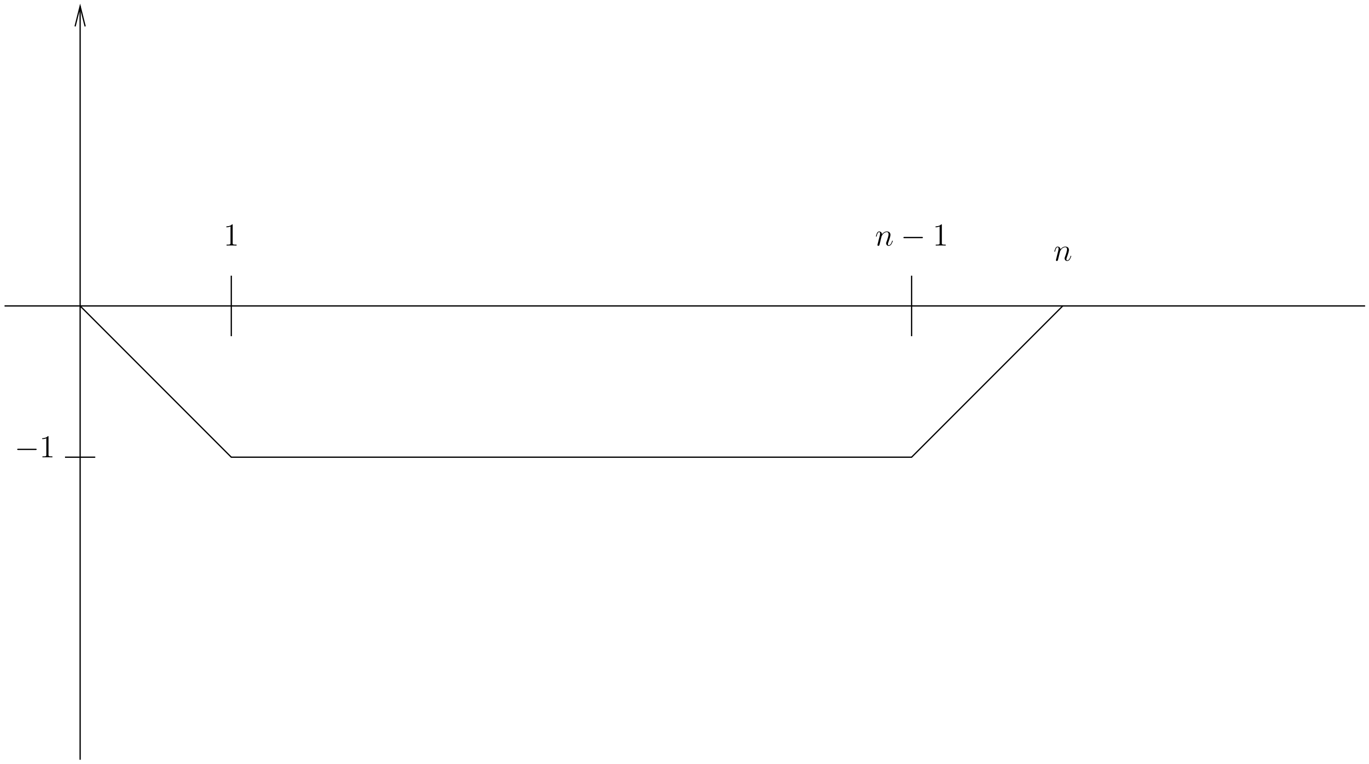

Je pose $V = \mathbb{Q}_p^n$ muni de la forme quadratique q de matrice

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

Je note $G = SO(V, q)$ qui est quasi-déployé. Soit

$$\mu(z) = \mathrm{diag}(z, 1, \dots, 1, z^{-1}).$$

La classe basique de $\mathrm{B}(G, \mu)$ est $[b] = [1]$ avec $J_1 = G$. On voit sur le dessin que l'hypothèse de ma conjecture est vérifiée.

