Le cas de $U(3)$ et des surfaces modulaires de Picard

Laurent Fargues

1 Groupes unitaires : Généralités

Par définition les groupes unitaires en trois variables sont les formes extérieures de GL_3. Le diagramme de Dynkin de GL_3 est donné ci dessous. On constate que le seul automorphisme extérieur de GL_3 est $g \mapsto {}^t g^{-1}$ qui est d'ordre 2.

$\Rightarrow$ Après extension quadratique, ce sont des formes intérieures de GL_3.

1.1 Cas local : Cas d'un corps p-adique

Considérons le cas des extensions de degré fini de $\mathbb{Q}_p$. Soit

$$E|F \text{ quadratique, } * = \text{involution de } E|F \text{ (encore notée } ^{-} \text{ ou } c)$$

Soit

$$J = \text{une matrice hermitienne } 3 \times 3 \text{ à coefficients dans } E$$

$${}^t\overline{J} = J \Rightarrow \langle X, Y \rangle = {}^t\bar{X} JY\ ,\ X, Y \in E^3 \text{ est un produit hermitien}$$

Définition. Posons

$$\mathrm{disc}(J) = \det(J) \in F^\times / N_{E/F}\, E^\times\ .$$

Définition. Soit le groupe algébrique

$$G = \{ g \in \mathrm{GL}_{3/E} \mid {}^t\bar{g} J g = J \}$$

i.e. si $g^* = J^{-1}\, {}^t\bar{g}\, J$ (adjonction par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

$$G = \{ g \in \mathrm{GL}_{3/E} \mid g^* g = \mathrm{Id} \}$$

Il y a un isomorphisme de E-algèbres munies d'une involution

$$(M_3(E), *) \underset{F}{\otimes} E \xrightarrow{\sim} (M_3(E) \times M_3(E), *') \quad \text{où} \quad (A, B)^{*'} = (\bar{B}^*, \bar{A}^*)$$

donné par

$$A \otimes \lambda \mapsto (\lambda A,\, \lambda \bar{A})$$

duquel on déduit

$$\boxed{G_{/E} \simeq \mathrm{GL}_{3/E}} \quad \text{car} \qquad \begin{array}{c} (A,\, B)(\bar{B}^*,\, \bar{A}^*) = I_3 \\ \Updownarrow \\ B = \bar{A}^{-*} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad G_{/E} = \{(A,\, \bar{A}^{-*})/A \in \mathrm{GL}_{3/E}\} \simeq \mathrm{GL}_{3/E}\,.$$

Donc, G est une forme extérieure de $\mathrm{GL}_{3/F}$, un cocyle définissant cette forme évalué sur l'élément non trivial du groupe de Galois de $E|F$ étant $g \mapsto J^{-1}\, {}^t g^{-1} J$.

De plus, G_{der} est simplement connexe et

$$G_{\mathrm{der}} = \{g \in G \mid \det g = 1\}\,,\ G_{\mathrm{der}/E} \simeq \mathrm{SL}_{3/E}\,.$$

Et donc le cocentre vérifie

$$D := G/G_{\mathrm{der}} \overset{\det}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} U(1)$$

où $U(1) = \{x \in E^\times / N_{E/F}(x) = 1\}$ (comme tore sur F).

Remarque. Tous les groupes G ci dessus sont formes intérieures l'un de l'autre.

Forme quasi-déployée dans la famille de formes intérieures G construites ci-dessus. Elle correspond à la matrice hermitienne $J = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$. Un tore maximal du sous-groupe de Borel est :

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x & & \\ & y & \\ & & x^{-*} \end{pmatrix} \Big/ x \in E^\times,\, yy^* = 1 \right\} \simeq E^\times \times U(1)$$

De plus, $F^\times \hookrightarrow E^\times \hookrightarrow E^\times \times U(1) = T$

est un sous-tore déployé maximal $\Rightarrow$ $\boxed{G \text{ est de rang 1 sur F}}$

Borel $= G \cap$ Borel standard de GL_3

cf. p. 9 Chap. 1-10 de [12] pour la description du radical unipotent du Borel.

Description du L-groupe.

$${}^L G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \rtimes \Gamma_{E/F} \quad \text{où} \quad \Gamma_{E/F} = \{1,\, c\}$$

et

$$\forall A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \;\; c\, A\, c^{-1} = \Phi_3\, {}^t A^{-1}\, \Phi_3^{-1}$$

où

$$\Phi_3 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

→ **Rigidification et Φ_3.** A priori le L-groupe est un groupe à automorphismes intérieurs près. Le fait d'imposer que l'épinglage standard s'envoie sur lui même rigidifie la situation. Ici

$$d({}^t g^{-1})(X) = -\,{}^t X \quad \text{si} \quad X \in g\ell_3 \quad \text{et} \quad -\,{}^t E_{i,i+1} = -E_{i+1,i}$$

or

$$\Phi_3(-E_{i+1,i})\,\Phi_3^{-1} = E_{i,i+1}$$

ce qui explique la présence de la matrice Φ_3.

On constate que

$$Z(\hat{G}) = \hat{D} \simeq \mathbb{C}^\times \quad \text{et} \quad Z(\hat{G})^{\Gamma_F} \simeq \{\pm 1\}\,.$$

1.1.1 Classification des formes hermitiennes

Il y a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(F,G) & \xrightarrow[\sim]{\text{Kottwitz}} & A(G) = \pi_0(Z(\hat{G})^\Gamma)^D = \{\pm 1\} \\ & \text{det} \searrow^{\simeq} & \wr\,|\ \text{Tate-Nakayama} \\ & & H^1(F,\,D) \simeq F^\times / N_{E/F}(E^\times) \\ & & \uparrow \\ & & D \simeq U(1) \text{ et } 1 \to U(1) \to E^\times \xrightarrow{N_{E/F}} F^\times \to 1 \\ & & + \text{ suite exacte longue associée.} \end{array}$$

Les formes hermitiennes associées à $E|F$ sont classifiées par des G-torseurs (elles deviennent toutes isomorphes après l'extension étale $\mathrm{Spec}(E) \to \mathrm{Spec}(F)$ et le groupe des automorphismes d'une forme est un groupe G du type précédent) on en déduit qu'à isomorphisme près il y a

$$2 \text{ formes hermitiennes} \begin{array}{l} \nearrow \ \mathrm{disc}(J) \in N_{E/F}\,E^\times \text{ forme quasi-déployée} \\ \\ \searrow \ \mathrm{disc}(J) \notin N_{E/F}\,E^\times \end{array}$$

1.1.2 Classification des formes intérieures

Il y a une suite d'isomorphismes

$$H^1(F, G_{\mathrm{ad}}) \simeq \pi_0(Z(\hat{G}_{\mathrm{ad}})^\Gamma)^D \simeq \pi_0(Z((\hat{G})_{\mathrm{sc}})^\Gamma)^D = (\mu_3 \cap \mu_2)^D = \{1\}$$

car $(\hat{G})_{\mathrm{sc}} = \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$.

Corollaire. Le F-groupe algébrique $U(3)$ quasi-déployé est l'unique groupe unitaire en trois variables (pour une extension quadratique E/F fixée bien sûr).

Remarque. $\forall\, \lambda \in F^\times$ $\forall\, J$ hermitienne $U(J) = U(\lambda J)$ et

$$\mathrm{disc}(\lambda J) = \lambda^3\, \mathrm{disc}(J) \equiv \lambda\, \mathrm{disc}(J)\, [N_{E/F}\, E^\times]$$

$\Rightarrow$ on pouvait se rendre compte avant que les deux formes hermitiennes donnent des groupes unitaires isomorphes.

Remarque. Il en est de même des résultats précédents pour $U(n)$ lorsque n est impair. Par contre si n est pair il y a 2 formes intérieures et 2 formes hermitiennes distinctes.

Exemple : Le cas de $U(2)$. Dynkin $= 0 \Rightarrow {}^t g^{-1}$ est intérieur sur SL_2

$$\Rightarrow SU(2)_{\text{quasi-déployé}} = \mathrm{SL}_{2/F}$$

et

$$SU(2)_{\text{non quasi-déployé}} = (D^\times_{1/2})^1 \text{ où } D_{1/2} \text{ alg. de quaternions}/F.$$

De plus il y a une suite exacte :

$$1 \longrightarrow SU(2) \longrightarrow U(2) \xrightarrow{\det} U(1) \longrightarrow 1\,.$$

1.2 Cas d'un corps local archimédien : $\mathbb{R}$

$$U(2,1) \leftrightarrow \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} = \text{forme quasi-déployée}$$

$Z(U(2,1)) \simeq U(1)$ et la suite exacte $1 \to U(1) \to U(2,1) \to U(2,1)_{\mathrm{ad}} \to 1$ donne

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, U(1)) & \to & H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, U(2,1)) & \to & H^1(\mathbb{C}/\mathbb{R}, U(2,1)_{\mathrm{ad}}) \\ \wr\| & & \| & & \| \\ \mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+ = \mathbb{Z}/2Z & \to & \{(p,q) \mid p+q=3\} & \to & \{(p,q)\}/(p,q) \sim (q,p) \end{array}$$

où l'ensemble pointé du milieu classifie les formes hermitiennes (qui, prenant comme point base $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$, sont en bijection (à isomorphisme près) avec les classes de

$U(2,1)$-torseurs, à $J \in M_3(\mathbb{C})$ vérifiant ${}^t\bar{J} = J$ on associe la classe du $U(2,1)$-torseur étale

$$R \mapsto \mathrm{Isom}\left(\left(\left(\mathbb{C}^3 \underset{\mathbb{R}}{\otimes} R,\ {}^t\bar{X}\begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}Y\right),\ (\mathbb{C}^3 \underset{\mathbb{R}}{\otimes} R,\ {}^t\bar{X}JY)\right)\right.$$

trivial sur $\mathbb{C}$) et l'ensemble pointé de droite classifie les formes intérieures de $U(2,1)$.

Corollaire. Il y a 2 formes :

* $U(2,1)$ la forme quasi-déployée
* $U(3)$ la forme compacte.

Remarque. Idem cas p-adique pour $U(2)$:

* $SU(1,1) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$
* $SU(2) \simeq (\mathbb{H}^\times)^1 \simeq \mathrm{Sp}(1)$ (isomorphismes chers aux physiciens).

