm{Spec}(\overline{E})$ est le morphisme structural et le second est obtenu en composant avec un élément de Γ via $V \to \Gamma$. On peut tirer en arrière en utilisant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & & (\underline{W_E})_{\overline{\breve{E}}} \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & u_{\overline{\breve{E}}} \arrow[r] & \underline{V}_{\overline{\breve{E}}} \arrow[r] & \underline{\Gamma}_{\overline{\breve{E}}} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

pour obtenir une suite exacte de $\overline{\breve{E}}$-schémas en groupes pro-discrets

$$1 \longrightarrow u_{\overline{\breve{E}}} \longrightarrow Z \longrightarrow (\underline{W_E})_{\overline{\breve{E}}} \longrightarrow 1.$$

Des considérations précédentes on déduit que

$$Z \rightrightarrows \mathrm{Spec}(\overline{\breve{E}}) \longrightarrow \mathrm{Kott} \times \mathrm{Kal}$$

est une présentation fpqc. Il s'en suit que

$$H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott} \times \mathrm{Kal}, G) = H^1_{alg}(Z(\overline{\breve{E}}), G(\overline{\breve{E}}))$$

qui se décrit explicitement comme les couples $(\lambda, (c_\tau)_{\tau \in W_E})$ à conjugaison près où $\lambda : u_{\overline{\breve{E}}} \to G_{\overline{\breve{E}}}$, $c_\tau \in G(\overline{\breve{E}})$, $\lambda^\tau = c_\tau^{-1} \lambda c_\tau$, $c_{\tau_1\tau_2} = \lambda(\kappa_{\tau_1,\tau_2}) c_{\tau_1} c_{\tau_2}^{\tau_1}$ et $\tau \mapsto c_\tau$ est trivial sur un sous-groupe ouvert de W_E. □

Remarque 9.3 (Éléments « decent »)**.** *Puisque la gerbe* Kott *vérifie* $\mathrm{Kott}(E^{nr}) \neq \emptyset$, *cf. début section 4.1,* $\mathrm{Kott}^{1/\infty}(\overline{E}) \neq \emptyset$. *On en déduit que tout* $(\lambda, (c_\tau)_\tau)$ *comme dans la proposition 9.2 est équivalent à un tel couple où* $c_\tau \in G(\overline{E})$.

9.2. λ_b, ν_b **et éléments basiques.** Il y a une suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \longrightarrow B(G) \longrightarrow B_e(G) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Hom}(u, Z_G) \longrightarrow 1$$

où la surjectivité à droite résulte de la même surjectivité pour un tore de G, cf. lemme 9.6. Pour $[b] \in B_e(G)$ on notera

$$\lambda_b : u \to Z_G$$

le morphisme associé. Il lui est également associé

$$[\nu_b] \in \left[\mathrm{Hom}(\mathbb{D}_{\overline{E}}, G_{\overline{E}})/G(\overline{E})\right]^{\Gamma}$$

son point de Newton. Si $A \subset T \subset B$ est un tore déployé maximal dans un tore maximal dans un sous-groupe de Borel de G^* on a une identification

$$\left[\mathrm{Hom}(\mathbb{D}_{\overline{E}}, G_{\overline{E}})/G(\overline{E})\right]^{\Gamma} = X_*(A)^+_{\mathbb{Q}}.$$

Définition 9.4. *L'élément $[b] \in B_e(G)$ est basique si ν_b est central.*

De la proposition 1.8 on déduit la proposition suivante.

Proposition 9.5. *Soit $[b] \in B_e(G)$.*

(1) *Le centralisateur tordu de b, G_b, est un groupe réductif sur E qui est une forme intérieur d'un sous-groupe de Levi de G^*, le centralisateur de $[\nu_b]$.*
(2) *Si G est quasidéployé alors b possède une réduction canonique basique à ce sous-groupe de Levi.*

9.3. **Le cas d'un tore.** Commençons par un lemme bien connu.

Lemme 9.6. *Pour un tore T sur E on a $H^2(W_E, T(\overline{\breve{E}})) = 0$.*

Démonstration. Le corps $\breve{E}$ est de dimension cohomologique 1. Il en est de même pour le groupe $\sigma^{\mathbb{Z}}$. Puisque T est connexe on a de plus $H^1(I_E, T(\overline{\breve{E}})) = 0$. La suite spectrale de Hochschild-Serre $E_2^{pq} = H^p(\sigma^{\mathbb{Z}}, H^q(I_E, T(\overline{\breve{E}})) \Rightarrow H^{p+q}(W_E, T(\overline{\breve{E}}))$ permet de conclure. □

On en déduit que l'application $B_e(T) \to \mathrm{Hom}(u, T)$ est surjective.

Proposition 9.7. *Pour un tore T il y a une identification canonique*

$$B_e(T) = X_*(T)_{\mathbb{Q}}/I_\Gamma.X_*(T)$$

et la suite exacte

$$0 \longrightarrow X_*(T)_\Gamma \longrightarrow X_*(T)_{\mathbb{Q}}/I_\Gamma.X_*(T) \longrightarrow X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

s'identifie à la suite

$$0 \longrightarrow B(T) \longrightarrow B_e(T) \longrightarrow Hom(u, T) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. On vérifie le fait suivant. Soit F un foncteur sur la catégorie des tores sur E qui

(1) est une extension $0 \to B(-) \to F(-) \to \mathrm{Hom}(u, -) \to 0$,
(2) il y a un isomorphisme $F(\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$ rendant commutatif le diagramme diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & B(\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & F(\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(u, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les flèches verticales de gauche et de droite sont les identifications standards.

Alors $F(-) \simeq X_*(-)_{\mathbb{Q}}/I_\Gamma.X_*(-)$ avec identification des suites exactes associées. De fait, le diagramme précédent implique l'existence d'un diagramme pour $E'|E$ de degré fini

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B(\mathrm{Res}_{E'/E}\,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "N_{E'/E}", "\simeq"'] & F(\mathrm{Res}_{E'/E}\,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "N_{E'/E}"] & \mathrm{Hom}(u, \mathrm{Res}_{E'/E}\,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "N_{E'/E}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B(\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & F(\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}(u, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Q} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Cela implique que la suite du haut est le tiré en arrière par $\mathrm{Hom}(u, \mathrm{Res}_{E'/E}\,\mathbb{G}_m) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de la suite du bas. On en déduit qu'il y a une identification

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B(\mathrm{Res}_{E'/E}\,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & F(\mathrm{Res}_{E'/E}\,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}(u, \mathrm{Res}_{E'/E}\,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{Q}[\Gamma_E/\Gamma_{E'}]/\mathbb{Z}[\Gamma_E/\Gamma_{E'}]_0 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{aug}"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\Gamma_E/\Gamma_{E'}] \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{aug}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Q} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\mathbb{Z}[\Gamma_E/\Gamma_{E'}]_0$ désigne le noyau de l'augmentation vers $\mathbb{Z}$. Soit maintenant T un tore quelconque et $\nu \in X_*(T)$. On a $\nu : \mathbb{G}_{m/E'} \to T_{E'}$ pour E'/E de degré fini que l'on voit maintenant comme un morphisme $\nu : \mathrm{Res}_{E'/E}\,\mathbb{G}_m \to T$. Celui-ci induit

$$F(\nu) : \mathbb{Q}[\Gamma_E/\Gamma_{E'}]/\mathbb{Z}[\Gamma_E/\Gamma_{E'}]_0 = F(\mathrm{Res}_{E'/E}\,\mathbb{G}_m) \longrightarrow F(T).$$

On définit alors

$$\begin{aligned} X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} &\longrightarrow F(T) \\ \nu \otimes \lambda &\longmapsto F(\nu)\big(\lambda[1] \bmod \mathbb{Z}[\Gamma_E/\Gamma_{E'}]_0\big) \end{aligned}$$

Ce morphisme se factorise de façon évidente en un morphisme

$$X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/I_\Gamma.X_*(T) \longrightarrow F(T)$$

dont on vérifie qu'il est un isomorphisme en prenant une résolution de T par des tores induits.

Il reste donc à vérifier au final qu'il y a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\mathrm{Kott}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Pic}(\mathrm{Kott}^{1/\infty}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}(u, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Q} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ce qui ne pose aucun problème en utilisant la description explicite de la catégorie Tannakienne des isocristaux étendus (6.4) qui permet aisément de calculer son groupe de Picard des objets inversibles. □

9.4. **Invariance par forme intérieure.**

Proposition 9.8. *L'application $B_e(G) \longrightarrow B_e(G_{ad}) = B(G_{ad})$ est surjective.*

Démonstration. Il y a une suite exacte d'ensembles pointés

$$B_e(G) \longrightarrow B_e(G_{ad}) \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}^{1/\infty}, Z_G).$$

La proposition est donc une conséquence du théorème 8.9. □

Corollaire 9.9. *Pour un choix d'un élément basique $[b] \in B_e(G^*)$ on a $G \simeq (G^*)_b$ et il y a une bijection*

$$B_e(G^*) \xrightarrow{\sim} B_e(G)$$

envoyant b sur 1.

