La v-topologie

Def. $X \xrightarrow{f} Y$ est un recouvrement pour la v-topologie si $\forall V$ ouvert qc. de Y $\exists U$ ouvert qc de X tq. $f(U) = V$.

↳ pour éviter $\coprod_{x \in X} \mathrm{Spa}(k(x), k(x)^+) \to X$ pas v-rec.

ou $X \setminus \{x\} \coprod \mathrm{Spa}(K(x), K(x)^+) \to X$

Ex. f q.c. surjectif

Th. Les objets suivants satisfont la descente pour la v-topologie :

(1) Les morphismes étales séparés

(2) Les morphismes étales finis

(3) Les fibrés vectoriels

Rem: (3) $\Rightarrow$ (2) car morphisme étale fini = fibré vectoriel + structure de $\mathcal{O}$-algèbre $\mathcal{A}$ tq. $\mathrm{tr}: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{O}_X$ soit parfait.

* (1) $\Rightarrow$ résultat de structure des $\underline{G}$-torseurs où G = loc. profini.

$$\begin{array}{c} T \\ \big\downarrow \; \underline{G}\text{-torseur pour la v-topologie (ou la top. pro-étale)} \\ X \end{array}$$

Alors $K \backslash T$ représentable par un espace perfectoïde étale séparé

$$\begin{array}{c} K\backslash T \\ \downarrow \\ X \end{array} \qquad T = \varprojlim_{K} K\backslash T$$

ss.gp. compact ouvert

$\Rightarrow$ étale localement T a une réduction à un ss.gp. compact ouvert.

* Par déf. un fibré vect. $/X$ = $\mathcal{O}_X$-mod. loc. libre.

Kedlaya-Liu : $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ avec A alg. de Banach stablement uniforme

$\Downarrow$

X faisceautique i.e. le préfaisceau de Huber est un faisceau

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Fib.}/X \xrightarrow[\sim]{H^0(X,-)} A\text{-Mod. proj. de t.f.} \\ M \otimes_A \mathcal{O}_X \longleftarrow\!\shortmid M \end{array} \right.$$

Point clef de ces théorèmes

Prop : $f : Y \longrightarrow X$ morphisme entre aff. perfectoïdes
$Y = \mathrm{Spa}(B, B^+)$, $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ avec X totalement disconnexe.

Alors (1) B^+/ϖ est plat sur A^+/ϖ

(2) Si f est surjectif (i.e. est un v-recouvrement)
alors B^+/ϖ est fidèlement plat sur A^+/ϖ.

dém : (1) $\Rightarrow$ (2) En effet

$\mathrm{Sp} : \mathrm{Spa}(R, R^+) \xrightarrow{\tau^\circ} \mathrm{Spec}(R^+/\varpi)$ surjectif spécialisant

$x \leadsto R^+/\varpi \longrightarrow k(x)^+/\varpi \leadsto \mathrm{Spec}(k(x)^+/\varpi) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R^+/\varpi)$

un point fermé
$k(x)^+$ = anneau de valuation $\Rightarrow$ local

point fermé de $\mathrm{Spec}(k(x)^+/\varpi) \mapsto \mathrm{Sp}(x)$.

Ex: $\ast$ U ouvert de $\mathrm{Spec}(R^+/\varpi)$

$sp^{-1}(U) =$ tube au dessus de U

$sp^{-1}(D(\bar{f})) = \{|f| \leq 1\}$ $\quad f \in R^+,\ \bar{f} \in R^+/\varpi$

$\ast$ $Z \subset \mathrm{Spec}(R^+/\varpi)$ fermé

$\overset{\circ}{\overline{sp^{-1}(Z)}} =$ tube au dessus de Z.

f surjectif + sp surjectif $\Rightarrow \mathrm{Spec}(B^+/\varpi) \xrightarrow{\text{surjectif}} \mathrm{Spec}(A^+/\varpi)$.