1.3 Corps globaux

E est un corps C.M. et F son sous-corps totalement réel maximal

$$\begin{array}{l} E \\ \mid\ )\{1,\, c\} \qquad \text{où } c = \text{conjugaison complexe.} \\ F \end{array}$$

Soit $(D, *)$ où D est soit une algèbre à division sur E, soit $M_3(E)$ et $*$ une involution de seconde espèce (i.e. $*_{/E} = c$).

Définition. $G = \{g \in D^\times / gg^* = 1\}$ un groupe sur F.

Comme dans le cas local, $G_{/E} \simeq D^\times$. De plus, $G_{\mathrm{der}} = \{g \in G/N(g) = 1\}$ et $G_{\mathrm{der}/E} \simeq (D^\times)^1$.

Décomposition locale. Soit v une place de F, $v \nmid \infty$:

* Si v est décomposée dans E alors
$$G_v := G_{/F_v} \simeq D_v^\times \quad (\text{où } D_v = D \underset{F}{\otimes} F_v).$$
* Si v est inerte alors $G_v = U(3)_{/F_v}$ l'unique groupe unitaire associé à l'extension quadratique E_v/F_v.

Si $v|\infty$, $G_{/\mathbb{R}} \in \{U(2,1)_{/\mathbb{R}}, U(3)_{/\mathbb{R}}\}$.

Réciproquement. Il y a une suite exacte (cf. [9] prop. 1.6.12 ou [**?**] th. 5.15) pour tout groupe réductif H sur F :

$$1 \to \ker^1(F,\, H) \to H^1(F,\, H) \to \bigoplus_v H^1(F_v,\, H) \to H^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F,\, H)$$

où ab signifie lorsque H_{der} est simplement convexe que l'on remplace H par son cocentre, et où (dualité de Tate-Nakayama)

$$H^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F,\, H) = A(H) \simeq \pi_0(Z(\hat{H})^\Gamma)^D \,.$$

Appliquons cela avec $H = G_{\text{ad}}$. Utilisant le principe de Hasse pour les groupes réductifs adjoints (cf. [14]) on en déduit une suite exacte

$$1 \to H^1(F,\, G_{\text{ad}}) \to \bigoplus_v H^1(F_v,\, G_{\text{ad}}) \to A(G_{\text{ad}}) = (\mu_3 \cap \mu_2)^D = \{1\} \,.$$

Corollaire : Se donner un tel groupe unitaire G global $\Leftrightarrow$ se donner une famille $(G_v)_{v\in|F|}$ de groupes unitaires associés aux extensions E_v/F_v si v inerte et de groupes de la forme $D_v^\times$ ou $\mathrm{GL}_3(F_v)$ si v est décomposée tels que pour presque toute v décomposée

$$G_v = \mathrm{GL}_3(F_v) \,.$$

En d'autres termes : il n'y a pas d'obstruction à construire une forme intérieure globale à partir de formes locales.

Les groupes unitaires globaux se répartissent essentiellement en 3 familles qui, comme on le verra, se distinguent du point de vue spectral :

* $G = U(3)$ quasi-déployé i.e. $\forall\, v\ G_v = U(3)_v$ quasi-déployé

$$G = U\left(E^3, \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}\right)$$

i.e. $D = M_3(E)$ et $*$ = adjonction par rapport à la forme hermitienne associée à $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$.

* $\exists\, v \nmid \infty$ décomposée telle que D_v soit une algèbre à division. Le groupe G est alors anisotrope et D est une algèbre à division.

* $\forall\, v \nmid \infty$ décomposée D_v est une algèbre de matrices (i.e. $G_v \simeq \mathrm{GL}_3(F_v)$) et $\exists\, v \mid \infty$ $G_v = U(3)(\mathbb{R})$ compact $\Rightarrow G$ est anisotrope et $D \simeq M_3(E)$.

Remarque. Pour $U(n)$ avec n impair la classification des formes globales à partir des formes locales est identique (pas d'obstruction). Lorsque n est pair il y a une obstruction qui est un signe $\in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ somme d'invariants locaux.

Principe de Hasse. Le groupe G_{der} étant simplement convexe

$$\ker^1(F,\, G) \xrightarrow[\sim]{\det} \ker^1(F,\, U(1)) = \text{ trivial car } E/F \text{ est quadratique}$$

($\ker^1(F,\, U(1))$ = obstruction à ce qu'un élément de $F^\times$ qui est partout localement une norme soit une norme). Donc, G vérifie le principe de Hasse.

1.4 Groupes Endoscopiques

1.4.1 Donnée endoscopique

Rappel. (cf [5], section 7). On veut $(s,\, \rho)$ où $s \in \hat{G}_{ss}$ et

$$\rho : \Gamma_F \to \mathrm{Out}(\hat{H})$$

avec $\hat{H} = \hat{G}_s^0$ tels que

$$\forall\, \sigma \qquad \exists\, g_\sigma \rtimes \sigma \in \mathrm{Norm}_{{}^LG}(\hat{G}_s) \text{ tel que } \boxed{\rho(\sigma) = \mathrm{int}_{g_\sigma \rtimes \sigma|\hat{H}}} \,.$$

De plus, $s \in \pi_0(Z(\hat{H})^\Gamma)/\pi_0(Z(\hat{G})^\Gamma)$ (on suppose le principe de Hasse vérifié, cependant en général s vit dans un groupe $\mathcal{R}(H/F)$ qui s'inscrit dans la suite exacte $1 \to \pi_0(Z(\hat{H})^\Gamma)/\Pi_0(Z(\hat{G})^\Gamma) \to \mathcal{R}(H/F) \to \ker^1(F, G))$) et l'on demande également que

$$Z(\hat{H})^\Gamma \subset Z(\hat{G}) \qquad \text{(ellipticité)}.$$

$*$ A conjugaison près il y a 2 cas à distinguer :

$$* \ \ \hat{H} = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) & 0 \\ 0 & \mathbb{C}^\times \end{pmatrix} \text{ i.e. } s = \begin{pmatrix} z_1 & & \\ & z_1 & \\ & & z_2 \end{pmatrix} \text{ avec } z_1 \neq z_2$$

$$* \ \ \hat{H} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}^\times & & \\ & \mathbb{C}^\times & \\ & & \mathbb{C}^\times \end{pmatrix} \text{ i.e. } s = \begin{pmatrix} z_1 & & \\ & z_2 & \\ & & z_3 \end{pmatrix} \text{ avec } i \neq j \Rightarrow z_i \neq z_j.$$

Je ne traite que le premier cas. Le second est impossible (exercice facile en utilisant les même types de raisonnement que ceux ci-dessous, cf. [12] section 4-6).

Supposons donc que $\hat{H} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ plongé diagonalement dans $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) = \hat{G}$.

$*$ Si $\sigma \in \Gamma_E \quad \exists\, g_\sigma \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \quad \forall\, (A,\, b) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$

$$\rho(\sigma)(A,\, b) = g_\sigma \begin{pmatrix} A & \\ & b \end{pmatrix} g_\sigma^{-1}$$

$\Rightarrow g_\sigma \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$

$\Rightarrow \rho(\sigma) \in \mathrm{Aut}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times)$ est intérieur

$\Rightarrow \rho(\sigma) = 1$ comme élément de $\mathrm{Out}(\hat{H})$.

$*$ Si $\sigma = c \in \Gamma_F \backslash \Gamma_E$

$$\exists\, g_c \quad \forall\,(A,\, b) \in \hat{H} \;\; \rho(c) \begin{pmatrix} A & \\ & b \end{pmatrix} = g_c\, \Phi_3 \begin{pmatrix} {}^tA^{-1} & \\ & b^{-1} \end{pmatrix} \Phi_3^{-1}\, g_c^{-1}$$

$\Rightarrow g_c\, \Phi_3 \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$

$\Rightarrow g_c\, \Phi_3 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$

$\Rightarrow$ on peut supposer (à isomorphisme de donnée endoscopique près) que $g_c\, \Phi_3$ est ce que l'on veut dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$.

Si l'on veut que $\rho(c)$ (épinglage standard de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$) soit l'épinglage standard il faut que

$$g_c\, \Phi_3 = \begin{pmatrix} \Phi_2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$$

et alors

$$\rho(c) \begin{pmatrix} A & \\ & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_2\, {}^tA^{-1}\, \Phi_2^{-1} & \\ & b^{-1} \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$Z(\hat{H}) = \begin{pmatrix} \mathbb{C}^\times I_2 & \\ & \mathbb{C}^\times \end{pmatrix} \Rightarrow Z(\hat{H})^\Gamma = \begin{pmatrix} \pm I_2 & \\ & \pm 1 \end{pmatrix} \subset Z(\hat{G}).$$

La condition d'ellipticité est donc bien remplie. De plus, la seule possibilité pour s est

$$s = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \bmod \pm I_3$$

et

$$\mathcal{R}(H/F) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

1.4.2 Groupes Endoscopiques

Il s'agit d'un triplet $(H,\, s,\, \eta)$. La section précédente nous donne déjà $H = U(2) \times U(1)$, s et $\eta_{/\hat{H}} : \hat{H} \hookrightarrow \hat{G}$. On sait (il s'agit d'un théorème de Langlands général, cf. [11]) qu'il existe un prolongement du plongement $\eta_{/\hat{H}}$ en

$$\eta : \hat{H} \rtimes W_F \to \hat{G} \rtimes W_F.$$

Problème. Décrire un tel prolongement de l'inclusion $\begin{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) & \\ & \mathbb{C}^\times \end{pmatrix} \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$. C'est ce que nous allons faire. Il faut donc déterminer un L-paramètre

$$\begin{array}{rcl} \eta_{|W_F} : W_F & \to & \hat{G} \rtimes W_F \\ \sigma & \mapsto & \alpha(\sigma) \rtimes \sigma\,. \end{array}$$