Remarquons que l'on peut alors retrouver l'ensemble $B(G)$ comme sous-ensemble de $B_e(G^*)$

$$B(G) = \{[b'] \in B_e(G^*) \mid \lambda_{b'} = \lambda_b\}.$$

Le corollaire précédent s'applique donc également à l'étude de $B(G)$.

9.5. **L'application κ.**

9.5.1. *Le groupe fondamental étendu.* On note T un tore maximal dans G et Φ, resp. $\check{\Phi}$, l'ensemble des racines, resp. coracines, associées. Rappelons que le groupe fondamental de Borovoï de G est $\pi_1(G) = X_*(T)/\langle\check{\Phi}\rangle$. Puisque W, le groupe de Weyl associé à T, agit trivialement sur celui-ci, il ne dépend pas canoniquement du choix de T. Kottwitz définit dans [14] une application $\kappa : B(G) \to \pi_1(G)_\Gamma$. On va définir une « extension » de cette application.

Définition 9.10 (Groupe fondamental étendu)**.** *On note*

$$\pi_1(G)^e_\Gamma = \langle\Phi\rangle^*/\langle\check{\Phi}\rangle + I_\Gamma.X_*(T)$$

où $\langle\Phi\rangle^* = \{\nu \in X_*(T)_\mathbb{Q} \mid \forall \alpha \in \Phi, \langle\nu,\alpha\rangle \in \mathbb{Z}\}$.

Commençons par remarquer que ce groupe est bien défini indépendamment du choix d'un tore maximal. En effet, puisque pour $\nu \in X_*(T)_\mathbb{Q}$ et $\alpha \in \Phi$ on a $s_\alpha(\nu) = \nu - \langle\nu,\alpha\rangle\check{\alpha}$, W agit trivialement sur $\langle\Phi\rangle^*/\langle\check{\Phi}\rangle$ et donc $\pi_1(G)^e_\Gamma$. Il y a une injection naturelle

$$\pi_1(G)_\Gamma \subset \pi_1(G)^e_\Gamma$$

qui s'inscrit dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_1(G)_\Gamma \longrightarrow \pi_1(G)^e_\Gamma \longrightarrow \underbrace{X^*(Z_G)^D}_{\mathrm{Hom}(u,Z_G)} \longrightarrow 0.$$

Remarquons que l'on a

$$\langle\Phi\rangle^* = \langle\Phi\rangle^* \cap \langle\check{\Phi}\rangle_\mathbb{Q} \oplus \langle\Phi\rangle^\perp_\mathbb{Q}$$

et donc

$$\langle\Phi\rangle^*/\langle\check{\Phi}\rangle = \underbrace{\langle\Phi\rangle^* \cap \langle\check{\Phi}\rangle_\mathbb{Q}/\langle\check{\Phi}\rangle}_{\pi_1(G_{ad})} \oplus \underbrace{\langle\Phi\rangle^\perp_\mathbb{Q}}_{X_*(Z_G)_\mathbb{Q}}. \tag{11}$$

On va définir dans la suite une application κ s'inscrivant dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B(G) & \xrightarrow{\kappa} & \pi_1(G)_\Gamma \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ B_e(G) & \xrightarrow{\kappa} & \pi_1(G)^e_\Gamma. \end{array}$$

et étendant donc l'application de Kottwitz.

9.5.2. *L'application κ dans le cas quasidéployé.* Dans cette sous-section on suppose G quasidéployé. Commençons par un lemme.

Lemme 9.11. *Si G est quasidéployé et T un tore elliptique dans G alors tout élément basique dans $B_e(G)$ admet une réduction à T.*

Démonstration. L'image d'un tel élément b dans $B_e(G_{ad})_b = H^1(E, G_{ad})$ admet une réduction au tore anisotrope T_{ad} de G_{ad} ([13]). L'application $B_e(T) \to B_e(T_{ad})$ est surjective et on peut donc trouver $b' \in B_e(T)$ d'image b'' dans $B_e(G)$ qui a même image que b dans $B_e(G_{ad})$. On conclut en utilisant la suite exacte

$$H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}^{1/\infty}, Z_G) \longrightarrow B_e(G) \longrightarrow B_e(G_{ad})$$

et le fait que l'application $H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}^{1/\infty}, Z_G) \longrightarrow B_e(G)$ se factorise par $B_e(T)$. □

Attaquons la définition de l'application κ. Soit T un tore dans G et $b' \in B_e(T)$ une réduction de b à T, par exemple T elliptique dans un sous-groupe de Levi (cf. lemme 9.11). On a $B_e(T) = X_*(T)_{\mathbb{Q}}/I_\Gamma.X_*(T)$. Puisque λ_b est central, l'image de l'élément correspondant à b' dans $X_*(T)\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = X^*(T)^D$ est dans $\langle\Phi\rangle^\perp$. L'élément b' est donc dans $\langle\Phi\rangle^*/I_\Gamma.X_*(T)$. L'image de cet élément dans $\pi_1(G)^e_\Gamma$ est par définition $\kappa(b)$. Puisque W agit trivialement sur $\pi_1(G)^e_\Gamma$, i.e. le fait que ce groupe soit canoniquement défini indépendamment du choix d'un tore, cette définition ne dépend pas du choix du choix de T et de la réduction de b à T choisis.

9.5.3. *L'application κ en général.* Choisissons $b \in B_e(G)$ basique tel que G_b soit quasidéployé. Il y a une bijection

$$f_b : B_e(G) \xrightarrow{\sim} B_e(G_b)$$

envoyant b sur 1. On pose alors

$$\kappa_G = \kappa_{G_b} \circ f_b - \kappa_{G_b}(f_b(1)).$$

Il s'agit maintenant de voir que cette définition ne dépend pas du choix de b basique tel que G_b soit quasidéployé. Soit donc $b' \in B_e(G)$ un autre élément basique tel que $G_{b'}$ soit quasidéployé. Les éléments b' et b ont donc même image dans $B_e(G_{ad})$ et diffèrent donc d'un élément $z \in H^1_{\text{ét}}(\text{Kott}^{1/\infty}, Z_G)$, $b' = zb$. Le résultat se déduit alors de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & B_e(G_b) \\
B_e(G) \arrow[ur, "f_b"] \arrow[dr, "f_{b'}"'] & \\
 & B_e(G_{b'}) \arrow[uu, "\times z"', "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

où on utilise que $Z_G = Z_{G_{b'}} = Z_{G_b}$. $\square$

Au final on a un morphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & B(G) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"] & B_e(G) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\kappa"] & \mathrm{Hom}(u, Z_G) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
0 \arrow[r] & \pi_1(G)_\Gamma \arrow[r] & \pi_1(G)^e_\Gamma \arrow[r] & X^*(Z_G)^D \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

9.6. **Classification des éléments basiques.**

Théorème 9.12. *L'application κ restreinte aux éléments basiques induit une bijection*

$$B_e(G)_b \xrightarrow{\sim} \pi_1(G)^e_\Gamma.$$

Démonstration. On peut supposer G quasidéployé. La surjectivité résulte de ce que si T est un tore elliptique dans G alors l'image de $\langle\Phi\rangle^*$ via

$$X_*(T)_{\mathbb{Q}}/I_\Gamma.X_*(T) = B_e(T) \longrightarrow B_e(G)_b$$

se surjecte sur $\pi_1(G)^e_\Gamma$. Pour l'injectivité, si $b, b' \in B_e(G)$ vérifient $\kappa(b) = \kappa(b')$ alors $\kappa(b_{ad}) = \kappa(b'_{ad}) \in \pi_1(G_{ad})^e_\Gamma$. Puisque

$$\kappa : B_e(G_{ad})_b = H^1(E, G_{ad}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(G_{ad})^e_\Gamma = \pi_1(G_{ad})_\Gamma,$$

on a donc $b_{ad} = b'_{ad}$. On dispose maintenant de la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(\text{Kott}^{1/\infty}, Z_G) \longrightarrow B_e(G) \longrightarrow B_e(G_{ad})$$

i.e. les fibres de $B_e(G) \longrightarrow B_e(G_{ad})$ sont des espaces principaux homogènes sous $H^1_{\text{ét}}(\text{Kott}^{1/\infty}, Z_G)$. Il suffit donc de voir que le composé

$$H^1_{\text{ét}}(\text{Kott}^{1/\infty}, Z_G) \longrightarrow B_e(G)_b \xrightarrow{\kappa} \pi_1(G)^e_\Gamma$$

induit une surjection de groupes

$$H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}^{1/\infty}, Z_G) \longrightarrow \ker(\pi_1(G)^e_\Gamma \longrightarrow \pi_1(G_{ad})_\Gamma).$$

