Twisteurs p-adiques

1

$\begin{cases} [E:\mathbb{Q}_p] < +\infty & \mathbb{F}_q = \mathcal{O}_E/\pi \\ F|\mathbb{F}_q \text{ perfectoïde} & \end{cases}$

Ex: $\mathbb{F}_q((T^{1/p^\infty}))$, $\widehat{\mathbb{F}_q((T))}$

$\rightsquigarrow$ Courbe $\to$ "surface de Riemann p-adique"
X^{ad} = E-espace adique

travail avec Fontaine

$\to$ "Courbe algébrique"
X = E-schéma de Dedekind
(pas de type fini)

$*$ $X^{ad} = Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$

Y = E-espace de Stein
$= \mathrm{Spa}(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)) \setminus V(p[\varpi_F])$, $0<|\varpi_F|<1$

φ agit de façon proprement discontinue

induit par $\varphi\left(\sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n\right) = \sum_{n\geq 0}[x_n^q]\pi^n$

Fibré en droites $\mathcal{O}(1)$ sur X^{ad}

$Y \times \mathbb{A}^1 \circlearrowleft \varphi$ agit via $\times \pi^{-1}$

$\downarrow \varphi^{\mathbb{Z}}$

$Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$

Déclare $\mathcal{O}(1)$ ample :

$$X = \mathrm{Proj}\Big(\bigoplus_{d\geq 0} \underbrace{H^0(X^{ad}, \mathcal{O}(d))}_{\mathcal{O}(Y)^{\varphi=\pi^d}}\Big) = \text{schéma de Dedekind}$$

morphisme $X^{ad} \to X$ induisant une bijection

points classiques de Tate

$$\underbrace{|X^{ad}|^{cl}}_{\substack{\parallel \\ |Y|^{cl}/\varphi^{\mathbb{Z}}}} \xrightarrow{\sim} \underbrace{|X|}_{\text{points fermés}}$$

$|Y|^{cl}$ = débasculements des extensions de degré fini de F.

Si $x^{ad} \mapsto x$
classique

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{X^{ad},x} = B^+_{dR}(k(x))$$

$k(x) = k(x^{ad}) | E$ perfectoïde $[k(x)^\flat : F] < +\infty$

* GAGA $\mathrm{Bun}_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bun}_{X^{ad}}$

* X est munie d'un $\widehat{\mathbb{Z}}$-revêtement galoisien canonique

$E_h | E$ non-ramifiée degré h $\qquad X_h = X \otimes_E E_h$

$$X_h^{ad} = Y/\varphi^{h\mathbb{Z}}$$

$$\begin{array}{c} (X_h)_{h\geq 1} \\ \downarrow \\ X_1 = X \end{array} \Bigg)\widehat{\mathbb{Z}}$$

déplie le revêtement $Y \to Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$

F alg. clos à partir de maintenant.

$\overline{\mathbb{F}}_q \subset F$ $\qquad L = W_{\mathcal{O}_E}(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}} = \widehat{E^{nr}} \circlearrowleft \sigma = \varphi$

$\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_L = \{(D, \varphi)\} =$ Isocristaux (Dieudonné-Manin)

D : L-e.v. de dim. finie

φ : auto. σ-linéaire

$$\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_L \longrightarrow \mathrm{Fib}_{X^{an}} \overset{\text{GAGA}}{\cong} \mathrm{Fib}_X$$
$$(D, \varphi) \longmapsto \mathcal{E}(D, \varphi)^{an} \longleftarrow \mathcal{E}(D, \varphi)$$

Th (F.-Fontaine) : Essentiellement surjectif

$\longrightarrow$ $\forall \mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_X$ $\qquad \mathcal{E} \simeq \bigoplus_i \underbrace{\mathcal{O}(\lambda_i)}_{\text{stable pente } \lambda_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{Q}$

Dieudonné-Manin

$\lambda = \frac{d}{h}$ $\qquad \mathcal{O}(\lambda) =$ image directe de $\mathcal{O}(d)$ via $\underbrace{X_h \longrightarrow X}_{\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}\text{- Galois}}$

* G groupe réductif $/E$ $\qquad B(G) = G(L)/\sigma\text{-conj.}$ (Kottwitz)