Regardons les possibilités pour $\eta_{|W_E}$: L'action de W_E sur $\hat{H}$ et $\hat{G}$ étant triviale le morphisme η_E est un morphisme $\hat{H} \times W_E \to \hat{G} \times W_E$ et donc $\forall\, \sigma \in W_E$ $\alpha(\sigma)$ commute à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ donc,

$$\forall\, \sigma \in W_E \qquad \alpha(\sigma) \in \begin{pmatrix} \mathbb{C}^\times I_2 & \\ & \mathbb{C}^\times \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_{|W_E} = \begin{pmatrix} \eta_1 & & \\ & \eta_1 & \\ & & \eta_2 \end{pmatrix} \text{ où } \eta_i : W_E^{ab} \to \mathbb{C}^\times.$$

Extensions possibles de $\eta_{|W_E}$ à $\eta_{|W_F}$. Il s'agit de déterminer les possibilités pour $\eta(c) = g \rtimes c$. On doit avoir que $\mathrm{int}_{g \rtimes c|\hat{H}} = \rho(c)$. Par un calcul déjà fait on peut donc supposer que

$$\eta(c) = \begin{pmatrix} \Phi_2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \Phi_3 \rtimes c\,.$$

Reste les conditions de compatibilité entre $\eta(c)$ et $\eta_{|W_E}$. Il y en a deux :

* La première est

$$\begin{array}{ccc} \eta(c^2) & = & \eta(c)^2 \\ \| & & \| \\ \begin{pmatrix} \eta_1(c^2) & & \\ & \eta_1(c^2) & \\ & & \eta_2(c^2) \end{pmatrix} \rtimes c^2 & & (g \rtimes c)(g \rtimes c) = \begin{pmatrix} -I_2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(utiliser $g = \begin{pmatrix} \Phi_2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \Phi_3$). Et donc,

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \eta_1(c^2) = -1 \\ \eta_2(c^2) = 1 \end{cases}$$

* La seconde : $\forall\, \sigma \in W_E$

$$\begin{aligned} \eta(c\sigma c^{-1}) = \eta(c)\, \eta(\sigma)\, \eta(c)^{-1} &= \begin{pmatrix} \Phi_2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1(\sigma) & & \\ & \eta_1(\sigma) & \\ & & \eta_2(\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_2^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \eta_1(\sigma)^{-1} & & \\ & \eta_1(\sigma)^{-1} & \\ & & \eta_2(\sigma)^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \forall\, i = 1,2 \qquad \eta_i(\sigma)\, \eta_i(c\sigma c^{-1}) = 1\,. \qquad \text{(B)}$$

Notons maintenant $\chi_i = \eta_i \circ \mathrm{rec}_E : \mathbb{A}_E^\times / E^\times \to \mathbb{C}^\times$ $(i = 1,2)$

(B) $\Rightarrow \chi_i\, \chi_i^c = 1$ i.e. $\chi_i \circ N_{E/F} = 1$.

Soit

$$\chi_{i|\mathbb{A}_F^\times/F^\times} : C_F/N_{E/F}C_E \to \mathbb{C}^\times .$$

De plus il y a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_E & \xrightarrow{\mathrm{rec}_E} & W_E^{ab} \\ {\scriptstyle N_{E/F}}\downarrow & & \downarrow \\ C_F & \xrightarrow{\mathrm{rec}_F} & W_F^{ab} \end{array}$$

Et donc, si $\mathrm{rec}_F(x) = c$ où $x \in C_F$, $\mathrm{rec}_E(x) = \mathrm{rec}_F(N_{E/F}(x)) = \mathrm{rec}_F(x^2) = \mathrm{rec}_F(x)^2 = c^2$. Donc,

$$(\mathrm{A}) = \begin{cases} \eta_1(c^2) = -1 \\ \eta_2(c^2) = +1 \end{cases} \Rightarrow \forall\, x \in C_F \backslash N_{E/F}C_E \begin{cases} \chi_1(x) = -1 \\ \chi_2(x) = +1 \end{cases}$$

On trouve donc que η doit vérifier (et il s'agit d'une condition suffisante)

$$\boxed{\begin{array}{l} \eta_{1|C_F} = \omega_{E/F} \text{ le caractère quadratique de } E/F \\ \eta_{2|C_F} = 1 \end{array}}$$

On peut donc supposer que $\eta_2 = 1$ et $\eta_1 = \mu =$ n'importe quel caractère de C_E étendant $\omega_{E/F}$ sur C_F.

Remarque. Étant donné que l'extension $E|F$ est C.M. (dans ces notes) on peut choisir μ d'ordre fini (utiliser $[O_E^\times : O_F^\times] < +\infty$) et donc

$$\eta : \hat{H} \rtimes \Gamma_F \to \hat{G} \rtimes \Gamma_F .$$

Cependant les calculs précédents sont valables pour n'importe quelle extension quadratique $E|F$ et l'on voit donc qu'en général il faut prendre

$$\eta : \hat{H} \rtimes W_F \to \hat{G} \rtimes W_F .$$

1.4.3 Résumé

$*$ $H = U(2) \times U(1)$ est l'unique groupe endoscopique de $U(3)$. De plus,

$\eta_{|\hat{H}} : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ est le plongement diagonal

$$\eta(c) = \begin{pmatrix} \Phi_2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \Phi_3$$

$$\eta_{|W_E} = \begin{pmatrix} \mu & & \\ & \mu & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

On notera $\eta_H := \eta$.

$*$ De même, $C = U(1) \times U(1) \times U(1)$ est l'unique groupe endoscopique de H avec

$\eta_{/\hat{C}} : \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ est le plongement diagonal

$\eta(c) = \Phi_2^{-1} \times 1$
$\eta_{/W_E} = \begin{pmatrix} \mu^{-1} & \\ & \mu^{-1} \end{pmatrix} \times 1$
(μ^{-1} au lieu de μ simplifie les formules pour $\eta_H \circ \eta_C$)
on note $\eta_C := \eta$.

1.4.4 Propriété fondamental des groupes endoscopiques de $U(3)$

Après extension des scalaires à E

$$(H,\, s,\, \eta_H)_{/E} \quad \text{est un sous-groupe de Levi de } G^*_{/E} \simeq \mathrm{GL}_{3/E}$$

idem pour $(C,\, s,\, \eta_c)$.

Cela aura des applications à la classification des paquets transfert endoscopique en fonction du “support cuspidal” de leur changement de base à E.

On constate également que cela implique que si v est une place finie de F décomposée dans E alors $(H,\, s,\, \eta_H)_{/F_v}$ est un sous-groupe de Levi de G^*_v. Cela aura des applications plus tard à la classification du spectre discret de $U(3)$.

2 Paramètres d'Arthur

Les trois articles fondamentaux concernant ce sujet sont [1], [2], [3].

2.1 Motivations : Rappels sur les paramètres tempérés

On note $\mathcal{L}_F$ le groupe (conjectural) de Langlands, extension de W_F par un groupe compact.

Pour toute place v de F, $v \nmid \infty$ $\mathcal{L}_{F_v} := W_{F_v} \times SU(2,\, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{L}_F$ (plongement défini à conjugaison près).

Remarque. On peut également prendre $W_{F_v} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (ce qui revient à privilégier le poids de Frobenius) ou $WD_{F_v} = \mathbb{G}_a \rtimes W_{F_v}$ (ce qui revient à privilégier l'opérateur de monodromie). Tous ces groupes ont même catégorie de représentations (comme $\otimes$-catégories). Par exemple, pour passer de $W_{F_v} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ à WD_{F_v} il suffit de composer avec le morphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{G}_a \rtimes W_{F_v} & \to & W_{F_v} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \\ x \rtimes \sigma & \mapsto & \sigma \times \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\sigma|^{1/2} & 0 \\ 0 & |\sigma|^{-1/2} \end{pmatrix}. \end{array}$$

Pour toute place $v|\infty$ $\mathcal{L}_{F_v} = \mathbb{C}^\times$ si $F_v \simeq \mathbb{C}$ et $1 \to \mathbb{C}^\times \to \mathcal{L}_{F_v} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \to 1$ (l'extension non triviale) si $F_v \simeq \mathbb{R}$.

Rappelons :

Définition. Un L-paramètre $\varphi : \mathcal{L}_F \to {}^LG$ est tempéré si $\mathrm{Im}\varphi$ est relativement compact. Nous noterons $\Phi_{\text{temp}}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de paramètres tempérés de G, $\Phi_{\text{temp}}(G) \subset \Phi(G)$.

Interprétation "géométrique" de tempéré

$*$ Si $v \nmid \infty$, $\varphi_v : \mathcal{L}_{F_v} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est tempéré ssi la représentation galoisienne potentiellement semi-stable associée (via $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$ et $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}\, WD_{F_v} \simeq \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}\, W_{F_v} \times SU(2)$) vérifie

$$\begin{aligned} &\text{La filtration par la monodromie (centrée en 0)} \\ &= \text{ filtration par le poids de Frobenius.} \end{aligned}$$

Du point de vue de WD_{F_v} ce sont les représentations de la forme

$$\bigoplus_i \rho_i \,|\cdot|^{\frac{1-n_i}{2}} \otimes \mathrm{sp}(n_i)$$

où $\rho_i : W_{F_v} \to \mathrm{GL}_{a_i}(\mathbb{C})$ est irréductible avec des valeurs propres de Frobenius de module 1.

Ainsi, si φ_v est non ramifié (et donc l'opérateur de monodromie N est nul) tempéré est équivalent à ce que les valeurs propres de Frobenius soient de module 1.

$*$ Si $v|\infty$ et $F_v \simeq \mathbb{C}$ $\mathcal{L}_{F_v} = \mathbb{C}^\times = \mathbb{S}$ classifie les $\mathbb{R}$-structures de Hodge. Si $F_v \simeq \mathbb{R}$ $\mathcal{L}_{F_v} \supset \mathbb{C}^\times$ classifie les $\mathbb{R}$-structures de Hodge munies d'une action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. Alors,

$$\varphi_v \text{ tempéré} \Leftrightarrow \text{Structure de Hodge pure de poids } 0$$

($z^p\bar{z}^q$ est borné ssi $p+q=0$).