Cela se vérifie en utilisant la décomposition (11) qui permet de voir que

$$\ker(B_e(T) \longrightarrow B_e(T^{ad})) \longrightarrow \ker(\pi_1(G)^e_\Gamma \longrightarrow \pi_1(G_{ad})_\Gamma)$$

est surjectif. $\square$

On a donc un diagramme dont le carré de gauche est cartésien

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi_1(G)_\Gamma & \longrightarrow & \pi_1(G)^e_\Gamma & \longrightarrow & X^*(Z_G)^D & \longrightarrow & 0 \\
 & & \simeq\uparrow & & \simeq\uparrow & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & B(G)_b & \longrightarrow & B_e(G)_b & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{Hom}(u, Z_G) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Exemple 9.13. *Pour GL_n on a $\pi_1(GL_n)^e_\Gamma = \mathbb{Q}$. À $\mu \in \mathbb{Q}$ correspond le fibré semi-stable $\mathcal{O}_X\big(\frac{\lfloor\mu\rfloor}{n}\big)^{(\lfloor\mu\rfloor,n)} \otimes \big(\sqrt[\frac{sn}{\{\mu\}}]{\mathcal{O}_X(1)}\big)^{\otimes s}$, pour $s \gg 1$, sur la gerbe des racines de $\mathcal{O}_X(1)$.*

9.7. **Description par réduction à un Levi.** Via une identification $B_e(G) \simeq B_e(G^*)$ (corollaire 9.9) on peut supposer que G est quasidéployé. On utilise la proposition 9.5. De celle-ci et du théorème 9.12 on déduit une décomposition

$$B_e(G) = \coprod_{M \text{ Levi standard}} \big(\langle\Phi\rangle^*/\langle\check{\Phi}_M\rangle + I_\Gamma.X_*(T)\big)_{M\text{-régulier}}.$$

Ici la condition de M-régularité concerne l'application de projection sur $\langle\Phi_M\rangle^\perp_\mathbb{Q}$

$$\langle\Phi\rangle^*/\langle\check{\Phi}_M\rangle + I_\Gamma.X_*(T) \longrightarrow X_*(Z_M)^\Gamma_\mathbb{Q}.$$

L'ensemble M-régulier est alors l'image réciproque des éléments de $X_*(Z_M)^\Gamma_\mathbb{Q}$ de centralisateur M i.e. les $\nu \in X_*(Z_M)^\Gamma_\mathbb{Q}$ tels que pour tout $\alpha \in \Phi \setminus \Phi_M$, $\langle\nu,\alpha\rangle \neq 0$.

Remarquons finalement qu'après un choix de $[b] \in B_e(G)$ basique tel que G_b soit quasidéployé *on en déduit une description explicite de l'ensemble de Kottwitz classique $B(G)$!* De fait, si

$$\Lambda_M : \big(\langle\Phi\rangle^*/\langle\check{\Phi}_M\rangle + I_\Gamma.X_*(T)\big)_{M\text{-régulier}} \longrightarrow X^*(Z_G)^D$$

alors

$$B(G) = \coprod_M \Lambda_M^{-1}(\lambda_b).$$

10. Lien avec les travaux de Kaletha

10.1. **Formes intérieures rigides et $H^1(u \to W, Z_G \to G)$.** L'ensemble $H^1(u \to W, Z_G \to G) := \varinjlim_{\substack{Z\subset Z_G \\ \text{fini}}} H^1(u \to W, Z \to G)$ de Kaletha ([10]) s'identifie au sous-ensemble de $H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kal}, G)$ des éléments tels que l'élément associé de $[\mathrm{Hom}(u_{\overline{E}}, G_{\overline{E}})/G(\overline{E})]^\Gamma$ soit central i.e. donné par un morphisme $u \to Z_G$. Il s'identifie donc à $\{(\lambda, (c_\tau)_{\tau\in\Gamma})\}/\sim$ où

(1) $\lambda : u \to Z_G$,

(2) $c_\tau \in G(\overline{E})$ vérifie $\lambda(\kappa_{\tau_1,\tau_2})c_{\tau_1\tau_2} = c_{\tau_1}c_{\tau_2}^{\tau_1}$,

(3) $c_\tau = 1$ pour τ dans un sous-groupe ouvert,

(4) pour $g \in G(\overline{E})$, $(\lambda, (c_\tau)_\tau) \sim (g\lambda g^{-1}, (gc_\tau g^{-\tau})_\tau)$.

Le lemme qui suit est immédiat.

Lemme 10.1. *L'ensemble de Kaletha coïncide avec les classes de G-isocristaux étendus unité c'est à dire $\{[b] \in B_e(G) \mid \nu_b = 0\}$.*

Corollaire 10.2. *Via l'application κ, l'ensemble de Kaletha s'identifie à* $\ker(\pi_1(G)^e_\Gamma \to X_*(Z_G)^\Gamma_\mathbb{Q})$ *où le morphisme est donné par la décomposition en somme directe dans l'équation (11). En d'autres termes, l'ensemble de Kaletha s'identifie à*

$$\big(\underbrace{\langle\Phi\rangle^* \cap \langle\check{\Phi}\rangle}_{\langle\Phi\rangle^\vee}{}_\mathbb{Q} \oplus I_\Gamma.\langle\Phi\rangle^\perp_\mathbb{Q}\big)/I_\Gamma.X_*(T).$$

Exemple 10.3. *(1) Si G est déployé alors l'ensemble de Kaletha s'identifie à $\langle\Phi\rangle^\vee$.*

(2) Si G est un tore T alors cet ensemble est $I_\Gamma.X_*(T)_\mathbb{Q}/I_\Gamma.X_*(T)$.

Remarque 10.4. *Le corollaire 10.2 permet de retrouver les théorèmes 4.8 et 4.11 de* [10].

10.2. **Formes intérieures rigides contre isocristaux.** Considérons le morphisme évident $u \to \mathbb{D}$ obtenu en projetant u sur $\varprojlim_{n\geq 1} \mu_n$ de la façon suivante. On peut écrire

$$u = \varprojlim_{E/F} \mathrm{Res}_{E/F}\mu_{[E:F]}.$$

Pour un terme dans cette limite projective et $n|[E:F]$ on définit

$$\mathrm{Res}_{E/F}\mu_n \xrightarrow{N_{E/F}^{-1}} \mu_{[E:F]} \xrightarrow{(-)^{\frac{[E:F]}{n}}} \mu_n.$$

Cela définit un morphisme $u \to \varprojlim_{n\geq 1} \mu_n$ que l'on compose avec l'injection naturelle dans $\mathbb{D}$. On en déduit un morphisme $u \to \mathbb{D}$. On vérifie que le morphisme induit $H^2(E,u) \to H^2(E,\mathbb{D})$ envoie [Kal] sur [Kott]. Les deux gerbes étant rigides on en déduit un morphisme

$$\mathrm{Kal} \longrightarrow \mathrm{Kott}$$

bien défini à un 2-isomorphisme près. Celui-ci induit une application

$$B(G)_b \longrightarrow \{[b] \in B_e(G) \mid \nu_b = 1\}. \tag{12}$$

Proposition 10.5 ([12, Proposition 3.2])**.** *Si T est un tore alors l'application (12) s'identifie à l'application $X_*(T)/I_\Gamma.X_*(T) \to I_\Gamma.X_*(T)_\mathbb{Q}/I_\Gamma.X_*(T)$ donnée par $x \mapsto x - \mathrm{moy}(x)$ où $\mathrm{moy}(x)$ désigne l'application moyenne galoisienne.*

Reprenons la décomposition (11). D'après celle-ci la projection sur $\langle\Phi\rangle^\perp_\mathbb{Q}$ fait de $X_*(Z_G)^\Gamma_\mathbb{Q}$ un facteur direct dans $\pi_1(G)^e_\Gamma$:

$$\pi_1(G)^e_\Gamma = \ker\big(\pi_1(G)^e_\Gamma \to X_*(Z_G)^\Gamma_\mathbb{Q}\big) \oplus X_*(Z_G)^\Gamma_\mathbb{Q}.$$

Cela définit une projection $proj : \pi_1(G)^e_\Gamma \longrightarrow \ker\big(\pi_1(G)^e_\Gamma \to X_*(Z_G)^\Gamma_\mathbb{Q}\big)$.