$b \in G(L) \rightsquigarrow$ $\quad \mathrm{Rep}\, G \longrightarrow \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_L \xrightarrow{\mathcal{E}(-)} \mathrm{Fib}_X$
$$(V, \rho) \longmapsto (V_L, \rho(b)\sigma)$$

$\mathcal{E}_b = G$-torseur

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Th}}: \ \mathcal{B}(G) \xrightarrow{\sim} H^1_{ét}(X, G) \\ \qquad [b] \longmapsto [\mathcal{E}_b]\end{array}}$$

dictionnaire : Kottwitz $\longleftrightarrow$ théorie de la réduction

$\underline{\text{Ex}}$: b basique $\iff$ $\mathcal{E}_b$ semi-stable

généralisation d'isocline.

Le Cas archimédien :

$E = \mathbb{C} \qquad X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$E = \mathbb{R} \quad X = \widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} / z \sim -\frac{1}{\bar{z}}$

(quadrique lisse sans point réel) droite projective twistée

= variété de Severi-Brauer associée à $\mathbb{H}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} & & (X_h)_{h \geq 1} \\ \downarrow u \ \Big) \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{analogue du revêtement} & \downarrow \ \Big) \widehat{\mathbb{Z}} \\ \widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}} & & X_1 = X \end{array}$$

$*\ \lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ on pose $\mathcal{O}(\lambda) = \begin{cases} \text{fibré en droites tq. } u^*\mathcal{O}(\lambda) = \mathcal{O}(2\lambda) \\ \quad \text{si } \lambda \in \mathbb{Z} \\ \underbrace{u_* \mathcal{O}(2\lambda)}_{\text{fibré de rang 2}} \text{ si } \lambda \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\mathrm{End}\left(\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = \mathbb{H}$$

Prop : $\forall \mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_{\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}}$ $\quad \mathcal{E} \simeq \bigoplus_i \mathcal{O}(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

On peut aller plus loin : $\quad G/\mathbb{R}$ réductif

Kottwitz : $\quad B(G) := H^1_{alg}(W_{\mathbb{R}}, G(\mathbb{C}))$

agit via $W_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$

Cocycles $b : W_{\mathbb{R}} \to G(\mathbb{C})$
dont la restriction à $\mathbb{C}^\times$ est algébrique

$$1 \to \mathbb{C}^\times \to W_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \to 1$$

Alors : $\left[\ \text{Prop : } B(G) \xrightarrow{\sim} H^1(\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}, G)\ \right]$

Modifications : $\quad \infty \in \widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}} \qquad u^{-1}(\infty) = \{0, \infty\}$

$t = \frac{1}{z}$ paramètre local en ∞

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} & \circlearrowleft & \mathbb{C}^\times \quad \text{agit via } \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{C}^\times}}{\lambda}\cdot t = \lambda t \\ \downarrow u & & \cup \\ \widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}} & \circlearrowleft & U(1) \end{array}$$

Gr = Grassmannienne affine de $G_{\mathbb{C}}$ en ∞

$\mathrm{Gr}(\mathbb{C}) = G(\mathbb{C}((t))) / G(\mathbb{C}[[t]])$ $\quad$ $\mathrm{Gr} \circlearrowleft \mathbb{C}^\times$ via $t \mapsto \lambda t$

$\forall \mu \in X_*(T)^+$ $\quad$ Gr_μ = cellule de Schubert

$$\begin{array}{c} \mathrm{Gr}_\mu \\ \downarrow \Big) \; \mathbb{C}^\times\text{-invariant - fibré affine} \\ G/P_\mu \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Gr}_\mu^{\mathbb{C}^\times} \xrightarrow{\sim} G/P_\mu$ avec $\mathrm{Gr}_\mu = \mathrm{Gr}_\mu^{\mathbb{C}^\times}$ si μ minuscule

Pour GL_n : $V = \mathbb{C}$-e.v. Filtrations de $V \xrightarrow{\sim}$ réseaux $\mathbb{C}^\times$-invariants dans $V((t))$

$$\mathrm{Fil}^\bullet V \longmapsto \sum_{b \in \mathbb{Z}} t^{-b} \mathrm{Fil}^b V[[t]]$$