Preuve de (1):

Lemme: $T =$ espace topologique profini

$\mathcal{A} =$ faisceau d'anneaux$/T$

$\mathcal{M} =$ faisceau de $\mathcal{A}$-modules$/T$

Si $\forall t \in T$ $\mathcal{M}_t$ est un $\mathcal{A}_t$-module flat

alors $\mathcal{M}(T)$ est un $\mathcal{A}(T)$-module plat

dém: Faisceaux de $\mathcal{A}$-mod. $\xrightarrow{\sim}$ $\mathcal{A}(T)$-modules

$\mathcal{M} \longmapsto \mathcal{M}(T)$

$\mathcal{M} \longleftarrow\!\shortmid\ M$

$\hookrightarrow$ tq. $\mathcal{M}(U) = e_U . M$

si $U \subset T$ ouvert/fermé

(o/f = base de la top. de $T \Rightarrow$ suffit de définir un faisceau dessus)

$\mathcal{A}(T) \overset{\sim}{=} \mathcal{A}(U) \times \mathcal{A}(T \setminus U)$

$e_U \leftrightarrow (1, 0)$

$N = \mathcal{A}(T)$ - module pour $\mathcal{N}$ = faisceau de $\mathcal{A}$-modules associé

$$\forall t \in T, \varinjlim_{\substack{\bar U \ni t \\ o/f.}} \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{A}(U)}(\mathcal{M}(U), \mathcal{N}(U)) = \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{A}_t}(\mathcal{M}_t, \mathcal{N}_t) = 0 .$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{A}(T)}(\mathcal{M}(T), \mathcal{N}(T)) \quad \exists U \text{ voisi. de } x \text{ tq.}$$

$$x_{|\bar U} = 0 \in \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{A}(U)}(\mathcal{M}(U), \mathcal{N}(U)).$$

T q.c. + tout recouvrement est scindé car T profini

$$\Rightarrow T = \coprod_i \bar U_i \qquad x_{|\bar U_i} = 0 \in \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{A}(U_i)}(\mathcal{M}(U_i), \mathcal{N}(U_i))$$

$$\mathcal{A}(T) = \prod_i \mathcal{A}(U_i)$$

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{A}(T)}(\mathcal{M}(T), N) = \prod_i \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{A}(U_i)}(\mathcal{M}(U_i), \mathcal{M}(U_i)). \quad \square$$

<u>Preuve de la platitude :</u> $Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{\pi} \pi_0(X)$

$$\mathcal{A} = (\pi_* \mathcal{O}_X^+)/\varpi$$

$$\mathcal{M} = (\pi_* f_* \mathcal{O}_Y^+)/\varpi$$

$\forall c \in \pi_0(X)$ $\quad \pi^{-1}(c) = \mathrm{Spa}(K, K^+)$ car X tot. disc.

anneau de valuation

$$A_c = K^+/\varpi$$

$$M_c = \underbrace{\left(\pi_* f_* \mathcal{O}_Y^+\right)_c}_{\text{sans } \varpi\text{-torsion}} / \varpi$$

$\Rightarrow$ M_c flat sur A_c.

$\Rightarrow$ $M(\pi_0(X))$ flat sur $A(\pi_0(X))$ $\square$

$$\begin{array}{ccc} M(\pi_0(X)) & & A(\pi_0(X)) \\ \parallel & & \parallel \\ B^+/\varpi & & A^+/\varpi \end{array}$$

car pas de H^1 sur $\pi_0(X)$.

$\parallel$

$$H^0(-/\varpi) = H^0(-)/\varpi.$$

4B

Application :

* [$\mathcal{O} : X \mapsto \mathcal{O}(X)$ est un faisceau sur Perf + v-topologie]

$\rightarrow$ Suffit de montrer que $\forall X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ aff. perf. $\mathcal{O}|_{\mathrm{Perf}_X}$ est un faisceau. $\varpi \in A^{\circ\circ} \cap A^*$ p.u.

* Suffit de montrer que $\mathcal{O}^+/\varpi$ est un faisceau sur Perf_X.

Car $\mathcal{O} = \mathcal{O}^+\left[\frac{1}{\varpi}\right]$ et $\mathcal{O}^+ = \varprojlim_{N \geq 1} \mathcal{O}^+/\varpi^N$.

* On sait (cf. 1er article sur les Perfectoïdes) que $\mathcal{O}$ et donc $\mathcal{O}^+$ sont des faisceaux étales $\Rightarrow \mathcal{O}^+/\varpi$ faisceau étale

Or si $\nu : X_{\text{pro-et}} \to X_{\text{et}}$ (gros sites)

$$\left(\mathcal{O}_X^+/\varpi\right)_{\text{pro-et}} = \nu^*\left(\mathcal{O}_X^+/\varpi\right)_{\text{et}}$$

$\Rightarrow \mathcal{O}^+/\varpi$ = faisceau pro-étale sur Perf_X.

* On peut donc supposer X totalement discontinu car il l'est pro-étale localement.

$Y \xrightarrow{f} X$ v-recouvrement. On peut supposer Y aff. perf.