Proposition 10.6. *L'application composée*

$$\pi_1(G)_\Gamma \hookrightarrow \pi_1(G)^e_\Gamma \xrightarrow{proj} \ker\big(\pi_1(G)^e_\Gamma \to X_*(Z_G)^\Gamma_\mathbb{Q}\big)$$

composée avec l'inverse de κ définit l'application (12)

$$B(G)_b \longrightarrow H^1(u \to W, Z_G \to G)$$

de [12] *permettant de voir toute forme intérieure étendue comme une forme rigide.*

Démonstration. On peut supposer G quasidéployé. On utilise le lemme 9.11. Le résultat se déduit alors de la proposition 10.5 après avoir fixé un tore elliptique. □

11. Ensemble de Kottwitz étendu et G-torseurs sur le champ $\mathfrak{X}$

11.1. **Fibrés vectoriels.**

11.1.1. *Définitions.* Le morphisme $\mathfrak{X} \longrightarrow \mathrm{Kott}^{1/\infty}$ induit un $\otimes$-foncteur des isocristaux étendus vers les fibrés sur $\mathfrak{X}$.

Définition 11.1. *Pour $D \in \mathrm{Isoc}^e$ on note $\mathscr{E}(D)$ le fibré vectoriel associé sur $\mathfrak{X}$.*

Ce foncteur est compatible à celui défini dans [4] pour les isocristaux : il y a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Isoc} & \longrightarrow & \{\text{fibrés vectoriels sur } X\} \\ \uparrow\!\downarrow & & \uparrow\!\downarrow \\ \mathrm{Isoc}^e & \longrightarrow & \{\text{fibrés vectoriels sur } \mathfrak{X}\}. \end{array}$$

où les flèches verticales de droite sont le tiré en arrière, resp. le poussé en avant, via $\mathfrak{X} \to X$. L'opération de poussé en avant ne commute pas au produit tensoriel (cf. section 6.4.1 où cela était déjà remarqué).

La gerbe $\mathfrak{X} \to X$ devient triviale sur $X_{\overline{E}}$. Une trivialisation définit un morphisme $[X_{\overline{E}}/u_{\overline{E}}] \to \mathfrak{X}$. Le foncteur image réciproque définit alors un foncteur

$$\{\text{fibrés vectoriels sur } \mathfrak{X}\} \longrightarrow \{\text{fibrés vectoriels } X^*(u)\text{-gradués sur } X_{\overline{E}}\}$$

pour lequel les fibrés vectoriels sur X sont ceux dont la graduation du fibré associé sur $X_{\overline{E}}$ est triviale.

11.1.2. *Description et classification.* Pour $\alpha \in X^*(u)$ on note $\mathscr{L}_\alpha$ le fibré associé sur $X_{\overline{E}}$. Pour $\tau \in \Gamma$ il y a un isomorphisme $\mathscr{L}_\alpha^\tau \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}_{\alpha^\tau}$.

Théorème 11.2. *(1) La catégorie des fibrés vectoriels sur $\mathfrak{X}$ s'identifie à celle des fibrés vectoriels $X^*(u)$-gradués*

$$\mathscr{E} = \bigoplus_{\alpha \in X^*(u)} \mathscr{E}_\alpha$$

sur $X_{\overline{E}}$ munis d'une action discrète semi-linéaire de Γ vérifiant $\tau : \mathscr{E}_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_{\alpha^\tau}$. Le produit tensoriel est donné par

$$(\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}')_\alpha = \bigoplus_{\beta+\gamma=\alpha} \mathscr{E}_\beta \otimes \mathscr{E}'_\gamma \otimes \mathscr{L}_{c(\beta,\gamma)}.$$

(2) Le foncteur

$$\mathrm{Isoc}^e \longrightarrow \{\textit{Fibrés vectoriels sur } \mathfrak{X}\}$$

est essentiellement surjectif.

Démonstration. Le point (1) est une conséquence de la proposition 3.4 couplé à un argument de descente galoisienne comme dans la preuve du théorème 6.4. Le point (2) s'en déduit en appliquant le théorème principal de [3]. □

11.1.3. *Filtration de Harder-Narasimhan.* Soit $\mathscr{E} = \bigoplus_\alpha \mathscr{E}_\alpha$ un fibré vectoriel sur $\mathfrak{X}$ comme dans le théorème 11.2. La filtration de Harder-Narasimhan de $\mathscr{E}$ comme fibré sur X est compatible à la décomposition en somme directe indexée par $X^*(u)$ et l'action de Γ. Elle définit donc une filtration canonique du fibrés vectoriel sur $\mathfrak{X}$. Le théorème qui suit ne pose alors pas de problème.

Proposition 11.3. *(1) Le foncteur*

$$\mathscr{E}(-) : \mathrm{Isoc}^e \to \{\textit{fibrés vectoriels sur } \mathfrak{X}\}$$

induit une équivalence en restriction aux isocristaux étendus isoclines de pente λ avec les fibrés semi-stables de pente $-\lambda$.

(2) Il induit une équivalence entre Isoc^e et les fibrés vectoriels gradués $\mathscr{E} = \oplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} \mathscr{E}_\lambda$ sur $\mathfrak{X}$ avec $\mathscr{E}_\lambda$ semi-stable de pente $-\lambda$.

(3) Le foncteur de graduation de la filtration de Harder-Narasimhan induit un inverse à $\mathscr{E}(-)$.

(4) Le produit tensoriel de deux fibrés semi-stables est semi-stable.

11.2. **G-fibrés.** Soit $\mathscr{E}$ un G-fibré sur $\mathfrak{X}$. On peut le voir soit comme un G-torseur étale sur $\mathfrak{X}$, soit comme un $\otimes$-foncteur fidèle

$$\omega_{\mathscr{E}} : \mathrm{Rep}(G) \longrightarrow \{\text{fibrés vectoriels sur } \mathfrak{X}\}.$$

Théorème 11.4. *L'application $[b] \mapsto [\mathscr{E}_b]$ induit une bijection*

$$B_e(G) \xrightarrow{\sim} \{[\mathscr{E}] \in H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, G) \mid \lambda_{\mathscr{E}} : u \to Z_G\}.$$

Démonstration. Soit $\mathscr{E}$ un G-torseur sur $\mathfrak{X}$ et $\lambda_{\mathscr{E}} : u \to Z_G$. Choisissons $b \in B_e(G)$ basique tel que $\lambda_b = \lambda_{\mathscr{E}}$. On peut alors voir $\mathscr{E}$ comme un G_b-torseur $\mathscr{E}'$ sur $\mathfrak{X}$ tel que $\lambda_{\mathscr{E}'} = 0$ et donc $\mathscr{E}$ provient d'un G-torseur sur X par image réciproque. Le résultat se déduit alors du théorème principal de [3], cf. [1] également. □

Remarque 11.5. *On peut plus généralement montrer que $H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}^{1/\infty}, G) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, G)$ mais on ne voit pas l'utilité d'un tel énoncé.*

12. Conjecture de géométrisation pour les groupes non quasidéployés à centre non connexe

12.1. **κ en termes du groupe dual.** Soit $\widehat{G}$ le groupe dual sur $\mathbb{C}$ de G muni de son action de Γ. On note

$$Z(\widehat{G})^0_{sc},$$

le pro-tore $\varprojlim_{n\geq 1} Z(\widehat{G})^0$, où l'application de transition entre le niveau n et $m|n$ est $z \mapsto z^{\frac{n}{m}}$, qui est le revêtement universel du tore complexe $Z(\widehat{G})^0$. On a

$$X^*(Z(\widehat{G})^0_{sc}) = X_*(Z_G)_{\mathbb{Q}}.$$

On s'intéresse au groupe

$$\widehat{G}^e = \left(\widehat{G}\right)_{sc} \times Z(\widehat{G})^0_{sc},$$

qui est le revêtement universel du groupe noté $\widehat{\widehat{G}}$ dans [10], qui est une version « étendue » du dual de Langlands de G. Il y a un morphisme surjectif

$$\widehat{G}^e \longrightarrow \widehat{G}.$$

Proposition 12.1. *Il y a une identification*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(G)^e_\Gamma & = & X^*\Big(Z(\widehat{G}^e) \underset{Z(\widehat{G})}{\times} Z(\widehat{G})^\Gamma\Big) \\ \big\uparrow & & \big\uparrow \\ \pi_1(G)_\Gamma & = & X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma) \end{array}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la décomposition (11). □

12.2. **Paramètres et correspondance de Langlands étendus.** On suppose G quasidéployé. Soit $\varphi : W_E \to {}^LG$ un paramètre de Langlands. On note alors

$$S^e_\varphi = \{g \in \widehat{G}^e \mid g\varphi g^{-1} = \varphi\}.$$

Il y a une inclusion

$$Z(\widehat{G}^e) \underset{Z(\widehat{G})}{\times} Z(\widehat{G})^\Gamma \subset S^e_\varphi.$$

Conjecture 12.2. *Soit $[b] \in B_e(G)$ basique et $\kappa(b) \in \pi_1(G)^e_\Gamma$. Notons $\chi_b \in X^*\Big(Z(\widehat{G}^e) \underset{Z(\widehat{G})}{\times} Z(\widehat{G})^\Gamma\Big)$ le caractère associé à $\kappa(b)$. Il y a une bijection entre*

$$\Big\{\rho \in \mathrm{Irr}(S^e_\varphi) \mid \rho_{|Z(\widehat{G}^e) \underset{Z(\widehat{G})}{\times} Z(\widehat{G})^\Gamma} = \chi_b\Big\}$$

et « le paquet de représentations de $G_b(E)$ associé à φ. »

12.3. **Champ de paramètres étendus.** On fixe $\ell \neq p$.