Rappelons (cf. exposé J.-F. Dat) que pour $\varphi \in \Phi_{\text{temp}}(G)$ on note

$$\mathfrak{S}_\varphi = \pi_0(S_\varphi/Z(\hat{G})) = \pi_0(C_\varphi/Z(\hat{G})^\Gamma)$$

si $\ker^1(F, Z(\hat{G})) = 1$ ce qui est le cas pour $U(3)$ où $C_\varphi = \{g \in \hat{G} \mid g\varphi g^{-1} = \varphi\} \supset Z(\hat{G})^\Gamma$ (cf. [5]). De plus, si φ est elliptique tempéré ($C_\varphi^0 \subset Z(\hat{G})$ et donc $\mathfrak{S}_\varphi = C_\varphi/Z(\hat{G})^\Gamma$)

$$\Pi_\varphi = \bigotimes_v \Pi_{\varphi_v}$$

où Π_φ est un L-paquet cuspidal tempéré et Π_{φ_v} des L-paquets locaux. Et qu'il devrait exister une application (on suppose $\mathfrak{S}_\varphi$ abélien pour simplifier ce qui est le cas pour les groupes unitaires)

$$\begin{array}{rcl} \Pi_\varphi & \to & \widehat{\mathfrak{S}}_\varphi \\ \Pi & \mapsto & \langle \Pi, \cdot \rangle = \prod_v \langle \Pi_v, \cdot \rangle \end{array}$$

produit d'applications locales

$$\begin{array}{rcl} \Pi_{\varphi_v} & \to & \widehat{\mathfrak{S}}_{\varphi_v} \\ \Pi_v & \mapsto & \langle \Pi_v, \cdot \rangle \end{array}$$

via $\widehat{\mathfrak{S}}_{\varphi_v} \to \widehat{\mathfrak{S}}_\varphi$ (il y a un morphisme $\mathfrak{S}_\varphi \to \mathfrak{S}_{\varphi_v}$) tels que si

$$m(\Pi,\, \varphi) = \frac{1}{|\mathfrak{S}_\varphi|} \sum_{s \in \mathfrak{S}_\varphi} \langle s,\, \Pi \rangle$$

et

$$m_\Pi = \sum_{\varphi, \Pi \in \Pi_\varphi} m(\Pi,\, \varphi) = m(\Pi,\, \varphi) \times \# \{\varphi' \mid \forall\, v\ \varphi'_v \sim \varphi_v\}$$

alors m_Π est la multiplicité de Π dans le spectre discret (et donc dans le spectre cuspidal car tous les $\Pi \in \Pi_\varphi$ sont tempérés). De plus, à tout $s \in \mathfrak{S}_\varphi$ est associé un triplet endoscopique $(H,\, s,\, \eta)$, et $\varphi = \eta \circ \varphi'$ pour $\varphi' \in \Phi_{\text{temp}}(H)$. On conjecture également l'existence d'une application de transfert locale

$$\mathcal{C}_c^\infty(G(F_v)) \ni f_v \mapsto f_v^{H_v} \in \mathcal{C}_c^\infty(H(F_v))$$

telle que

$$\forall\, v \qquad \sum_{\Pi_v \in \Pi_{\varphi_v}} \langle s,\, \Pi_v \rangle \,\mathrm{tr}_{\Pi_v}(f) = \sum_{\Pi'_v \in \Pi_{\varphi'_v}} \mathrm{tr}_{\Pi_v}(f^{H_v})$$

et la distribution $\sum_{\Pi'_v \in \Pi_{\varphi'_v}} \mathrm{tr}_{\Pi'_v}$ est stable sur H_v. On demande de plus que si G_v est non ramifié et f_v sphérique alors $f_v^{H_v}$ est sphérique et correspond via l'isomorphisme de Satake à la fonction déduite grâce à $\eta :\, {}^L H \to {}^L G$ (qui induit un morphisme d'algèbres de Hecke non ramifiées) ("version spectrale" du lemme fondamental)).

Tout cela implique (cf. exposé Dat) la stabilisation de la partie elliptique tempérée de la formule des traces.

2.2 Généralisation au cas non tempéré

Problème. Si φ_v n'est pas tempéré, $\sum_{\Pi_v \in \Pi_{\varphi_v}} \mathrm{tr}_{\Pi_v}$ n'est pas stable en général. La méthode précédente n'est donc pas suffisante pour fournir une stabilisation conjecturale du spectre discret.

L'explication du fait que $\sum_{\Pi_v \in \Pi_{\varphi_v}} \mathrm{tr}_{\Pi_v}$ n'est pas stable est la suivante : $\forall\, \varphi_v \in \Phi(G_v)$ $\exists\, M$ Levi tel que φ se factorise par ${}^L M$ et $\exists\, \chi_M$ caractère de M tel que $\varphi_v \otimes \chi_M^{-1} : \mathcal{L}_{F_v} \to {}^L M$ soit elliptique tempéré. Alors,

$$\Pi_{\varphi_v} = \big\{\text{quotients de Langlands des } \mathrm{Ind}_{MN}^G(\Pi \otimes \chi_M) \mid \Pi \in \Pi_{\varphi_v \otimes \chi_M^{-1}}$$
$$\text{paquet elliptique tempéré de } M\big\}\,.$$

La distribution sur M $\sum_{\Pi \in \Pi_{\varphi_v \otimes \chi_M^{-1}}} \mathrm{tr}_\Pi$ est bien stable et la distribution

$$\sum_{\Pi \in \Pi_{\varphi_v \otimes \chi_M^{-1}}} \mathrm{tr}_{\mathrm{Ind}_P^G \Pi}$$

l'est également.

$\to$ Si l'on considère tous les éléments de la suite de Jordan-Hölder c'est bien stable, mais il y a un problème si les induites sont réductibles et l'on ne considère que le quotient de Langlands.

Rappel (décomposition de Hodge). Soit $X/\mathbb{C}$ une variété projective lisse et $[L] \in H^{1,1}$ la classe d'une section hyperplane

$$- \cup [L] : H^i(X) \to H^{i+2}(X)$$

est un endomorphisme nilpotent de $\bigoplus\limits_i H^i(X)$. Alors, $[L]$ est associé à un $s\ell_2$-triplet sur $\bigoplus\limits_i H^i(X)$:

$$L \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$*L* \text{ (l'adjoint de } L) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $H^{\dim(X)}(X)$ est l'espace de poids 0 pour la sous-algèbre torique $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \bigoplus\limits_i H^i(X)$ est muni d'une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ avec des poids centrés en $\dim X$.

Les conjectures standards impliquent que l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ devrait être motivique (l'action de $*L*$ devrait être, via la dualité de Poincaré, donnée par la classe d'un cycle).

Ainsi, si Π est une représentation automorphe intervenant dans la cohomologie d'une variété de Shimura Sh, le motif découpé par Π_f devrait avoir une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Problème associé. On sait souvent (toujours en réalisation de Hodge et souvent d'après Kottwitz en réalisation ℓ-adique) calculer la contribution de Π_f dans $\sum\limits_i (-1)^i\, \mathbb{H}^i(\mathrm{Sh})$ ($\mathbb{H}$=cohomologie d'intersection) (il s'agit d'un multiple de $r_\mu \circ \varphi$ où $r_\mu \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}({}^LG)$). Comment séparer les $\mathbb{H}^i$?

Réponse (au problème associé). Si Π est essentiellement tempérée : pas le choix : pureté $\Rightarrow$ concentré en degré médian.

Dans le cas général, il devrait y avoir une décomposition de Hodge sur le motif découpé par $\Pi_f \Rightarrow$ on peut retrouver la contribution de Π_f grâce aux poids de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

2.2.1 A-paramètres.

Définition. Posons

$$\mathcal{A}_F = \mathcal{L}_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

$$\mathcal{A}_{F_v} = \mathcal{L}_{F_v} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\,.$$

Définition. Un A-paramètre est un morphisme

$$\psi : \mathcal{A}_F \to {}^L G$$

tel que $\psi_{|\mathcal{L}_F}$ est un L-paramètre tempéré (+ condition de relevance usuelle).

Notation. $\psi(G) = \{\text{paramètre d'Arthur}\}$. De même, on définit $\psi(G_v)$

$$\psi_{|\mathcal{L}_F} \leftrightarrow \text{la représentation en degré médian dans la cohomologie.}$$

A un A-paramètre ψ on associe un L-paramètre φ_ψ par composition grâce à

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_F & \to & \mathcal{A}_F \\ \sigma & \mapsto & \left(\sigma, \begin{pmatrix} |\sigma|^{1/2} & \\ & |\sigma|^{-1/2} \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

(on distribue les poids autour du degré médian). Cela induit des inclusions :

$$\underbrace{\Phi_{\mathrm{temp}}(G)}_{\substack{A-\text{param. } \psi \text{ tq.} \\ \Psi_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})=1}}} \subset \psi(G) \subset \Phi(G)\,.$$

Comme pour les L-paramètres on note :

$$\mathfrak{S}_\psi = \pi_0(S_\psi / Z(\hat{G}))$$

où si

$$C_\psi = \mathrm{Aut}(\psi) = \{g \in \hat{G} / g\psi g^{-1} = \psi\} \supset Z(\hat{G})^\Gamma$$
$$S_\psi = C_\psi \, Z(\hat{G}) \quad \text{si } F \text{ est local}$$

et en général

$$1 \to \pi_0(C_\psi / Z(\hat{G})^\Gamma) \to \mathfrak{S}_\psi \to \ker^1(F,\, Z(\hat{G}))$$

est exacte (deux paramètres qui diffèrent par torsion par des caractères partout triviaux sont considérés comme équivalents).

Hypothèse. On suppose dorénavant pour simplifier les notations que $\ker^1(F,\, G) = \{1\}$ ce qui est le cas pour $U(3)$. Alors,

$$\mathfrak{S}_\psi = \Pi_0(C_\psi / Z(\hat{G})^\Gamma)\,.$$

Définition. Le paramètre $\psi \in \psi(G)$ est discret si $C_\psi^0 \subset Z(\hat{G})$ i.e. $C_\psi / Z(\hat{G})^\Gamma$ est fini. On note $\psi_{\mathrm{disc}}(G) \subset \psi(G)$.

Remarque. Discret + tempéré $\Leftrightarrow$ elliptique tempéré (les paramètres discrets paramétrant conjecturalement le spectre discret, l'interprétation spectrale de cette remarque est (fait bien connu) : le spectre résiduel ne possède pas de composante tempérée).