$\downarrow$

quitte à remplacer Y par $\coprod_{\text{finie}}$ d'ouverts aff. perf. de Y.

Il suffit alors d'appliquer le résultat B^+/ϖ fid. plat $/ A^+/\varpi$.

* Raisonnement $\widehat{\pi}$ $\Rightarrow$ si Y/X est un v-recouvrement avec X aff. perfectoïde alors $\exists\, Y'/Y$ un v-recouvrement tq. $\forall i>0$ $\check{H}^i(Y'/X, \mathcal{O}^+/\varpi)^a = 0$

car $(B \hat{\otimes}_A B)^+ \overset{a}{=} (B^+ \hat{\otimes}_{A^+} B^+)$

presque

$\Rightarrow \forall i>0$ $\check{H}^i(Y'/X, \mathcal{O}^+)^a = 0$

$\Rightarrow \forall i>0$ $\check{H}^i(Y'/X, \mathcal{O}) = 0$.

Donc $\forall X$ aff. perf. « $H^i_v(X, \mathcal{O}^+_X)^a = 0$ »

v-topologie

n'a pas de sens car pb. théorie des ensembles.

* $\mathcal{O}$-faisceau $\Rightarrow$ facilement que la v-topologie est très canonique

i.e. tout espace perfectoïde est un v-faisceau.

* $X \in$ Perf. $\mathcal{V}$ = fibré vectoriel $/X$ nous définit un v-faisceau

$$\mathcal{V}(Y) = \Gamma(Y, f^*\mathcal{V}) \text{ si } f : Y \to X.$$

Descente des fibrés vectoriels

Th: Y/X v-recouvrement

$\mathrm{Fib}_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fib}_Y$ + donnée de descente relativement à Y/X

* On peut supposer X aff. perf.

* Hom internes dans la cat. des fibrés
 + fibrés définissent des faisceaux pour la v-top.
 $\Rightarrow$ foncteur pleinement fidèle

~~Fib, Hom~~ $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \Gamma(X, \mathcal{H}om(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2))$
$= \check{H}^0(Y/X, \mathcal{H}om(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2))$

* On peut donc remplacer Y par une $\coprod_{\text{finie}}$ d'ouverts affinoïdes
 $\Rightarrow$ on peut supposer Y aff. perf.

$$\begin{array}{c} Y = \mathrm{Spa}(B, B^+) \\ \downarrow \\ X = \mathrm{Spa}(A, A^+) \end{array}$$

Donnée de descente $\in GL_n(B) \backslash GL_n(B \hat{\otimes}_A B) / GL_n(B)$

1^{er} Cas : Le cas $A = K$ corps perfectoïde

Prop : K corps valué complet B = K-alg. de Banach

$$\{K\text{-e.v. de dim finie}\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{l} B\text{-modules projectifs de t.f. } M + \text{ iso. de } B\hat{\otimes}_K B\text{-mod.} \\ \text{donnée descente } M\hat{\otimes}_K B \simeq B\hat{\otimes}_K M \\ \text{satisfaisant la condition de cocycle usuelle} \end{array}\right\}$$

Lemme : $C^\bullet$ = complexe de K-Banach
W = K-Banach

$C^\bullet$ exacte $\Leftrightarrow$ $C^\bullet \hat{\otimes}_K W$ exacte.

dem. * Si $W \simeq \mathcal{C}_0(I, K)$ = suites indexées par I tendant vers 0 + norme sup.

ensemble

$V \hat{\otimes} W = \mathcal{C}_0(I, W)$ $\quad i_0 \in I$ fixé $\mathcal{C}_0(I,K) = \mathcal{C}_0(I \setminus \{i_0\}, K) \oplus K$

$\Rightarrow$ $C^\bullet$ facteur direct dans $C^\bullet \hat{\otimes}_K W \Rightarrow$ O.K.

c'est le cas si K sphériquement complet pour tout Banach.

faux en général.