Définition 12.3. *On note* $\mathrm{SysLoc}^e_{\widehat{G}} = \big[\,\widehat{G}^e \backslash Z^1(W_E, \widehat{G})\,\big]$ *le champ des paramètres de Langlands étendus sur Spec*$(\mathbb{Z}_\ell)$.

Ce champ n'est pas algébrique car $\widehat{G}^e$ est seulement pro-algébrique. On peut tout de même l'écrire comme limite de champs algébriques

$$\mathrm{SysLoc}^e_{\widehat{G}} = 2 - \varprojlim_{n\geq 1} \big[\,\widehat{G}_{sc} \times Z(\widehat{G})^0 \backslash Z^1(W_E, \widehat{G})\,\big]$$

où les morphismes de transition sont induits par $z \mapsto z^{\frac{n}{m}}$ sur $Z(\widehat{G})^0$. Le morphisme

$$\mathrm{SycLoc}^e_{\widehat{G}} \longrightarrow \mathrm{SysLoc}_{\widehat{G}}$$

est une gerbe de lien $\ker(\widehat{G}^e \to \widehat{G})$. On en déduit que $\mathrm{SysLoc}^e_{\widehat{G}}$ est une limite projective de champs algébriques localement intersection complète de dimension $-\dim Z(\widehat{G})$.

12.4. **Champ de fibrés étendu.** On peut écrire la gerbe Kal sur $\mathrm{Spec}(E)$ comme limite de gerbes étales

$$\mathrm{Kal} = 2 - \varprojlim_{E'/E, n\geq 1} \underbrace{\mathrm{Kal} \overset{Bu}{\times} B(\mathrm{Res}_{E'/E}\mu_n)}_{\mathrm{Kal}_{E'/E,n}}.$$

La gerbe étale $\mathrm{Kal}_{E'/E,n}$ définit une gerbe adique $\mathrm{Kal}^{ad}_{E'/E,n}$ sur $\mathrm{Spa}(E)_{\text{ét}}$.

Soit S un $\overline{\mathbb{F}}_q$-espace adique. Rappelons que l'espace adique X_S est sous-perfectoïde et possède un ≪ bon ≫ site étale. On peut donc regarder la gerbe

$$\mathfrak{X}_S^{E'/E,n} := X_S \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Kal}^{ad}_{E'/E,n} \longrightarrow X_S.$$

Définition 12.4. *Le groupoïde des G-fibrés étendus sur X_S est*

$$\mathrm{Bun}^e_G(S) = 2 - \varinjlim_{E'/E,n} \big\{G\text{-torseurs étales } \mathscr{E} \text{ sur } \mathfrak{X}_S^{E'/E,n} \text{ tels que } \lambda_{\mathscr{E}} : u \to Z_G\big\}.$$

Proposition 12.5. *Les propriétés suivantes sont satisfaites.*

(1) $\mathrm{Bun}^e_G \to Spa(\overline{\mathbb{F}}_q)$ *est un petit v-champ.*

(2) On a une identification $B_e(G) = |\mathrm{Bun}^e_G|$.

(3) L'application $\kappa : |\mathrm{Bun}^e_G| \to \pi_1(G)^e_\Gamma$ *est localement constante.*

Démonstration. Fixons $E''|E$ de degré fini et une trivialisation $\mathrm{Spec}(E'') \to \mathrm{Kal}_{E'/E,n}$. Cela définit une présentation

$$\underbrace{K^1}_{\mathrm{Spec}(E'')\times_{\mathrm{Kal}_{E'/E,n}}\mathrm{Spec}(E'')} \;\;\substack{\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow}\;\; \underbrace{K^0}_{\mathrm{Spec}(E'')} \longrightarrow \mathrm{Kal}_{E'/E,n}\ .$$

Chacun des deux morphismes $K^1 \to K^0$ est un torseur sous un groupe étale fini et est donc étale fini. On a donc $K^1 \simeq \coprod_i \mathrm{Spec}(E'''_i)$. Cela définit un morphisme représentable par un v-faisceau

$$\mathrm{Bun}^e_G \hookrightarrow \mathrm{Bun}_{G_{E''}} \underset{\coprod_i \mathrm{Bun}_{G_{E''_i}} \times \coprod_i \mathrm{Bun}_{G_{E''_i}}, \Delta}{\times} \coprod_i \mathrm{Bun}_{G_{E''_i}}.$$

On en déduit que Bun^e_G est un petit v-champ.

Le point (2) est une conséquence du théorème 11.4 (dont il est évident que la preuve fonctionne pour n'importe quel corps perfectoïde de base algébriquement clos autre que $\widehat{\overline{E}}^\flat$).

Pour le point (3) commençons par voir que l'application $\lambda : |\mathrm{Bun}^e_G| \to \mathrm{Hom}(u, Z_G)$ est localement constante. Soit donc un morphisme $\mathrm{Res}_{E'/E}\mu_n \times_{\mathrm{Spa}(E)} X_S \to Z_G \times_{\mathrm{Spa}(E)} X_E$. Il est automatiquement localement constant sur $|X_S|$. Utilisant que $|X_S| \to |S|$ est ouvert/fermé on en déduit qu'il est localement constant sur $|S|$. On peut donc supposer $\lambda : |S| \to \mathrm{Hom}(u, Z_G)$

constant de valeur $f : u \to Z_G$. Soit maintenant $[b] \in B_e(G)$ basique tel que $\lambda_b = f$. Quitte à remplacer G par G_b on peut alors supposer λ constant de valeur 0 i.e. le morphisme $S \to \mathrm{Bun}_G^e$ provient par image réciproque d'un morphisme $S \to \mathrm{Bun}_G$. Le résultat se déduit donc de la locale constance de κ sur $|\mathrm{Bun}_G|$ ([5]). $\square$

Exemple 12.6. *L'ouvert/fermé de* Bun_G^e *image réciproque par* κ *de* $\pi_1(G)_\Gamma \subset \pi_1(G)_\Gamma^e$ *est* $\mathrm{Bun}_G \subset \mathrm{Bun}_G^e$.

On a donc

$$\mathrm{Bun}_G^e = \coprod_{\lambda : u \to Z_G} \underbrace{\mathrm{Bun}_G^{e,\lambda}}_{\substack{\mathrm{Bun}_{G_b} \text{ si} \\ b \text{ basique } \lambda_b = \lambda}}$$

qui est donc, non canoniquement, une union disjointe de champs $\mathrm{Bun}_{G'}$ avec G' parcourant toutes les formes intérieures de G. On en déduit en particulier la proposition suivante.

Proposition 12.7. *Le v-champ* Bun_G^e *est un v-champ d'Artin au sens de* [5].

12.5. **Conjecture de géométrisation.** Soit G un groupe quasidéployé. Fixons un caractère régulier $\psi : U(E) \to \overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$ où U est le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel de G. On fait l'hypothèse $\ell \gg 0$ comme dans [5] puisqu'on va formuler un énoncé au niveau entier. Un tel énoncé sans cette hypothèse peut également se formuler sur $\mathbb{Q}_\ell$.

Conjecture 12.8. *(1) L'action spectrale de* [5] *s'étend en une action monoïdale de* $\mathrm{Parf}(\mathrm{SysLoc}^e_{\widehat{G}})$ *sur* $D_{lis}(\mathrm{Bun}_G^e, \mathbb{Z}_\ell)$

(2) Il y a une équivalence de catégories

$$\mathrm{Coh}_{Nilp}(\mathrm{SysLoc}^e_{\widehat{G}/\overline{\mathbb{Z}}_\ell}) \xrightarrow{\sim} D_{lis}(\mathrm{Bun}_G^e, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)^\omega$$

compatible à l'action spectrale précédente dans laquelle $\mathcal{O}$ *correspond au faisceau de Whittaker* $\mathcal{W}_\psi$.

Cette conjecture de géométrisation fournit une correspondance de Langlands locale telle que prédite par la conjecture 12.2 par spécialisation aux G_b, $[b] \in B_e(G)$ basique, et donc pour toutes les formes intérieures de G.