Exemple. Soit $v \nmid \infty$. Les représentations de WD_{F_v} de la forme φ_ψ sont les

$$\bigoplus_i \underbrace{\bigoplus_{0 \le k \le m_i} \rho_i \, |\cdot|^{\frac{1-n_i-m_i}{2}+k} \otimes \mathrm{sp}(n_i)}_{\text{rep. irréductible de } WD_{F_v} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$$

où $\forall\, i$ ρ_i est une représentation irréductible de W_{F_v} et les valeurs propres de $\rho_i(\mathrm{Frob})$ sont de module 1.

Remarque. Il y a une surjection $\mathfrak{S}_\psi \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_{\varphi_\psi}$, d'où une injection

$$\widehat{\mathfrak{S}}_{\varphi_\psi} \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{S}}_\psi$$

$\rightarrow$ élargir les L-paquets de telle manière que $\sum\limits_{\Pi \in \text{ plus gros que } \Pi_{\varphi_\psi}} \mathrm{tr}_\Pi$ soit stable.

3 Conjectures d'Arthur

(Version certainement naïve mais qui marche pour $U(3)$. On suppose $\mathfrak{S}_\psi$ abélien $\rightarrow$ vrai pour $U(3)$.)

Version locale : A tout $\psi_v \in \psi(G_v)$ on peut associer un ensemble fini Π_{ψ_v} de représentations *unitaires* de G_v tel que

$$\Pi_{\varphi_{\psi_v}} \subset \Pi_{\psi_v}$$

ainsi qu'une application (souvent injective mais pas toujours ...)

$$\Pi_{\psi_v} \to \widehat{\mathfrak{S}}_{\psi_v}$$

$$\Pi_v \mapsto \langle \Pi_v, \cdot \rangle$$

telle que $\Pi_v \in \Pi_{\psi_v}$ vérifie $\Pi_v \in \Pi_{\psi_v}$ ssi $\langle \Pi_v, \cdot \rangle \in \widehat{\mathfrak{S}}_{\varphi_{\psi_v}} \subset \widehat{\mathfrak{S}}_{\psi_v}$, et si $s_{\psi_v} = \psi_v \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{\psi_v}$ la distribution

$$\sum_{\Pi_v \in \Pi_{\psi_v}} \langle s_{\psi_v}, \Pi_v \rangle \, \mathrm{tr}_{\Pi_v} \text{ soit stable.}$$

De plus (transfert endoscopique) si $s \in \mathfrak{S}_\psi$ soit (H, s, η) un triplet endoscopique associé tel que $\psi_v = \eta \circ \psi_{H,v}$ où $\psi_{H,v} \in \psi_v(H_v)$. On a alors

$$\boxed{\sum_{\Pi_v \in \Pi_{\psi_v}} \langle s s_{\psi_v}, \Pi_v \rangle \, \mathrm{tr}_{\Pi_v}(f) = \sum_{\Pi_v \in \Pi_{\psi_{H,v}}} \langle s_{\psi_{H,v}}, \Pi_v \rangle \, \mathrm{tr}_{\Pi_v}(f^{H_v})}$$

pour une application de transfert $f \mapsto f^{H_v}$.

Version globale. Soit $\psi \in \psi(G)$. Associons-lui

$$\Pi_\psi = \{\bigotimes_v \Pi_v \| \ \Pi_v \in \Pi_{\psi_v} \text{ (et } \Pi_v \text{ p.p. non-ramifié)}\}\,.$$

D'après les conjectures locales $\forall\, \Pi \in \Pi_\psi$ est *unitaire*.

Conjectures. Les $\psi \in \psi(G)$ tels que $\exists\, \Pi \in \Pi_\psi$ intervenant dans le spectre discret de G sont les éléments de $\psi_{\rm disc}(G)$, et ceux-ci exhaustent tout le spectre discret de G.

De plus, pour $\psi \in \psi_{\rm disc}(G)$ $\exists\, \epsilon_\psi : \mathfrak{S}_\psi \to \{\pm 1\}$ tel que si $\Pi \in \Pi_\psi$, si

$$\boxed{m(\Pi,\,\psi) = \frac{1}{|\mathfrak{S}_\psi|} \sum_{\Pi \in \Pi_\psi} \varepsilon_\psi(s)\,\langle s, \Pi\rangle}$$

alors la multiplicité de Π dans le spectre discret est

$$\sum_{\psi, \Pi \in \Pi_\psi} m(\Pi, \psi)\,.$$

Attention. Les A-paquets ne sont pas nécessairement disjoints ! Pour $U(3)$ cela est faux pour les paquets locaux et vrai pour les paquets globaux discrets tels que $m(\Pi,\psi) \neq 0$.

Supplément. ε_ψ devrait être un facteur ε évalué en $\frac{1}{2}$ d'une certaine représentation autoduale obtenue en composant la représentation de $\mathcal{L}_F \times {\rm SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{S}_\psi$ avec la représentation adjointe de $\hat G$

$$\left(\varepsilon(s,\rho)\,\varepsilon(1-s,\rho^\vee) = 1 \Rightarrow \varepsilon\left(\frac{1}{2},\rho\right)\,\varepsilon\left(\frac{1}{2},\rho^\vee\right) = 1 \text{ et } \rho \simeq \rho^\vee \Rightarrow \varepsilon\left(\frac{1}{2},\rho\right) \in \{\pm 1\}\right)\,.$$

3.1 Explication (tentative) du terme ε_ψ en termes de normalisation des opérateurs d'entrelacement (cf. [3])

Stabilisation du spectre discret :

$$T_{\rm disc}(f) = \sum_{\Pi \text{ discret}} m_\Pi\, {\rm tr}_\Pi(f) = \sum_{(H,s,\eta)\in\mathcal{E}} \iota(G,\,H)\, \underbrace{ST_{{\rm disc}\ (G,\,H)\text{-régulier}}(f^H)}_{\sum_{\substack{\Pi\in\Pi_{{\rm disc}(H)} \text{tel que} \\ \eta_*\Pi \text{ est discret}}} m_\Pi {\rm tr}_\Pi(f^H)}$$

Problème. $ST_{{\rm disc}\ (G,\,H)\text{-régulier}}$ est une distribution stable sur H qui ne dépend pas intrinsèquement de H, mais de H comme groupe endoscopique de G.

Explication. Il faut stabiliser toute la partie discrète de la formule des traces : dans la formule des traces il y a 2 Levi emboîtés avec une $\int_{\text{axe imaginaire}}$ (qui fournit une distribution continue) qui n'apparaît pas lorsque le plus gros Levi est G. Cette partie là est discrete (lorsque les 2 Levi sont égaux à G on obtient $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))_{\mathrm{disc}}$ qui fournit la distribution T_{disc} précédente). Elle est de la forme

$$I_{\mathrm{disc}}(f) = T_{\mathrm{disc}}(f) + \sum_{M \text{ Levi standard}} \sum_{\substack{w \in W_M^{\mathrm{reg}} \\ M^w = M + \text{régularité}}} \text{cst.} \times \mathrm{tr}(M(w,\,0)\, I_P^G\, f)$$

où $I_P^G = \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})} L^2_{\mathrm{disc}}(M(F)\backslash M(\mathbb{A}))_\xi$ (induite abstraite) et $M(w,\,0)$ est l'opérateur d'entrelacement $\boxed{\textit{global}}$ en 0. En particulier $\mathrm{tr}(M(w,\,0)\, I_P^G f)$ ne tient compte que des $\Pi \subset L^2_{\mathrm{disc}}(M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$ tels que $\Pi^w \simeq \Pi$ pour un $w \in W_M^{\mathrm{reg}}$.

$*$ Soit maintenant $\psi \in \psi_{\mathrm{disc}}(H)$ tel que $\eta \circ \psi$ ne soit plus discret, i.e. $\eta \circ \psi$ se factorise par un paramètre discret d'un sous-groupe de Levi propre de G.

Le A-paquet global $\Pi_{\eta\circ\Psi}$ est formé de représentations unitaires et fournit une distribution discrète sur $G(\mathbb{A}_F)$

$$f \mapsto \sum_{\Pi \in \Pi_\psi} \langle s s_\psi,\, \Pi\rangle\, \mathrm{tr}_\Pi(f^H)\,.$$

De plus, si $\psi = i \circ \psi'$ où $i : {}^L M \hookrightarrow {}^L G$ (un sous-groupe de Levi de G) et $\psi' \in \psi_{\mathrm{disc}}(M)$, ψ contribue à la partie discrète de la formule des traces via la distribution discrète

$$f \mapsto \sum_{\Pi' \in \Pi_{\psi'}} \mathrm{tr}(M(w,\,0)\, I_F^G\, \Pi'\, f)\,.$$

$\to$ On veut se faire se compenser ces deux distributions discrètes afin de stabiliser toute la partie discrète de la formule des traces : I_{disc}.

$\to$ Il est alors naturel de formuler des conjectures locales reliant les

$$\mathrm{tr}(R_v(w,\,0)\, I_{P_v}^{G_v} \Pi'_v)_{\Pi'_v \in \Pi_{\psi'_v}} \ \text{ et } \ (\mathrm{tr}_{\Pi_v})_{\Pi_v \in \Pi_{\psi_v}}$$

où $R_v(w,\,0)$ est un opérateur d'entrelacement *local*.

Problème. $M(w,\,s)_{\mathrm{Res}\gg 0}$ est défini par une intégrale du type $\int_{\backslash N(\mathbb{A})}$ et n'est pas immédiatement un produit $\bigotimes_v R_v$. Il faut utiliser un procédé de normalisation qui fait que

$$\bigotimes_v R_v = (\text{produit de fonctions } L) \times M(w,\,s)\,.$$

$*$ Pour que nos deux distributions discrètes se compensent il suffit alors d'introduire le ε_ψ dans les formules de multiplicité (cela est vérifié dans [3]), ε_ψ qui provient de ce facteur de normalisation exprimé en termes de fonctions L.

4 Classification du spectre discret de $U(3)$

Ici, $G = U(3)$ désigne un groupe unitaire global comme précédemment.

Nous allons tester les conjectures d'Arthur sur $U(3)$ afin de voir ce qu'elles impliquent sur le spectre discret de $U(3)$. Les conjectures sont démontrées dans [12] et [13] (cf. plus généralement le livre [15]).