* BGR : Si $\exists (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ suite de W tq. $\overline{W = \mathrm{Vect}(v_i)_{i \in \mathbb{N}}}$

alors c'est vrai $\simeq \mathcal{C}_0(\mathbb{N}, K)$

* $W = \varinjlim_{i \in I} W_i$ du type précédent

pas de Banach, juste d'e.v.

$$W \hat{\otimes}_K V = \varinjlim_{i \in I} W_i \hat{\otimes}_K V + \text{Closure}$$

le $\hat{\otimes}$ ne fait intervenir que des limites de $\sum_j w_j \otimes v_j$ (j fini) $\square$

M = B-module projectif + donnée de descente
$u : M \hat{\otimes}_K B \xrightarrow{\sim} B \hat{\otimes}_K M$

$V = \{ m \in M \mid u(m \otimes 1) = 1 \otimes m \}$

<u>Montrer:</u> $V \hat{\otimes}_K B \xrightarrow{\sim} M$

Par déf $0 \to V \to M \rightrightarrows M \hat{\otimes}_K B$

$\Rightarrow 0 \to V \hat{\otimes}_K B \to M \hat{\otimes}_K B \rightrightarrows M \hat{\otimes}_K B \hat{\otimes}_K B$ exacte

De plus $0 \to K \to B \rightrightarrows B \hat{\otimes}_K B$ est exacte car homotope à 0
$b \mapsto b \otimes 1 - 1 \otimes b$ après $- \hat{\otimes}_K B$
+ lemme précédent

$\Rightarrow 0 \to M \to M \hat{\otimes}_K B \rightrightarrows M \hat{\otimes}_K B \hat{\otimes}_K B$ exacte

Il suffit maintenant d'identifier (utiliser la condition de cocycle)

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & V \hat{\otimes}_K B & \to & M \hat{\otimes}_K B & \rightrightarrows & M \hat{\otimes}_K B \hat{\otimes}_K B \\
& \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
0 \to & M & \to & M \hat{\otimes}_K B & \rightrightarrows & M \hat{\otimes}_K B \hat{\otimes}_K B
\end{array} \quad \square$$

Rem : Cela redémontre déjà la théorie de Sen :

K perfectoïde $C = \widehat{\overline{K}}$

$$\mathrm{Spa}(C) \times_{\mathrm{Spa}(K)} \mathrm{Spa}(C) = \underline{\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)}_{\mathrm{Spa}(C)}$$

$\Rightarrow$ donnée de descente = action semi-linéaire sur un C-e.v.

Vect_K de dim. finie $\xrightarrow{\sim}$ Vect_C de dim. finie + action semi-linéaire c° de $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$.

Cas général : $[C] \in {}_{GL_n(B)}\backslash GL_n(B \hat{\otimes}_A B) / GL_n(B)$ donnée de descente (avec $C \in GL_n(B \hat{\otimes}_A B)$)

$$\begin{array}{c} Y = \mathrm{Spa}(B, B^+) \\ \downarrow f \\ x \in X = \mathrm{Spa}(A, A^+) \end{array}$$

$B_x := B \hat{\otimes}_A K(x)$

$[C_x] \in {}_{GL_n(B_x)}\backslash GL_n(B_x \hat{\otimes}_{K(x)} B_x) / GL_n(B_x)$

$\shortparallel$

classe triviale d'après cas d'un corps.

$\Rightarrow C_x = D_1 D_2 \quad D_1, D_2 \in GL_n(B_x)$

$$B_x = \left(\varinjlim_{U \ni x} B^+ \otimes_{A^+} \mathcal{O}(U)^+ \right)^\wedge \left[\frac{1}{\varpi}\right] \qquad \varpi = \text{p.u. de } A$$

$\Rightarrow$ Quitte à remplacer X par un vois. aff. perf. de x

7

On peut supposer qu'il existe

$\tilde{D}_1, \tilde{D}_2 \in GL_n(B)$ tq. $\forall i = 1,2$ on ait

$$\begin{cases} \tilde{D}_{1,x}^{-1} D_1 \in Id + \varpi M_n(B_x^+) \\ D_2 \tilde{D}_{2,x}^{-1} \in Id + \varpi M_n(B_x^+) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ quitte à remplacer c par $\tilde{D}_1^{-1} c \tilde{D}_2^{-1}$ on peut

supposer que $\boxed{c_x \in Id + \varpi M_n(B_x^+)}$

Si $c = Id + \varpi (c_{ij})_{i,j}$ $\quad c_{ij} \in B$

et $V = \{|c_{ij}| \leq 1\} \subset Y = Spa(B, B^+)$

$$Y = Spa(B,B^+) \xrightarrow{f} X = Spa(A, A^+)$$

$Spa(B_x, B_x^+) = Y_{k(x), k(x)^+}$, $|Y_{k(x),k(x)^+}| = f^{-1}(X^{\ni x})$

$$= \bigcap_{U \ni x} f^{-1}(\bar{U})$$

$\bigcap_{U \ni x} f^{-1}(\bar{U}) \subset V \Rightarrow \bigcap_{U \ni x} f^{-1}(\bar{U}) \cap (Y \setminus V) = \phi$

pro-const. car V = ouvert qc.