Donc : $\mu \in X_*(T)^+$

Modifications $U(1)$-équivariantes de $\mathcal{E}_1$ de type μ

$\nwarrow$ G-torseur trivial sur $\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}$.

$$\wr\!\wr$$

$(G/P_\mu)(\mathbb{C})$

De plus, pour $V \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}$, $\mathrm{Fil}^\bullet V_{\mathbb{C}}$ = filtration de $V_{\mathbb{C}}$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{E}(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_{\mathbb{C}})$ modification $U(1)$-équivariante de $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}}$

Alors $\mathcal{E}(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_{\mathbb{C}})$ semi-stable de pente $\frac{w}{2}$

$\Updownarrow$

$(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_{\mathbb{C}})$ = structure de Hodge pure de poids ~~w~~ w

Donc : $\mathcal{X}/\mathbb{C}$ propre et lisse, $d \in \mathbb{N}$

$\exists$ modification $U(1)$-équivariante

$H^d_{\mathrm{Betti}}(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}}$ - - - - - -> fibré vectoriel semi-stable de pente $\frac{d}{2}$ relié à la cohom. de de Rham $\simeq \mathcal{O}(\frac{d}{2})^m$, n $\in$

filtration de Hodge

* Analogue p-adique : $E = \mathbb{Q}_p$ - K valuation discrète

$K | K_0 | \mathbb{Q}_p$

$\underbrace{K_0 | \mathbb{Q}_p}_{\text{max. non-ramifiée}}$

$C = \widehat{\overline{K}}$, $F = C^\flat$, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$

$X_F \ni \infty$ point fermé de corps résiduel C.

$\circlearrowright$

$G_K = U(1)$ stabilise ∞

$\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty} = B^+_{dR} \circlearrowleft G_K$ via $\sigma(t) = \chi_{cycl}(\sigma) t$

$\widehat{\text{M}}$ principe $(D,\varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{K_0}$

Filtrations de $D_K \xrightarrow{\sim} \{$réseaux G_K-invariants dans $D \otimes_{K_0} B_{dR}\}$

$$\mathrm{Fil}^\bullet D_K \longmapsto \sum_{b \in \mathbb{Z}} \mathrm{Fil}^b D_K \otimes_K t^{-b} B_{dR}^+$$

via $B_{dR}^+ \xrightarrow{\theta} \mathbb{C} \supset K$

$\varphi\text{-ModFil}_{K/K_0} \xrightarrow{\sim}$ Modifications G_K-équivariantes de $\mathcal{E}(D,\varphi)$

$(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) \longmapsto \mathcal{E}(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K)$

φ-modules filtrés de Fontaine

<u>Ex.</u>: (Reformulation du théo. de comparaison de Tsuji)

$\mathcal{X}/O_K$ propre et lisse, $d \in \mathbb{N}$

$(D,\varphi) = \left(H^d_{cris}(\mathcal{X}_{k_K}/W(k_K))[\tfrac{1}{p}], \text{Frob. cristallin}\right)$

$\mathrm{Fil}^\bullet D_K =$ filtration de Hodge de $H^1_{cris} \otimes_{O_{K_0}} K = H^1_{dR}(\mathcal{X}_K/K)$

<u>Alors</u>: $\exists$ modification G_K-équivariante

$$H^d_{et}(\mathcal{X}_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} O_X = \mathcal{E}(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) \dashrightarrow \mathcal{E}(D,\varphi)$$

Que faire avec ça ?

* Comparer la construction de Deligne du Twistor associé à $X/\mathbb{C}$ via les λ-Connexions et celle de B.M.S.

* $X/\mathbb{C}$ propre et lisse

$$\begin{array}{c} X \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \\ \downarrow f \\ \mathbb{A}^1 \end{array}$$

λ = coordonnée sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$

$$C^{\cdot} = \left(\Omega^{\cdot}_{X \times \mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1}, \lambda d\right)$$

$$C^{\cdot}|_{f^{-1}(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})} \simeq \left(\Omega^{\cdot}_{X \times \mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1}, d\right)$$

$$\simeq \Omega^{\cdot}_{X/\mathbb{C}} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}$$

$\underbrace{R^d f_* C^{\cdot}}_{\text{fibré vectoriel}}$ muni d'une donnée de recollement via $\lambda \mapsto -\frac{1}{\lambda}$

$\rightsquigarrow$ Modification de fibrés sur $\widetilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}$ = Construction géométrique via les λ-Connexions de la modification de twisteurs associée à $X/\mathbb{C}$.