13. Le cas archimédien

Dans cette section on traite le cas archimédien. Nous ne reprenons pas tous les résultats obtenus précédemment dans le cas non-archimédien car nous n'en voyons pas l'utilité, typiquement l'analogue de la conjecture 12.8 n'existe pas à ce jour. Le but de cette section est seulement de se convaincre que les résultats et objets précédents ont un analogue archimédien naturel.

13.1. **Droite projective twister et gerbe de Kottwitz.** Dans cette section on considère le cas du corps de base $\mathbb{R}$. Soit

$$\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{R})$$

la « droite projective twister » c'est à dire la forme tordue non triviale de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$. On a

$$\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/z \sim -\frac{1}{\bar{z}},$$

en d'autres termes elle est définie par le 1-cocycle $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \ni c \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}})(\mathbb{C})$.

Soit

$$\mathrm{Kott} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{R})$$

la gerbe de Kottwitz de lien $\mathbb{G}_m$. Il s'agit de la gerbe rigide de classe non-triviale dans $H^2(\mathbb{R}, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Puisque l'image par $\partial : H^1(\mathbb{R}, \mathrm{PGL}_2) \to H^1(\mathbb{R}, \mathbb{G}_m)$ de la classe définissant la droite projective twister est celle de la gerbe de Kottwitz, il y a un morphisme

$$\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathrm{Kott}. \tag{13}$$

La catégorie Tannakienne associée à la gerbe de Kottwitz est la suivante. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie Tannakienne des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués $V = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i$ munis d'un isomorphisme c-linéaire $u : V \xrightarrow{\sim} V$ vérifiant $u^2 = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\mathrm{Id}$. La gerbe associée à $\mathcal{C}$ est Kott. Le morphisme $\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Kott}$ se voit alors de la façon suivante. Soit (V,u) un objet de $\mathcal{C}$. On lui associe le fibré vectoriel

$$\mathscr{E} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(i)$$

sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. On le munit de la donnée de descente

$$u \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : \overline{\mathscr{E}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}$$

où $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(i)$ est muni de sa structure GL_2-équivariante standard pour laquelle le centre $\mathbb{G}_m$ agit via $z \mapsto z^i$ et la donnée de descente standard définie par sa structure réelle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}}(i)$. Cela définit un fibré vectoriel sur $\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}$ et un $\otimes$-foncteur de $\mathcal{C}$ vers la catégorie des fibrés vectoriels sur $\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}$. On en déduit le morphisme (13).

13.2. **Ensemble de Kottwitz.** Soit G un groupe réductif sur $\mathbb{R}$. L'ensemble de Kottwitz associé est

$$B(G) = H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}, G).$$

On a la description concrète $B(G) = \{(\nu, g)\} \sim$ où

(1) $\nu : \mathbb{G}_{m/\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$,
(2) $g \in G(\mathbb{C})$ vérifie $g\overline{g} = \nu(-1)$
(3) $g^{-1}\nu g = \overline{\nu}$
(4) Pour $h \in G(\mathbb{C})$, $(\nu, g) \sim (h\nu h^{-1}, hg\overline{h}^{-1})$.

La classification des G-fibrés sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ dit que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, G_{\mathbb{C}}) &\longrightarrow \{G\text{-fibrés sur } \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\} \\ \nu &\longmapsto \nu_*\mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

induit une bijection

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, G_{\mathbb{C}})/G(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, G).$$

Proposition 13.1. *Le morphisme* $\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Kott}$ *induit une bijection*

$$B(G) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, G).$$

Démonstration. Posons $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$. Il y a une application

$$H^1_{\text{ét}}(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, G) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, G)^{\Gamma}$$

de fibre au dessus de $[\mathscr{E}] \in H^1_{\text{ét}}(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, G)$

$$H^1(\Gamma, \mathrm{Aut}(\mathscr{E})(\mathbb{C})).$$

Soit $\mathrm{Aut}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{R})$ le schéma en groupes des automorphismes de $\mathscr{E}$. La filtration de Harder-Narasimhan des fibrés vectoriels sur $\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}$ définit une filtration

$$(F_\lambda \mathrm{Aut}(\mathscr{E}))_{\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_{>0}}$$

satisfaisant pour $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_{>0}$

$$\mathrm{Gr}_\lambda \mathrm{Aut}(\mathscr{E}) \simeq H^0(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, \mathcal{F}_\lambda)$$

où $\mathcal{F}_\lambda$ est un fibré vectoriel semi-stable de pente λ sur $\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}$. Le foncteur graduation de la filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré sur $\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}$ induit un G-torseur $\mathscr{E}'$ sur la gerbe Kal puisque la catégorie Tannakienne $\mathcal{C}$ associée à Kal s'identifie à celle des fibrés semi-stables-gradués sur $\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}$. On a alors

$$\mathrm{Aut}(\mathscr{E})/F_{>0}\mathrm{Aut}(\mathscr{E}) \simeq \mathcal{M}$$

D'après Hilbert 90 on a alors

$$H^1(\Gamma, \mathrm{Aut}(\mathscr{E})(\mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} H^1(\Gamma, (\mathrm{Aut}(\mathscr{E})/F_{>0}\mathrm{Aut}(\mathscr{E}))(\mathbb{C}))$$

avec $\mathrm{Aut}(\mathscr{E})/F_{>0}\mathrm{Aut}(\mathscr{E}) = \mathrm{Aut}(\mathscr{E}')$. Le résultat s'en déduit facilement. $\square$

13.3. **La gerbe de Kaletha.** Notons

$$u = \varprojlim_{n\geq 1} \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu\!\!\!/_n/\mu\!\!\!/_n.$$

Il y a une identification

$$\widehat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} u$$

déduite d'identifications

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu\!\!\!/_n/\mu_n.$$

On préférera cependant utiliser souvent la forme $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu\!\!\!/_n/\mu\!\!\!/_n$ pour les calculs afin d'utiliser la théorie de Kummer. On dispose d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow R^1\varprojlim_{n\geq 1} H^0(\mathbb{R}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu\!\!\!/_n/\mu\!\!\!/_n) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}, u) \longrightarrow \varprojlim_{n\geq 1} H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu\!\!\!/_n/\mu\!\!\!/_n) \longrightarrow 0.$$

Puisque $H^0(\mathbb{R}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu\!\!\!/_n/\mu\!\!\!/_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est fini, le terme de gauche est nul. On a de plus un isomorphisme $H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu\!\!\!/_n/\mu\!\!\!/_n) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathbb{R}, \mu\!\!\!/_n)$ qui s'identifie à $\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ si n est pair et 0 sinon. Pour $n|m$ avec $n \geq 2$ l'application de transition entre le niveau m et n est donnée par $\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\times\frac{m}{n}} \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. Le terme de droite dans la suite exacte précédente est donc nul. On a donc

$$H^1(\mathbb{R}, u) = 0.$$

On a de même une suite exacte

$$0 \longrightarrow R^1\varprojlim_{n\geq 1} H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu\!\!\!/_n/\mu\!\!\!/_n) \longrightarrow H^2(\mathbb{R}, u) \longrightarrow \varprojlim_{n\geq 1} H^2(\mathbb{R}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu\!\!\!/_n/\mu\!\!\!/_n) \longrightarrow 0.$$

Puisque $H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu\!\!\!/_n)$ est fini le terme de droite est nul. On a de plus $\partial : H^2(\mathbb{R}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu\!\!\!/_n) \xrightarrow{\sim} H^3(\mathbb{R}, \mu\!\!\!/_n)$. Or,

$$-\cup\eta : \underbrace{H^1(\mathbb{R}, \mu\!\!\!/_n)}_{\mathbb{R}^\times/(\mathbb{R}^\times)^n} \xrightarrow{\sim} H^3(\mathbb{R}, \mu\!\!\!/_n)$$

où $\eta \in H^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ est la classe de l'extension $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$. On en déduit que $H^2(\mathbb{R}, u) = \varprojlim_{n\geq 1} \mathbb{R}^\times/(\mathbb{R}^\times)^n$ où les applications de transition sont l'identité. On a donc

$$H^2(\mathbb{R}, u) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

avec comme générateur $\partial^{-1}(\eta\cup(x_n)_{n\geq 1})$ où $x_n = 1$ si n est impair et -1 modulo $\mathbb{R}_+^\times$ si n est pair.

Définition 13.2 (Gerbe de Kaletha archimédienne)**.** *On note* Kal *la gerbe rigide non-triviale sur Spec*$(\mathbb{R})$ *de lien u.*

13.4. **Incarnation géométrique.** Cette gerbe admet l'interprétation géométrique suivante. Il y a un isomorphisme

$$N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(1) \simeq \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}}(1)$$

via le revêtement $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}$. Notons

$$T = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m.$$

Il s'identifie au tore $U(1)$ sur $\mathbb{R}$.