Compacité de Y/Cons $\Rightarrow$ $\exists U$ voisinage de x tq. $f^{-1}(\bar{U}) \subset V$.

i.e. on peut supposer, quitte à remplacer X par $\bar{U}$,

que $C \in \underbrace{Id + \varpi M_n(B^+)}_{\substack{\text{filtré par les } (Id+\varpi^k M_n(B^+))_{k\geq 1} \\ \text{gradués } = M_n(B^+/\varpi)}}$.

$\Rightarrow \check{H}^1(Y/X, Id+\varpi M_n(\mathcal{O}^+))$ se dévisse en les

$\check{H}^1(Y/X, M_n(\mathcal{O}^+)) \overset{a}{=} 0$ si Y/X = composé de

presque

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] & Y' \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

v. recouvrement   tot. disc.   pro-étale surjectif

Ce qu'on peut supposer quitte à remplacer Y/X par $Y \times_X \tilde{X}/X$

avec $\tilde{X} = X^{\mathrm{wl}}$.

En choisissant ϖ' tq. $\varpi \in A^{\circ\circ}\varpi'$ on voit alors que

$\check{H}^1(Y/X, Id+\varpi M_n(\mathcal{O}^+)) \to \check{H}^1(Y/X, Id+\varpi' M_n(\mathcal{O}^+))$

est trivial $\square$

Application à la descente des fibrés / Courbe

$\boxed{\underline{\text{Th}}: \mathrm{Bun}_{GL_n} \text{ est un v-champ.}}$

$\underline{\text{dem}}$. * $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ $\quad X_S = Y_S/\varphi^{\mathbb{Z}}$

$\Rightarrow$ fibrés $/X_S$ = Fibrés φ-éq. sur Y_S

$\Rightarrow$ Il suffit de montrer que $S \mapsto$ groupoïde des fibrés $/Y_S$ est un v-champ.

* $C = \hat{\bar{E}}$. Rappel: $Y_S \hat{\otimes}_E C$ perfectoïde.

$\exists$ section E-linéaire $\varepsilon : C \to E$ de l'inclusion $E \hookrightarrow C$

$\nwarrow$ $\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_E$ sans π-torsion $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_E \underset{\uparrow \mathcal{O}_E\text{-mod.}}{\simeq} \mathcal{C}_0(I, \mathcal{O}_E)$

$\underline{\text{Prop}}$: A = E-alg. de Banach

A-mod. projectifs de type fini $\xrightarrow{\sim}$ $A \hat{\otimes}_E C$-modules proj. de t.f. M

$+ \; u : M \to M$ A-linéaire satisfaisant $\forall \lambda \in C \quad u(\lambda m) = \varepsilon(\lambda) u(m)$.

$$N \longmapsto M = N \hat{\otimes}_E C \quad \text{et } u = \mathrm{Id} \otimes \mathcal{E}$$

$$u(M) \longleftarrow (M, u)$$

$\longrightarrow$ facile.

$$* \begin{array}{c} T \\ \downarrow {\scriptstyle v\text{-recouvrement}} \\ S \end{array} \qquad \left(\begin{array}{l} Y_S^\diamond = S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond \\ Y^\diamond_{T \times_S T} = Y^\diamond_T \times_{Y^\diamond_S} Y^\diamond_T . \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c} Y_T \hat{\otimes}_E C \\ \downarrow {\scriptstyle v\text{-recouvrement}} \\ Y_S \hat{\otimes}_E C \end{array} \qquad Y_{T \times_S T} \hat{\otimes} C = (Y_T \hat{\otimes} C) \times_{Y_S \hat{\otimes} C} (Y_T \hat{\otimes} C)$$

$\Longrightarrow$ si $\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_{Y_T}$ + donnée de descente alors $\mathcal{E} \hat{\otimes}_E C$ muni d'une donnée de descente / rec. $Y_T \hat{\otimes}_E C / Y_S \hat{\otimes}_E C$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{E} \hat{\otimes}_E C$ descend à $Y_S \hat{\otimes}_E C$

On conclut avec la prop. précédente $\square$

$\hookrightarrow$ $\mathcal{E}' / Y_S \hat{\otimes} C$ le descendu de $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E} \hat{\otimes}_E C \xrightarrow{u} \mathcal{E}$$

$\leftarrow$ à valeurs dans $\mathcal{E}'$.