* Th : $\varphi\text{-Mod}_{A_{inf}} \simeq \{$ Modifications $\mathcal{E}_1 \dashrightarrow \mathcal{E}_2$ à l'∞ + réseau $\Lambda \subset H^0(X, \mathcal{E}_1)\}$

s.s. stable pente 0

But de la coho. de B.M.S.

$X/\mathcal{O}_C$ propre et lisse $\quad L\eta_\mu (R\nu_* A_{inf, X_\eta})$

analogue de l'opération de torsion consistant à remplacer d par λd.

Transfert d'idées du p-adique vers l'archimédien

Toutes les constructions liées aux espaces de Rapoport-Zink basiques et plus généralement les espaces de Shtuka locaux $\mathrm{Sht}(G, b, \mu)$

basique

pas forcément minuscule

s'adaptent dans le cas archimédien.

Ex :

$G = GL_{2/\mathbb{R}}$. $\mu(z) = (z, 1)$

$\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = G_\mu$

$\parallel$

lieu où la modification de $\mathcal{O}^2_{\tilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}}$ est semi-stable de pente $\frac{1}{2}$

i.e. $\simeq \mathcal{O}(\frac{1}{2})$

$\parallel$

$\left(\begin{array}{l}\text{Cohom. de Betti d'une courbe} \\ \text{elliptique}\end{array}\right) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}^2_{\tilde{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}}$

$\mathrm{End}\left(\mathcal{O}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \mathbb{H}$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T} \circlearrowleft GL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^\times \arrow[dl, "\pi_{HT}"', "\mathbb{H}^\times\text{-torseur}"] \arrow[dr, bend left] & \\
\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} & & \mathcal{T}/SO_2(\mathbb{R}) = \text{Lubin-Tate} \arrow[d, "\text{périodes de Gross-Hopkins}"] \\
 & & \mathcal{T}/GL_2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \circlearrowleft \mathbb{H}^\times
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{T}$ = espace de R.Z. en niveau ∞

= trivialisations de ce fibré $\simeq \mathcal{O}(\frac{1}{2})$ fibre à fibre.

$\parallel$ Espace de Drinfeld

$\circlearrowleft GL_2(\mathbb{R})$

$\to$ marche pour n'importe quelle donnée de Shimura.

$\to$ marche même si μ non minuscule

$\downarrow$

domaines de Griffiths-Schmidt apparaissent via $\mathrm{Sht}(G, b, \mu)^{U(1)}$

$\uparrow$

modifications $U(1)$-équivariantes

Le $\mathcal{M}$ n'est pas le bon objet lorsque μ n'est pas minuscule

On devrait regarder

$$\begin{array}{c} G_\mu \\ \downarrow \\ G/P_\mu = G_\mu^{U(1)} \end{array}$$) pas bon objet.

→ domaines de Griffiths-Schmidt apparaissant dans $G_{\mathbb{C}}/P$ avec $P \neq P_\mu$ avec μ minuscule ne sont pas les bons objets

Transfert d'idées de l'archimédien vers le p-adique

Quel est l'analogue de $\mathbb{H}$ en p-adique ?

→ $\mathcal{D}$ = algèbre de division de Colmez $/E$ de dimension infinie

[Peut-on retrouver X à partir de $\mathcal{D}$?
Est-ce une variété de Severi-Brauer associée à $\mathcal{D}$?]

$\mathbb{H} \leftrightarrow$ structures hyperkählériennes

$\mathcal{D} \leftrightarrow$?