Lemme 13.3. *Via l'identification $T_{\mathbb{C}} = \mathbb{G}_m$ induite par*

$$(\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m)_{\mathbb{C}} = \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \xrightarrow{(z_1,z_2)\mapsto z_1z_2^{-1}} \mathbb{G}_m,$$

l'application $H^1_{\text{ét}}(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, T) \to H^1_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = [\mathcal{O}(1)]^{\mathbb{Z}}$, induit un isomorphisme

$$H^1_{\text{ét}}(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{C}}, T) \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la proposition 13.1. $\square$

Définition 13.4. *(1) On note* $\mathcal{T} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(1) \overset{\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m}{\times} T$ *comme* T*-torseur sur* $\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}$.

(2) On note $\mathfrak{X} \to \widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}$ *la gerbe de lien* u *des racines de* $\mathcal{T}$.

Utilisant le lemme 13.3 on voit que $[\mathcal{T}]$ est un générateur de $H^1_{\text{ét}}(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, T)$. En particulier, *la gerbe* $\mathfrak{X}$ *est non triviale.*

On dispose de l'énoncé suivant.

Proposition 13.5. *Il y a une équivalence de gerbes sur* $\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}$

$$\mathfrak{X} \simeq \widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}} \times_{Spec(\mathbb{R})} \mathrm{Kal}$$

bien définie à un 2*-isomorphisme près.*

Démonstration. On a une suite exacte

$$0 \to R^1 \varprojlim_{n\geq 1} H^0(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu_n/\mu_n) \to H^1_{fpqc}(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu_n/\mu_n) \to \varprojlim_{n\geq 1} H^1_{\text{ét}}(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu_n/\mu_n) \to 0.$$

Le terme de gauche est nul car $H^0(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu_n/\mu_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et est donc fini. Pour le terme de droite, il y a une suite exacte

$$H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}), \underbrace{H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu_n/\mu_n)}_{(\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu_n/\mu_n)(\mathbb{C})}) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu_n/\mu_n) \longrightarrow \underbrace{H^1_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu_n/\mu_n)}_{0}{}^{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})}.$$

On en déduit un isomorphisme

$$H^2(\mathbb{R}, \mu_n) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu_n/\mu_n)$$

qui vaut 0 si n est impair et $\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ si n est pair. Les applications de transition sont la multiplication par $\frac{m}{n}$ si $n|m$ et on en déduit que la limite projective est nulle. On a donc

$$H^1_{fpqc}(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, u) = 0.$$

Cela montre que si l'équivalence existe elle est bien définie à un 2-isomorphisme près.

Regardons maintenant la suite spectrale d'Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = H^p(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}), H^q_{fpqc}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, u)) \Longrightarrow H^{p+q}_{fpqc}(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, u).$$

On vérifie facilement que

$$H^1_{fpqc}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, u) = 0.$$

Il y a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^2(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}), H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, u)) \longrightarrow H^2_{fpqc}(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, u) \longrightarrow H^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}), H^2_{fpqc}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, u)) \longrightarrow 0.$$

On a

$$H^2(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}), H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, u)) = H^2(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}), u(\mathbb{C}))$$

qui s'identifie via une application de bord à

$$H^3(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}), \widehat{\mathbb{Z}}(1))$$

et

$$- \cup \eta^2 : \widehat{H}^{-1}(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}), \widehat{\mathbb{Z}}(1)) \xrightarrow{\sim} H^3(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}), \widehat{\mathbb{Z}}(1))$$

où $\eta \in H^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ est la classe de l'extension $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$. Ici $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$ est muni de l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ donnée par le caractère $c \mapsto -1$. On a donc

$$\widehat{H}^{-1}(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}), \widehat{\mathbb{Z}}(1)) = \widehat{\mathbb{Z}}(1)/2\widehat{\mathbb{Z}}(1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On a

$$H^2_{fpqc}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, u) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n\geq 1} H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mu_n/\mu_n) \underset{\sim}{\xrightarrow{tr}} \mathrm{Ind}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\widehat{\mathbb{Z}}/\widehat{\mathbb{Z}}.$$

On a de plus une suite exacte

$$\widehat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\widehat{\mathbb{Z}})^{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})} \longrightarrow (\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\widehat{\mathbb{Z}}/\widehat{\mathbb{Z}})^{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})} \longrightarrow \underbrace{H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}),\widehat{\mathbb{Z}})}_{\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}),\widehat{\mathbb{Z}})}.$$

On en déduit au final que $H^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}), H^2_{fpqc}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, u)) = 0$ et donc

$$H^2(\mathbb{R}, u) \xrightarrow{\sim} H^2_{fpqc}(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, u)$$

qui est identifié à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le résultat est donc une conséquence de ce que $\mathfrak{X}$ est non-triviale. $\square$

13.5. **Annulation du H^2.**

Théorème 13.6. *Pour D un groupe diagonalisable sur Spec$(\mathbb{R})$ on a $H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Kott} \times \mathrm{Kal}, D) = 0$.*

Commençons par un lemme analogue archimédien des lemmes 8.1 et 8.7.

Lemme 13.7. *(1) Soit T un tore sur $\mathbb{R}$. Pour toute classe $c \in H^2(\mathbb{R}, T)$ il existe un morphisme $\nu : \mathbb{G}_m \to T$ tel que $\nu_*[\mathrm{Kott}] = c$.*

(2) Soit A un schéma en groupes commutatif fini sur Spec$(\mathbb{R})$. Pour tout classe $c \in H^2(\mathbb{R}, A)$ il existe un morphisme $\lambda : u \to A$ tel que $\lambda_*[\mathrm{Kal}] = c$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la dualité de Tate-Nakayama. Plus précisément, on a $H^2(\mathbb{R}, T) = H^0(\Gamma, X^*(T))^D$ où l'on note $(-)^D = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$. Via la dualité de Tate-Nakayama la classe [Kott] correspond au morphisme non trivial $X^*(\mathbb{G}_m) = \mathbb{Z} \to \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. On a alors $H^0(\Gamma, X^*(T))^D = \mathrm{Hom}(X^*(\mathbb{G}_m)^D, H^0(\Gamma, X^*(T))^D) = \mathrm{Hom}_\Gamma(X^*(T), X^*(\mathbb{G}_m))/2 = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)/2$, d'où le résultat.

On a $X^*(u) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$ et via la dualité de Tate-Nakayama, $[\mathrm{Kal}] \in H^2(\mathbb{R}, u) = H^0(\Gamma, X^*(u))^D$ est donné par l'identité $[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)]^\Gamma = \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \xrightarrow{Id} \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. De plus, $H^2(\mathbb{R}, A) = H^0(\Gamma, X^*(A))^D$. Une application $u : X^*(A)^\Gamma \to \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ s'étend en un morphisme $f : X^*(A) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Puisque pour tout $x \in X^*(A)$, $f(c.x + x) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ on a $f(c.x) = -f(x)$ et donc $f \in \mathrm{Hom}_\Gamma(X^*(A), X^*(u))$. Le résultat s'en déduit. $\square$

Preuve du théorème 13.6. Comme dans la preuve du théorème 8.9 on peut supposer que D est soit un tore, soit un schéma en groupes commutatif fini.

Supposons que D soit un tore T. Suivant la preuve de lemme 8.1, le point (1) du lemme 13.7 implique que le morphisme $H^1(\mathbb{R}, T) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott}, T)$ est nul et donc le morphisme $H^1(\mathbb{R}, T) \to H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott} \times \mathrm{Kal}, T)$ l'est aussi. On peut alors suivre la preuve du théorème 8.9 en utilisant le lemme 13.9 qui suit et obtenir le résultat.

Le cas d'un schéma en groupes commutatif fini A se traite de la même façon en constatant que $H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kal}, A) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott} \times \mathrm{Kal}, A)$ puisque $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, A) = 0$. $\square$

13.6. **L'ensemble de Kottwitz étendu.**

13.6.1. *Définition.*

Définition 13.8. *L'ensemble de Kottwitz étendu $B_e(G)$ est le sous-ensemble de $H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott} \times \mathrm{Kal}, G)$ formé des classes c telles que λ_c soit central i.e. $\lambda_c : u \to Z_G$.*

On a $B_e(G) = \{(\nu, \lambda, g)\}/\sim$ où

(1) $\nu : \mathbb{G}_m \to G_{\mathbb{C}}$,
(2) $\lambda : \widehat{\mathbb{Z}} \to Z_G(\mathbb{R})$ est continu i.e. se factorise via un morphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to Z_G(\mathbb{R})$ pour un $n \geq 1$,
(3) $g \in G(\mathbb{C})$,
(4) $g^{-1}\nu g = \nu^c$,
(5) $g\overline{g} = \nu(-1)\lambda(1)$.