Soit $\psi : \mathcal{A}_F \to {}^L G$ un paramètre d'Arthur. Notons

$$\psi_E = \mathrm{BC}_{E/F}(\psi) = \psi_{|\mathcal{A}_E} : \mathcal{A}_E \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$$

son changement de base à l'extension quadratique E/F.

La restriction $\psi_{|\mathcal{L}_F}$ étant tempérée, $\psi(\mathcal{L}_F \times SU(2))$ est relativement compact et donc

$$\psi_E = \bigoplus_i \rho_i^{\oplus m_i}$$

est semi-simple où $\forall\, i \neq j$, $\rho_i \not\simeq \rho_j$.

Lemme. *ψ discret $\Rightarrow \forall\, i \quad m_i = 1$ et $\forall\, i$ $\rho_i \simeq \overset{\vee}{\rho}{}_i^c$.*

Démonstration. Avec les notations ci-dessus

$$\mathrm{Aut}(\psi_E) \simeq \prod_i \mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{C})\,.$$

Si

$$\# = \mathrm{int}_{\psi(c)} : \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$$

(un automorphisme extérieur semi-simple de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$), $\#$ fixe chacune des composantes isotypiques $\rho_i^{\oplus m_i}$. Il est donc de la forme

$$\# = \prod_i \#_i$$

et

$$\mathrm{Aut}(\psi) = \prod_i \mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{C})^{\#_i}$$

or $m_i > 1$ et $\#_i =$ involution semi-simple $\Rightarrow \dim \mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{C})^{\#_i} > 0$ (d'après Steinberg, $\#_i$ fixe un Borel). Donc, $\forall\, i$ $m_i = 1$ et de plus

$$\#_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \to & \mathbb{C}^\times \\ z & \mapsto & z^{-1} \end{array}.$$

Donc $\rho_i \simeq \overset{\vee}{\rho}{}_i^c$. □

Avec les notations précédentes

$$\mathfrak{S}_\psi = \prod_i \{\pm 1\}/\{\pm I_3\}\,.$$

Remarque. $\forall\, v$, $\psi_v \sim \psi'_v \Rightarrow \psi \sim \psi'$ ($\mathrm{BC}_{E/F}$ injectif + Tchebotarev pour $\mathcal{L}_F$).

A. Cas stable

Il correspond à $\mathfrak{S}_\psi = \{1\}$ i.e. d'après la discussion précédente ψ_E est irréductible.

Lemme. *Soit*

$$\psi' : \mathcal{A}_E \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}), \quad \begin{array}{c} \psi' \in \psi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_{3/E}) \\ \Updownarrow \\ \psi' \text{ est irréductible} \end{array}$$

Corollaire. $\psi : \mathcal{A}_F \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ *est stable ssi* $\mathrm{BC}_{E/F}(\psi)$ *est discret et effectivement, Rogawsky démontre dans* [12] *l'existence de* $\mathrm{BC}_{E/F}$ *et le théorème suivant.*

Théorème. (Rogawsky)

$$\mathrm{BC}_{E/F} : \{\Pi \textit{ stables}\} \xrightarrow{\sim} \{\Pi \textit{ de } \mathrm{GL}_3(\mathbb{A}_E) \textit{ discrètes telles que } \overset{\vee}{\Pi} \simeq \Pi^c\}$$

ψ_E étant irréductible, il est de la forme $\alpha \otimes \beta$ où

- α est une représentation irréductible tempérée de $\mathcal{L}_E$
- β est une représentation irréductible de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

2 cas sont alors à distinguer

- $\dim \alpha = 3$, $\dim \beta = 1$, i.e. ψ est tempéré. Alors, Π_ψ est stable $= \{\Pi\}$ où Π est cuspidale tempérée et $\mathrm{BC}_{E/F} : \{\Pi$ cuspidales tempérées$\} \xrightarrow{\sim} \{\Pi$ cuspidales telles que $\overset{\vee}{\Pi} \simeq \Pi^c\}$ (on sait montrer que Π est tempérée si Π_∞ est cohomologique).
- $\dim \alpha = 1$ et $\beta =$ la représentation irréductible de dimension 3 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Alors, $\overset{\vee}{\alpha} = \alpha^c \Rightarrow \alpha = \mathrm{BC}_{E/F}(\varphi_\theta)$ où θ est un caractère de $U(1)(F)\backslash\, U(1)(\mathbb{A}_F)$

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{|\mathcal{L}_E} \circ \mathrm{rec}_E : \mathbb{A}_E^\times / E^\times & \to & \mathbb{C}^\times \times \mathcal{L}_E^{\mathrm{ab}} \\ x & \mapsto & \theta(x/x^*) \times \mathrm{rec}_E(x) \end{array} \qquad \text{et } \alpha(c) = 1 \rtimes c$$

$\to$ cf. correspondance de Langlands pour $U(1)$.

Alors,

$$\varphi_{\psi|\mathcal{L}_E} = \begin{pmatrix} \alpha|\cdot|^{+1} & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha|\cdot|^{-1} \end{pmatrix} \text{ et } \varphi_\psi(c) = I_3 \rtimes c$$

i.e.

$$\Pi_\psi = \Pi_{\varphi_\psi} = \{\theta \circ \det\}$$

qui est un résidu de série d'Einstein du caractère induit

$$\begin{pmatrix} x & & \\ & y & \\ & & x^{-*} \end{pmatrix} \mapsto \theta(y)\,\theta\left(\frac{x}{x^*}\right)$$

du Borel de $U(3) \simeq E^\times \times U(1)$.

Alors, $\mathrm{BC}(\Pi_\psi) = \{g \mapsto \theta \circ \det(g/g^*)\}$.

Remarque fondamentale. Si G est associé à une algèbre à division alors c'est fini : *tout le spectre est stable* !

En effet, $\exists\, v \nmid \infty$, $G(F_v) = D_v^\times$ or, si ψ_E est réductible, $E_v = F_v \Rightarrow \psi_v$ est réductible $\Rightarrow$ contradiction avec la condition de relevance locale.

Point de vue des classes de conjugaison

La remarque fondamentale précédente (qui est un énoncé du côté spectral) a un équivalent du côté des classes de conjugaison (i.e. du côté géométrique).

Théorème. (Kottwitz) *Supposons G associé à une algèbre à division. Soit $\gamma \in G(F)$. Alors $\mathcal{R}(G_\gamma/F) = \{0\}$.*

Démonstration. Un outil important dans la stabilisation de la formule des traces pour les groupes unitaires est la notion de place essentielle dégagée par Labesse dans la section 1-9 de [9]. En particulier, si $H \subset G$ est tel que H_v soit anisotrope alors

$$\underbrace{\mathfrak{S}(H, G; F_v)}_{\ker(H^1_{\mathrm{ab}}(F_v,H)\to H^1_{\mathrm{ab}}(F_v,G))} \twoheadrightarrow \mathfrak{S}(H, G; \mathbb{A}_F/F) \quad \text{est surjective}$$

et donc les caractères endoscopiques globaux ($\in \mathfrak{S}(H, G; \mathbb{A}_F/F)^D$) s'injectent dans les caractères endoscopiques locaux. (Donc, si $f = \bigotimes_w f_w$ et $\forall\, \gamma_v \neq 0$, $\mathcal{O}^{\kappa_v}_\gamma(f_v) = 0$ alors $\forall\, \kappa$ global, $\kappa \neq 0$, $\mathcal{O}^{k}_\gamma(f) = 0$ ce qui explique l'intérêt des places essentielles.)

Ici dans $D_v^\times$ conjugaison stable = conjugaison usuelle $\Rightarrow \sigma(G_\gamma, G, F_v) = \{0\}$.

□

B. Cas $\mathfrak{S}_\psi \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Alors, $\psi_E \simeq \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3$ où $\forall\, i \neq j$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ et $\forall\, i$, $\alpha_i \simeq \overset{\vee}{\alpha}{}^c_i$, α_i tempéré (i.e. unitaire).

Nécessairement $\psi_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = 1$ et ψ est un paramètre tempéré. En fait, $\forall\, i$, $\overset{\vee}{\alpha}_i \simeq \alpha_i^c \Rightarrow \alpha_i = \varphi_{\theta_i|\mathcal{L}_E}$ où θ_i est un caractère de $U(1)$.

Rappel. $C = U(1) \times U(1) \times U(1)$, $H = U(2) \times U(1)$

$$\eta_C : {}^LC \to {}^LH\,, \quad \eta_H : {}^LH \to {}^LG\,.$$

⚠: $\eta_H \circ \eta_C$ n'est pas un sous-groupe de Levi de ${}^LG$.

Alors, $(\eta_H \circ \eta_C)(c) = \Phi_3 \rtimes c$

$$\eta_H \circ \eta_C\, |_{\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times} = \text{plongement diagonal}$$

$\theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \theta_3 \in \Pi_{\mathrm{temp}}(C)$ et

$$\begin{aligned} \Pi_\psi &= (\eta_H \circ \eta_C)_*(\theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \theta_3) \text{ cuspidal tempéré} \\ &= \eta_{H*}(\underbrace{\eta_{U(1)\times U(1)*}(\theta_1 \otimes \theta_2)}_{\text{paquet cuspidal tempéré de } U(2)} \otimes \theta_3) \end{aligned}$$

où η_* désigne les transferts endoscopiques.
De plus, la classification locale des paquets donne :

* si v est décomposée Π_{ψ_v} est une série principale de $\mathrm{GL}_3(F_v)$

* si v est inerte et $\theta_{1,v} \neq \theta_{2,v}$ et $\theta_{1,v} \neq \theta_{3,v}$ alors Π_{ψ_v} est un paquet supercuspidal de cardinal 4 pour un tel L-paquet Arthur définit

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Pi_{\psi_v} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\wedge}$$

* confère [12] pour les autres cas où v est inerte (i.e. $\theta_{1,v} = \theta_{2,v}$ ou $\theta_{1,v} = \theta_{3,v}$).

Le paquet global Π_ψ est alors défini et Rogawski démontre dans [12] la formule de multiplicité pour $\Pi \in \Pi_\psi$.

C. Cas $\mathfrak{S}_\psi \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Il s'agit du cas le plus intéressant car alors dans certains cas les L-paquets sont plus petits que les A-paquets. Ecrivons $\psi_E = \alpha_1 \oplus \alpha_2$ où $\dim \alpha_1 = 2$ et $\dim \alpha_2 = 1$, α_2 est associé à un caratère θ_2 de $U(1)$.