L'isocristal associé est $\breve{\mathbb{Q}}_p^n$ avec comme Frobenius $\sigma^{\oplus n}$. Les sous-isocristaux sont en bijection avec les sous-$\mathbb{Q}_p$-e.v. de V. Soit $C|\breve{\mathbb{Q}}_p$ algébriquement clos. On regarde maintenant les droites $D \subset V_C$ qui sont des Lagrangiens i.e. qui vérifient

$$D.D = 0$$

relativement à la forme quadratique q i.e. la quadrique $\breve{\mathcal{F}}$ d'équation $\sum_{i=1}^n x_i x_{n-i+1} = 0$ dans $\mathbb{P}^n_{\breve{\mathbb{Q}}_p}$ de coordonnées homogènes $[x_1 : \dots : x_n]$. Soit $\mathbb{Q}_p^{[\frac{n}{2}]} \oplus (0) \subset V$, un sous-espace Lagrangien. Je note P le sous-groupe parabolique associé de G. Si $D \subset V_C$ il lui est associé la filtration de Hodge

$$(0) \subset \mathrm{Fil}^1 = D \subset \mathrm{Fil}^0 = D^\perp \subset \mathrm{Fil}^{-1} = V_C.$$

La condition d'admissibilité faible s'écrit alors : pour tout sous-espace totalement isotrope W de V, $D \cap W_C = (0)$. On en déduit que si $X \subset \breve{\mathcal{F}}$ désigne la variété de Schubert associée au sous-groupe parabolique P (l'intersection de la quadrique précédente avec le sous-espace linéaire $x_{[\frac{n}{2}]+1} = \dots = x_n = 0$) alors

$$\breve{\mathcal{F}}^{fa} = \breve{\mathcal{F}}^{an} \setminus G(\mathbb{Q}_p).X^{an}.$$

Passons maintenant au lieu admissible. On regarde les modifications

$$\mathscr{E}_{|X \setminus \infty} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^n_{|X \setminus \infty}$$

données par une droite Lagrangienne comme précédemment et telle que la position relative des réseaux $(\mathrm{B}_{dR}^+)^n$ et $\widehat{\mathscr{E}}_\infty$ dans B_{dR}^n soit donnée par $(t, 1, \dots, 1, t^{-1})$.

D'après la proposition A.9 de ton appendice à l'article de Scholze on a

$$\mathscr{E} \simeq \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{r}) \oplus \mathcal{O}_X^{n-2r} \oplus \mathcal{O}_X(-\tfrac{1}{r})$$

pour un entier r vérifiant $1 \leq r \leq [\frac{n}{2}]$ ou bien

$$\mathscr{E} \simeq \mathcal{O}_X^n$$

auquel cas c'est gagné. On suppose donc qu'on est dans le premier cas. La forme quadratique parfaite sur $\mathscr{E}$ est telle que pour toute pente $\lambda \in \mathbb{Q}$, pour la filtration de H.N. de $\mathscr{E}$ on ait $(\mathscr{E}^{\geq \lambda})^\perp = \mathscr{E}^{> -\lambda}$. On en déduit que via l'isomorphisme précédent

$$\mathcal{O}_X(\tfrac{1}{r})^\perp = \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{r}) \oplus \mathcal{O}_X^{n-2r}$$

et donc en particulier $\mathcal{O}_X(\frac{1}{r})$ est totalement isotrope. Via notre modification $\mathscr{E}_{|X \setminus \infty} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X \setminus \infty}^n$ il existe un unique sous-fibré localement facteur direct $\mathscr{F} \subset \mathcal{O}_X^n$ induisant une modification

$$\mathcal{O}_X(\tfrac{1}{r})_{|X \setminus \infty} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_{X \setminus \infty}.$$

En particulier $\mathscr{F}$ est totalement isotrope dans $\mathcal{O}_X^n$. De plus, une telle modification est forcément des types possibles suivants :

(1) $(-1, 0, \dots, 0)$

(2) $(0, \dots, 0, 1)$

(3) $(0, \dots, 0)$

Il suffit pour cela de regarder pour tout sous-B_{dR}-e.v. E de B_{dR}^n les positions relatives des réseaux $E \cap (\mathrm{B}_{dR}^+)^n$ et $E \cap < te_1, e_2, \dots, e_{n-1}, t^{-1}e_n >$. Puisque O_X^n est semi-stable on doit avoir $\deg(\mathscr{F}) \leq 0$. En regardant les trois cas précédents on en déduit que $\mathscr{F}$ est une modification de degré -1 de $\mathcal{O}_X(\frac{1}{r})$. Ainsi, $\mathscr{F} \simeq \mathcal{O}_X^r$ (cas Lubin-Tate ou application du théorème de classification des fibrés, c'est la même chose de toutes façons). Ainsi, $\mathscr{F} = W \otimes \mathcal{O}_X$ pour un sous-espace totalement isotrope de $\mathbb{Q}_p^n$. On en déduit que si la modification est faiblement admissible elle est admissible.

Laurent Fargues, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu 75252 Paris
E-mail address: laurent.fargues@imj-prg.fr