En plongeant le centre Z_G dans un tore et en utilisant le lemme 13.9 on obtient une suite exacte

$$1 \longrightarrow B(G) \longrightarrow B_e(G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(u, Z_G) \longrightarrow 1.$$

13.6.2. *Le cas d'un tore.* Rappelons qu'il y a un isomorphisme pour un tore T sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} X_*(T)_\Gamma &\xrightarrow{\sim} B(T) \\ [\mu] &\longmapsto [(\mu\mu^c, \mu(-1))]. \end{aligned}$$

Lemme 13.9. *Pour un tore T sur $\mathbb{R}$ l'application $B_e(T) \to Hom(u,T)$ est surjective.*

Démonstration. Soit $\lambda : u \to T$ et $c = \lambda_*[\mathrm{Kal}] \in H^2(\mathbb{R}, T)$. D'après le point (1) du lemme 13.7 il existe un morphisme $\nu : \mathbb{G}_m \to T$ tel que $\nu_*[\mathrm{Kott}] = c$. Le morphisme $(\nu^{-1}, \lambda) : \mathbb{G}_m \times u \to T$ est donc dans l'image de $H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kott} \times \mathrm{Kal}, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m \times u, T)$. □

On a $u = \widehat{\mathbb{Z}}$ et donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(u,T) &= \left[X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)\right]^\Gamma \\ &= \varinjlim_{n \geq 1} T[n](\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Proposition 13.10. *Pour un tore T sur $\mathbb{R}$ il y a une identification*

$$B_e(T) = \{\mu \in X_*(T)_{\mathbb{Q}} \mid \mu + \mu^c \in X_*(T)\}/I_\Gamma.X_*(T)$$

où la suite exacte

$$0 \longrightarrow X_*(T)_\Gamma \longrightarrow \{\mu \in X_*(T)_{\mathbb{Q}} \mid \mu + \mu^c \in X_*(T)\}/I_\Gamma.X_*(T) \longrightarrow \left[X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)\right]^\Gamma \longrightarrow 0$$

s'identifie à la suite exacte

$$0 \longrightarrow B(T) \longrightarrow B_e(T) \longrightarrow Hom(u,T) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. La preuve est identique à celle de la proposition 9.7. □

Voici une construction explicite de l'isomorphisme associé à cette proposition. Soit donc $\mu \in X_*(T)_{\mathbb{Q}}$ tel que $\mu + \mu^c \in X_*(T)$. Soit $n \geq 1$ tel que $\mu \in \frac{1}{n}X_*(T)$. Regardons le morphisme $(n.\mu)_{|\mu_n(\mathbb{C})} : \mu_n(\mathbb{C}) \to T(\mathbb{C})$ que l'on note χ. La condition $\mu + \mu^c \in X_*(T)$ implique alors que $\chi : \mu_n(\mathbb{C}) \to T(\mathbb{R})$. Pour $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$ on pose $\lambda(k) = \chi(e^{\frac{2ik\pi}{n}})$ ce qui définit un morphisme $\lambda : \widehat{\mathbb{Z}} \to T$. Notons $\xi_n = e^{\frac{i\pi}{n}}$ et $g = (n.\mu)(\xi_n) \in T(\mathbb{C})$. On vérifie alors que $g\overline{g} = (\mu\mu^c)(-1).\lambda(1)$. L'élément $[(\mu\mu^c, \lambda, g)] \in B_e(T)$ est celui associé à μ.

13.7. **Invariance par torsion intérieure.** Du théorème 13.6 on déduit la proposition suivante.

Proposition 13.11. *L'application $B_e(G) \to B_e(G_{ad}) = B(G_{ad})$ est surjective. En particulier, pour toute forme intérieur G' de G, il existe $[b] \in B_e(G)$ basique tel que $G_b \simeq G'$ ce qui induit une bijection $B_e(G) \xrightarrow{\sim} B_e(G')$.*

13.8. **Réalisation géométrique.**

13.8.1. *Description de la catégorie Tannakienne associée à* Kott × Kal. On identifie $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$ et $\mu_\infty(\mathbb{C})$ via l'application $x \mapsto e^{2i\pi x}$. On note $\mathcal{C}$ la catégorie Tannakienne des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathbb{Z} \times \mu_\infty(\mathbb{C})$-gradués

$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}, \zeta \in \mu_\infty(\mathbb{C})} V_{i,\zeta}$$

munis d'un isomorphisme c-linéaire $u : V \xrightarrow{\sim} V$

(1) envoyant $V_{i,\zeta}$ sur $V_{i,\zeta^{-1}}$,

(2) vérifiant $u^2 = \oplus_{i,\zeta}\zeta(-1)^i\mathrm{Id}$.

Il est aisé de vérifier par un calcul explicite que $\mathcal{C}$ est la catégorie Tannakienne associée à Kott × Kal.

13.8.2. *Fibrés vectoriels sur $\mathfrak{X}$.* La proposition qui suit ne pose pas de soucis.

Proposition 13.12. *La catégorie des fibrés vectoriels sur $\mathfrak{X}$ s'identifie à celle des fibrés vectoriels $\mathbb{Z} \times \mu_\infty(\mathbb{C})$-gradués sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$*

$$\mathscr{E} = \bigoplus_{i,\zeta} \mathscr{E}_{i,\zeta}$$

munis d'un isomorphisme semi-linéaire relativement à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, $u : \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}$ envoyant $\mathscr{E}_{i,\zeta}$ sur $\mathscr{E}_{i,\zeta^{-1}}$ et vérifiant $u^2 = \oplus_{i,\zeta}(-1)^i \zeta \,\mathrm{Id}$.

Corollaire 13.13. *Le foncteur*

$$\mathcal{C} = \{\textit{fibrés vectoriels sur } \mathrm{Kott} \times \mathrm{Kal}\} \longrightarrow \{\textit{fibrés vectoriels sur } \mathfrak{X}\}$$

est essentiellement surjectif.

13.8.3. *Comparaison avec la géométrie.*

Théorème 13.14. *Le morphisme $\mathfrak{X} \to \mathrm{Kott} \times \mathrm{Kal}$ induit une bijection*

$$B_e(G) \xrightarrow{\sim} \{c \in H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{X}, G) \mid \lambda_c : u \to Z_G\}.$$

Démonstration. La preuve est identique à celle de la proposition 13.1. □

Références

[1] J. Anschütz. Reductive group schemes over the Fargues-Fontaine curve. *Math. Ann.*, 374(3-4) :1219–1260, 2019.

[2] P. Deligne. Catégories tannakiennes. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 111–195. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[3] L. Fargues. G-torseurs en théorie de Hodge p-adique. *Compos. Math.*, 156(10) :2076–2110, 2020.

[4] L. Fargues and J.-M. Fontaine. Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique. *Astérisque*, (406) :xiii+382, 2018. With a preface by Pierre Colmez.

[5] L. Fargues and P. Scholze. Geometrization of the local langlands correspondence. `https://arxiv.org/abs/2102.13459`.

[6] J. Fresan and P. Jossen. Exponential motives. En préparation.

[7] J. Giraud. Effacement d'une classe de cohomologie de degré 2. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 265 :A229–A231, 1967.

[8] J. Giraud. *Cohomologie non abélienne*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[9] T. Kaletha. Supercuspidal L-packets via isocrystals. *Amer. J. Math.*, 136(1) :203–239, 2014.

[10] T. Kaletha. Rigid inner forms of real and p-adic groups. *Ann. of Math. (2)*, 184(2) :559–632, 2016.

[11] T. Kaletha. Global rigid inner forms and multiplicities of discrete automorphic representations. *Invent. Math.*, 213(1) :271–369, 2018.

[12] T. Kaletha. Rigid inner forms vs isocrystals. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 20(1) :61–101, 2018.

[13] M. Kneser. Galois-Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über p-adischen Körpern. I. *Math. Z.*, 88 :40–47, 1965.

[14] R.E. Kottwitz. Isocrystals with additional structure. *Compositio Math.*, 56(2) :201–220, 1985.

[15] R.E. Kottwitz. Isocrystals with additional structure.II. *Compositio Math.*, 109(3) :255–339, 1997.

[16] J. Lurie. *Higher topos theory*, volume 170 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[17] M. Richartz, M. Rapoport. On the classification and specialization of F-isocrystals with additional structure. *Compositio Math.*, 103(2) :153–181, 1996.

[18] J.-P. Serre. *Cohomologie galoisienne*, volume 5 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 1994.

Laurent Fargues, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu 75252 Paris
Email address: `laurent.fargues@imj-prg.fr`