1er cas. $\alpha_{1|\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = 1$ i.e. α_1 est un L-paramètre tempéré. Alors, il existe une représentation cuspidale tempérée Π_1 de $U(2)$ telle que

$$\varphi_{\Pi_1} = \alpha_1 \, \mu^{-1}$$

et $\{\Pi_1 \otimes theta_2\} = \Pi_{\alpha_1\mu^{-1}\otimes\alpha_2}$ est un L-paquet stable de $U(2) \times U(1)$ de cardinal 1. Et $\Pi_\psi = \eta_{H*}(\Pi_1 \otimes \theta_2)$ est cuspidal tempéré. $\Pi_\psi = \bigotimes_v \Pi_{\psi_v}$ est la classification locale :

* si v est décomposée, $\Pi_{\psi_v} = \{\Pi_{1,v} \boxplus \theta_{2,v}\}$

* si v est inerte :

  – $\Pi_{1,v}$ supercuspicale $\Rightarrow$ $\eta_{H_v*}(\Pi_{1,v} \otimes \mathcal{O}_{2,v})$ est un L-paquet supercuspidal de cardinal 2
  – $\Pi_{1,v}$ série principale
  – $\Pi_{1,v} = \mathrm{St}(\chi_v)$ où χ_v = caractère de $G_v \Rightarrow \eta_{H_v*}(\mathrm{St}(\chi_v) \otimes \theta_{2,v}) = \{\pi^s, \pi^2\}$ où π^s = unique supercuspidale qui n'est pas dans un L-paquet supercuspidal et π^2 est de carré intégrable.

Exemple d'application de la formule de multiplicité :

Si $\Pi_{1,v}$ supercuspidale notons $\eta_{H*}(\Pi_{1,v} \otimes \theta_{2,v}) = \{\pi^+, \pi^-\}$ où $\langle \pi^+, \cdot \rangle = 1$ et $\langle \pi^-, \cdot \rangle = -1$.

Si $\Pi_{1,v}$ = Steinberg posons $\begin{cases} \langle \Pi^2, \cdot \rangle = +1 \\ \langle \Pi^s, \cdot \rangle = -1 \end{cases}$

Alors si $\Pi = \bigotimes_v \Pi_v \in \Pi_\psi$ Rogawsky démontre ([12]) :

$$m(\Pi) = m(\Pi, \psi) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{\#\{v \nmid \infty | \Pi_v = \Pi^s \text{ ou } \Pi_v = \Pi^-\} + \text{termes à l'}\infty}).$$

2ème cas. $\psi_E = \alpha_1 \oplus \alpha_2$ où $\alpha_{1|\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \neq 1$.

α_1 est alors de la forme $\beta_1 \otimes \mathrm{Std}_2$ où $\beta_1 = \overset{\vee}{\gamma}{}_1^c$

$\Rightarrow \beta_1$ est associé à un caractère θ_1 de $U(1)$. De même, $\alpha_2 = \varphi_{\theta_2} \mid \mathcal{L}_E$. Ici $\mathrm{Std}_2 =$ représentation standard de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Description du L-paramètre :

$$\varphi_{\psi_E} = \begin{pmatrix} \beta_1 |\cdot|^{1/2} & & \\ & \beta_1 |\cdot|^{-1/2} & \\ & & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Aut}(\varphi_{\psi_E}) = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ sur lequel $x \mapsto \psi(c)\, x\, \psi(c)^{-1}$ agit via $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (z_2^{-1}, z_1^{-1}, z_3^{-1})$

$\Rightarrow$ $C_{\varphi_\psi} = \mathbb{C}^\times \times \{\pm 1\}$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{S}_{\varphi_\psi} = \{1\}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Le A-paquet est plus gros que le L-paquet !!}}$

Etude du L-paquet. Il est de la forme $\eta_{H*}(\rho)$ (transfert des L-paquets) où ρ est une représentation de dimension 1 de $U(2) \times U(1)$. Si $\varphi_{\theta_1|\mathcal{L}_E} = \mu^{-1}\, \beta_1$ et $\varphi_{\theta_2|\mathcal{L}_E} = \alpha_2$ alors $\rho = (\theta_1 \circ \det) \otimes \theta_2$.

Lemme.(*) *φ_ψ est équivalent à un L-paramètre de ${}^LT$ où $T =$ Levi du Borel de G.*

Démonstration. $\varphi_\psi(c) = \begin{pmatrix} \Phi_2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \Phi_3$ car $\varphi_\psi = \eta_H \circ \varphi_\rho$ avec $\varphi_\rho(c) = 1 \rtimes c$. On vérifie que si $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$g\, \varphi_\psi(c)\, g^{-1} \in {}^LT\,.$$

Or $g \in N_{\hat{G}}(\hat{T}) \Rightarrow g\, \varphi_{\psi_E}\, g^{-1}$ est à valeurs dans ${}^LT$. □

Corollaire. *Si v est une place finie de F*

$$\eta_{H*}^{L\text{-paquets}}(\rho_v) =: \{\Pi^n(\rho_v)\}$$

une série principale p.p. non ramifiée, non tempérée.

Etude du A-paquet. Si v est inerte

$$\eta_{H*}^{A\text{-paquet}}(\rho_v) = \{\Pi^n(\rho_v),\, \Pi^s(\rho_v)\}$$

où $\Pi^n(\rho_v) =$ non tempérée et $\Pi^s(\rho_v) =$ supercuspidale (Rappel : transfert de $\mathrm{St}_{H_v}(\rho_v)$).

A-paquet global : $\Pi_\psi = \{\bigotimes_v \Pi_v\}$ où

* $\forall\, v$ décomposée $\Pi_v = \Pi^n(\rho_v)$

* pour presque tout v, $\Pi_v = \Pi^n(\rho_v)$

* et $\forall\, v$ inerte $\Pi_v \in \{\Pi^n(\rho_v),\, \Pi^s(\rho_v)\}$.

Posons

$$\begin{cases} \Pi_{\psi_v} & \xrightarrow{\sim} & \widehat{\{\pm 1\}} \\ \Pi_v^n & \mapsto & +1 \\ \Pi_v^s & \mapsto & -1 \end{cases}$$

Remarque. Π_ψ est donc infini.

Formule de multiplicité. $\forall\, \Pi \in \Pi_\psi$

$$m(\Pi,\psi) = \frac{1}{2}\left(1 + \underbrace{\varepsilon\left(\frac{1}{2},\, \beta_1\, \mu^{-1}\right)}_{\pm 1 \,\mathrm{car}\, (\beta_1\mu)^\vee = (\beta_1\mu)^c} (-1)^{n(\Pi)}\right) \in \{0,1\}$$

et où $n(\Pi) = \#\{v \mid \Pi_v = \Pi_v^s\} +$ terme à l'∞.

Remarque. $*$ Il y a une erreur dans [12]. La formule des traces stabilisée de [12] ne permet pas de démontrer que lorsque $m(\Pi,\psi) = 1$ alors $\exists$ un tel Π dans le spectre discret

$\to$ l'erreur est corrigée dans "the multiplicity formula for A-packets" de Rogawsky dans [15] en utilisant les séries θ (paire duale $(U(3), U(1))$).

$\to$ le transfert θ est sensé bien se comporter vis à vis des A-paquets (mais pas des L-paquets)

Cuspidalité ou pas de $\Pi \in \Pi_\psi$?

* Si $\exists\, v$ inerte, $v \nmid \infty$, $\Pi_v = \Pi^s(\rho_v)$ alors Π est cuspidale non tempérée car les représentations du spectre résiduel sont non tempérées en toutes les places

* Si $\Pi = \bigotimes_v \Pi^n(\rho_v) = \Pi^n(\rho)$ i.e. est l'élément du L-paquet (de cardinal 1) transfert endoscopique de ρ, d'après le lemme (*) Π est dans le spectre résiduel ssi la série d'Einstein associée à $\begin{pmatrix} \beta_1|\cdot|^{1/2} & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \beta_1|\cdot|^{-1/2} \end{pmatrix}$ possède un pôle. Pour un groupe de rang 1 les pôles sont bien connus. Cela est équivalent à ce que

$$M(s) = \frac{L(s,\, \alpha_2)\, L(2s,\, \beta_1\, \mu^{-1})}{L(1+s,\, \alpha_2)\, L(2s+1,\, \beta_1\, \mu^{-1})}$$

ait un pôle, ce qui est le cas lorsque :

  – soit $\alpha_2 = 1$ et $s = 1$
  – soit $\beta_1 = 1$ et $s = \frac{1}{2}$ et $L\left(\frac{1}{2},\, \alpha_2\right) \neq 0$.

Le corollaire suivant résulte de la formule de multiplicité et de la discussion précédente.

Corollaire. *Si* $L\left(\frac{1}{2},\, \alpha_2\right) \neq 0$ *et* $\varepsilon\left(\frac{1}{2},\, \beta_1\, \mu^{-1}\right) = 1$ *il existe une représentation cuspidale de* $U(3)$ *qui est en toutes les places une série principale non tempérée !*

Il semble que ces représentations soient les plus intéressantes d'un point de vue arithmétique.