$(\mathcal{A}, \deg, rg)$ = Catégorie abélienne de Harder-Narasimhan

$$\begin{cases} \deg : \mathcal{A} \to \mathbb{Z} \\ rg : \mathcal{A} \to \mathbb{N} \end{cases} \qquad \mu = \frac{\deg}{rg}$$

Ex. Coh_X, X courbe

$\mathcal{A}^{\geq 0}$ = objets à pentes ≥ 0
$\mathcal{A}^{<0}$ = " " <0

} Sous-catégories exactes

$(\mathcal{A}^{\geq 0}, \mathcal{A}^{<0})$ = Structure de torsion sur $\mathcal{A}$

$\rightsquigarrow$ t-structure sur $\mathbb{D}^b(\mathcal{A})$ (Cf. travaux de Bridgeland sur les conditions de semi-stabilité dans les cat. dérivées)

Lemme $\underbrace{\widehat{\mathcal{A}}}_{\text{Cat. abélienne}} = \left\{ \mathcal{E} \in \mathbb{D}^{[-1,0]}(\mathcal{A}) \,/\, H^{-1}(\mathcal{E}) \in \mathcal{A}^{<0},\ H^0(\mathcal{E}) \in \mathcal{A}^{\geq 0} \right\}$

$$\deg, rg : \mathbb{D}^b(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \deg(C^\cdot) = \sum_i (-1)^i \deg(H^i(C^\cdot))$$

Posons $\widehat{\deg} = -\mathrm{rg}_{|\widehat{\mathcal{A}}} : \widehat{\mathcal{A}} \to \mathbb{Z}$ $\qquad (\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\deg}, \widehat{\mathrm{rg}}) =$ Cat. de H.N.

$\widehat{\mathrm{rg}} = \deg_{|\widehat{\mathcal{A}}} : \widehat{\mathcal{A}} \to \mathbb{N}$

Prop: Si $\forall A \in \mathcal{A}^{<0}$ $\forall B \in \mathcal{A}^{\geq 0}$ $\mathrm{Ext}^1(A,B) = 0$ $\Big]$ s'applique à nos courbes

alors $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \widehat{\widehat{\mathcal{A}}}$ $\quad \widehat{\widehat{\deg}} = \deg,\ \widehat{\widehat{\mathrm{rg}}} = \mathrm{rg}$

Ex: $X =$ Courbe elliptique $-$ $\mathcal{A} = \mathrm{Coh}_X$

alors $\widehat{\mathcal{A}} = \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{Coh}_X[1])$ via Fourier-Mukai

$$\mathcal{F} : \mathbb{D}^b(\mathrm{Coh}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^b(\mathrm{Coh}_X) \qquad \widehat{X} = X$$

* Si X est une courbe $/k$

$$\mathrm{Coh}_X / \mathrm{Coh}_X^{\mathrm{rg}=0} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Vect}_{k(X)}$$

$$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}_\eta$$

Qu'est-ce que $\widehat{\mathrm{Coh}_X} / \widehat{\mathrm{Coh}_X}^{\widehat{\mathrm{rg}}=0}$? $\longleftarrow$ Sous Cat. de Serre

$\longrightarrow$ Corps des fonctions de $\widehat{X}$ même si $\widehat{X}$

n'existe pas.

Fait : $X = \widehat{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}$ (ou n'importe quelle variété de Severi–Brauer associée à une alg. de Quaternions/Corps)

$$\widehat{Coh}_X / \widehat{Coh}_X^{\widehat{rk}=0} = \text{Cat. ab. semi-simple ayant un unique objet semi-simple } \mathcal{O}(\tfrac{1}{2})$$

$$\mathrm{End}_{\widehat{Coh}/\widehat{Coh}^{\widehat{rk}=0}}\left(\mathcal{O}(\tfrac{1}{2})\right) = \mathbb{H}$$

Corps des fonctions de $\widehat{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{R}}$ qui n'existe pas

$$\Rightarrow \widehat{Coh}_X / \widehat{Coh}_X^{\widehat{rk}=0} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Vect}_{\mathbb{H}}$$

✗ X/E $[E:\mathbb{Q}_p] < +\infty$ la Courbe p-adique

$$\widehat{Coh}_X = \mathcal{BC} = \text{espaces de Banach-Colmez de dim. finie}$$

$$\underbrace{\widehat{Coh}_X / \widehat{Coh}_X^{\widehat{rk}=0}}_{\mathrm{Vect}_E} = \text{ab. s.s. avec un unique objet simple.}$$