5 Contribution des différents paquets à la cohomologie des variétés de Shimura

Désormais G ne désigne plus un groupe unitaire mais un groupe de similitudes unitaires global : $G = \{g \in D^\times / gg^* \in \mathbb{Q}^\times\}$ qui est une forme extérieure de $\mathrm{GL}_3 \times \mathbb{G}_m$. Etant donné un tel groupe il existe un unique morphisme (à conjugaison près)

$$h : \mathbb{S} = \mathbb{C}^\times \to G_\mathbb{R}$$

tel que si

$$\begin{array}{rcl} \mu_h : \mathbb{C}^\times & \to & \mathbb{S}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \xrightarrow{h_{/\mathbb{C}}} G_{/\mathbb{C}} \\ z & \mapsto & (z, 1) \end{array}$$

μ_h composé avec le facteur de similitude est $[z \mapsto z]$, μ_h est minuscule et

$$K_\infty = \{g \in G(\mathbb{R}) \mid gh(i) = h(i)g\}$$

est une forme compacte modulo le centre de $G(\mathbb{R})$. Nous renvoyons à [6]. Le choix de h est équivalent à celui de μ_h qui est équivalent à celui d'une famille de signatures pour le groupe unitaire à l'infini. Soit $(\mathrm{Sh}_K)_{K \subset G(\mathbb{A}_f)}$ la variété de Shimura associée :

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) \simeq G(\mathbb{Q}) \backslash (G(\mathbb{R})/K_\infty \times G(\mathbb{A}_f)/K)$$

un espace de modules de variétés abéliennes A à isogénie près munies d'une action par isogénies de D, $\iota : D \to \mathrm{End}(A)_\mathbb{Q}$, d'une polarisation à isogénie près $\lambda : A \to A^\vee$ et d'une structure de niveau K, $\eta : D^{\mathrm{opp}} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{A}_f \xrightarrow{\sim} H_{1,\text{ét}}(A,\, \mathbb{A}_f) \mod K$ (où le $\mod K$ signifie que le π_1 de la base agit sur $H_{1,\text{ét}}$ via η par automorphismes à valeurs dans K) le tout vérifiant certaines conditions de compatibilité (l'involution $*$ correspondant via ι à l'involution de Rosatti associée à λ, par exemple) et tels que l'action du corps C.M. E sur Lie (A) (un $E \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{C} \simeq \prod_{\tau : E_C \backslash \mathbb{C}} \mathbb{C}$ module) soit fixée au sens où le rang (comme module cohérent localement libre sur la base sur laquelle vit A) de l'espace propre associé à un plongement $\tau : E \hookrightarrow \mathbb{C}$ soit fixé par μ_h.

Remarque. Lorsque $D = M_3(E)$ l'espace de module classifie (via l'équivalence de Morita $A \mapsto \varepsilon A$ où $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ des variétés abéliennes munies d'une action de E).

Hypothèse. Nous supposerons, pour simplifier, que G est anisotrope modulo son centre ce qui implique que Sh_K est propre. Le cas des termes aux bords est traité dans [15] pour $F=\mathbb{Q}$. A μ est associée une représentation r_μ de ${}^LG_{E(G,X)}$. Par exemple si $F=\mathbb{Q}$ et $\mu(z)=(z,z,1)$, r_μ est la représentation standard. On sait alors (comptage de points à valeurs dans un corps fini de modèles entiers lisses en niveau hyperspécial des Sh) (cf. [6] et [15]) démontrer que pour $\Pi\in\Pi_\psi$

$$\sum_i(-1)^iH^i(\mathrm{Sh})[\Pi_f]=a(\Pi_f)(r_\mu\circ\psi_{|E(G,X)})\,.$$

Reste à séparer les poids grâce aux poids de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Problème. Des éléments du même A-paquet Π_ψ peuvent intervenir dans des degrés distincts. Comment les séparer ? La réponse est donnée dans [7] en utilisant la théorie des paramètres d'Arthur cohomologiques à l'infini (bien sûr le résultat est également dans [15] mais "caché"). La recette est la suivante :

Recette. $r_\mu\circ\psi$ possède une action du groupe (abélien ici) $\mathfrak{S}_\Psi$. Cette action permet de distinguer les éléments de Π_ψ dans $H^\cdot(\mathrm{Sh})$. Traitons par exemple le cas de $\Pi_\psi=\eta_{H*}(\rho)$ où $\dim\rho=1$ (dernier cas étudié) avec ρ unitaire et la variété de Picard (il s'agit d'une surface non compacte donc, $H^\cdot$ est remplacé ici par $\mathbb{H}^\cdot$). Alors,

$$\mathfrak{S}_\psi\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\left\{\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}\right\}\quad\mathrm{mod}\ \pm I_3\,.$$

$$\varphi_{\psi_E}=\underbrace{\overbrace{\beta_1|\cdot|^{1/2}}^{\text{degré}\,3}\oplus\overbrace{\beta_1|\cdot|^{-1/2}}^{\text{degré}\,1}}_{\mathfrak{S}_\psi\text{ agit via }-1}\oplus\underbrace{\overbrace{\alpha_2}^{\text{degré médian : }2}}_{\mathfrak{S}_\psi\text{ agit via }+1}$$

(ici $|\cdot|=$ caractère cyclotomique (remplacer $\mathbb{C}$ par $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ dans ${}^LG$)) on peut en déduire que $H^\cdot(\mathrm{Sh})[\Pi^s(\rho)_f]$ va contribuer via α_2 et $H^\cdot(\mathrm{Sh})[\Pi^n(\rho)_f]=\beta_1|\cdot|^{1/2}\oplus\beta_1|\cdot|^{-1/2}$ i.e.

$$H^i(\mathrm{Sh})[\Pi^s(\rho)_f]=\begin{cases}0&\text{si } i\neq 2\\ \alpha_2&\text{sinon}\end{cases}$$

$$H^i(\mathrm{Sh})[\Pi^n(\rho)_f]=\begin{cases}0&\text{si } i\neq 1,3\\ \beta_1|\cdot|^{1/2}&\text{si } i=3\\ \beta_1|\cdot|^{-1/2}&\text{si } i=1\end{cases}$$

Le cas stable. On suppose que $\exists\,v\nmid\infty\ G(F_v)=D_v^\times$. Alors Sh est compacte et les groupes endoscopiques *mathcalR* sont tous nuls : il n'y pas d'endoscopie.

Soit $\Pi\in\Pi_{\mathrm{aut}}(G)$ telle que Π_f intervienne dans $H^\cdot(\mathrm{Sh})$. Soit $v_0\nmid\infty$ telle que Π_{v_0} soit non ramifiée. Notons $E(G,X)$ le corps réflexe et p tel que $v_0\mid p$, $\nu\mid p$ une place de $E(G,X)$

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_\nu^i\times f^{v_0};H^\cdot(\mathrm{Sh}))\\=&\sum_{\substack{\gamma_0\in G(\mathbb{Q})/\sim\text{ stable}\\ \text{elliptique ds }G(\mathbb{R})}}\ \sum_{\substack{\gamma,\delta\\ N\delta\underset{\text{st.}}{\sim}\gamma_0\\ \gamma\underset{\text{st.}}{\sim}\gamma_0}}\mathrm{cst.}\times\underbrace{\alpha(\gamma_0,\gamma,\delta)}_{1\text{ car ici }R=1}\mathrm{TO}_\delta(\phi_i)\,\mathrm{SO}_\gamma(f^{v_0})\end{aligned}$$

ici γ = Frob. hors v_0 et δ = Frobenius cristallin en p, $N\delta$ = Norme de δ = Frob. usuel en p.

Les nombres de Weil des variétés abéliennes $/\mathbb{F}_q$ associés via la théorie de Honda-Tate sont définis modulo $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ c'est pourquoi il faut considérer la conjugaison stable pour γ_0

$$\Phi_i = \mathbb{1}_{G(W(\mathbb{F}_{p^{ij}}))\mu(p)G(W(\mathbb{F}_{p^{ij}}))}$$

et donc $\mathrm{TO}_\delta(\Phi_i)$ compte des cristaux.

La stabilisation de l'expression précédente (il faut utiliser le lemme fondamental pour BC qui associe à Φ_i une fonction transférée $\tilde{\Phi}_i \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{S}_p))$ telle que $\mathrm{TO}_\delta(\phi_i) = \mathrm{O}_{N\delta}(\tilde{\Phi}_i)$) fournit

$$\sum_{\gamma_0} \mathrm{vol}(-)\, \mathrm{O}_{\gamma_0}(\tilde{\Phi}_i \otimes f^{v_0})\,.$$

La formule des traces de Lefschetz topologique sur $\mathrm{Sh}(\mathbb{C})$ fournit quant-à elle

$$\mathrm{tr}(\tilde{\Phi}_i \otimes f^{v_0}; H^{\cdot}(\mathrm{Sh}(\mathbb{C}))) = \text{ expression précédente.}$$

On a maintenant

Théorème. (Kottwitz, [8])

$$\mathrm{tr}_{\Pi_p}(\tilde{\Phi}_i) = \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_\gamma^i; r_\mu \circ \varphi_{\Pi_p})$$

où φ_{Π_p} *désigne le paramètre de Satake de* Π_p.

Ce qui permet de conclure.

Indications sur le cas non-stable. (cf. [7]) Une des difficultés vient de ce que l'invariant de Kottwitz $\alpha(\gamma_0, \gamma, \delta)$ est différent de celui mesurant l'instabilité dans la formule des traces ($\alpha(\gamma_0, \gamma, \delta)$ est non trivial sur $Z(\hat{G})$ en p et à l'infini) et il faut utiliser la théorie des fonctions d'Euler Poincaré à l'infini.

References

[1] J. Arthur, On some problems suggested by the trace formula.

[2] J. Arthur, Unipotent automorphic representations: conjectures.

[3] J. Arthur, Unipotent automorphic representations: global motivations.

[4] M. Borovoi, Abelian Galois cohomology of reductive groups, *Mem. of the AMS*, **626**.

[5] R.E. Kottwitz, Stable trace formula: cuspidal tempered terms, *Duke* vol. 51, n. 3.

[6] R.E. Kottwitz, Points on some Shimura varieties over finite fields, *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992).

[7] R.E. Kottwitz, Shimura varieties and λ-adic representations, *dans* Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Ann Arbor.

[8] R.E. Kottwitz, Shimura varieties and twisted orbital integrals, *Math. Ann.* **269** (1984).

[9] J.P. Labesse, Cohomologie, stabilisation et changement de base, *Astérisque.*

[10] R.P. Langlands, Les défauts d'une formule des traces stables.

[11] R.P. Langlands, Stable conjugacy: definitions and lemma.

[12] Jonhatan D. Rogawski, Automorphic representations of unitary groups in three variables, *Annals of Math. Studies.*

[13] Jonhatan D. Rogawski, The multiplicity formula for A-packets, *dans* The Zeta Function of Picard Modular Surfaces (CRM).

[14] J.J. Sansuc, Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres.

[15] The Zeta Function of Picard Modular Surfaces, (CRM) éditeurs : R.P. Langlands et D. Ramakrishnan.

Laurent Fargues
laboratoire de mathématiques d'Orsay/CNRS
e-mail : fargues@math.u-psud.fr