Université Denis Diderot Paris 7, Semestre septembre 2015-janvier 2016

Master 1, cours d'algèbre

(M. Hindry, J-F. Mestre et R. Mneimné)

Examen du 13 janvier 2016 (durée : 3 heures).

Les trois exercices et le problème sont indépendants. Comme d'habitude, on appréciera la clarté de la rédaction et des explications ; les documents (cours et TD) sont autorisés.

Exercice 1 (Groupes et théorèmes de Sylow) Soit G un groupe de cardinal $N = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. On se propose de montrer que G est résoluble. On note $\mathcal{S}(G)$ le groupe symétrique de G (isomorphe à $\mathcal{S}_{210}$).

1.a) L'action de G sur lui-même par translation induit un homomorphisme

$$\rho : G \to \mathcal{S}(G).$$

Calculer la signature de l'image d'un élément d'ordre 2.

1.b) Montrer que G possède un sous-groupe distingué H de cardinal $M = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. [Indication : on pourra montrer que $H := \operatorname{Ker}(\epsilon \circ \rho)$ convient, où $\epsilon : \mathcal{S}(G) \to \{\pm 1\}$ désigne l'homomorphisme signature.]

1.c) Soit H un groupe de cardinal $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Montrer que H contient un sous-groupe distingué de cardinal 5 ou 7.

1.d) Conclure, en montrant qu'il existe des sous-groupes

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset G_4 = G$$

tels que $G_{i-1} \lhd G_i$ et $G_i/G_{i-1} \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (avec $p = 2, 3, 5$ ou 7).

Exercice 2. (Anneaux)

2.a) Lesquels des anneaux suivants sont intègres, factoriels, principaux ?

$$A_1 = \mathbf{Z}[i],\ A_2 = \mathbf{Z}[X, Y],\ A_3 = \mathbf{Q}[X, Y]/(XY).$$

2.b) Montrer que l'anneau $B = \mathbf{Q}[X, Y]/(XY - 1)$ est principal.
[Indication : on pourra montrer qu'il s'identifie à l'anneau des fractions rationnelles dont les éléments non nuls s'écrivent $f(X) = P(X)X^n$, avec $n \in \mathbf{Z}$ et P polynôme tel que $P(0) \neq 0$, et montrer que la fonction $\delta(f) = \deg P$ permet de définir une division euclidienne dans l'anneau B.]

Exercice 3. (Modules sur un anneau principal)

3.a) Soit M un A-module, où A est un anneau principal. Si $a \in A$, on définit le sous-module $M[a] := \{m \in M \mid am = 0\}$. On suppose que $\text{pgcd}(a, b) = 1$; montrer que $M[ab] = M[a] \oplus M[b]$.
[Indication : penser au théorème de Bézout.]

3.b) On suppose maintenant que $A = K[X]$ et M est un K-espace vectoriel muni d'une structure de $K[X]$-module par un K-endomorphisme u. On suppose que le polynôme minimal de u s'écrit $P_1 \cdot P_2$ avec des polynômes P_1 et P_2 premiers entre eux. Montrer que l'on peut écrire $M = M_1 \oplus M_2$ comme somme directe de deux sous-espaces vectoriels stables par u, de sorte que, pour $i = 1, 2$, le polynôme minimal de u_{M_i} (l'endomorphisme de M_i induit par u) soit égal à P_i.

Problème (Extensions de corps et théorie de Galois)

Soit $\zeta := \exp(2\pi i/5)$ et $\alpha = \sqrt[5]{3}$, et $K = \mathbf{Q}(\zeta, \alpha)$.

4.a) Donner le polynôme minimal sur $\mathbf{Q}$ de ζ et α. En déduire la valeur de $[K : \mathbf{Q}(\zeta)]$ puis $[K : \mathbf{Q}(\alpha)]$ et enfin $[K : \mathbf{Q}]$.

4.b) Montrer que $K/\mathbf{Q}$ est une extension galoisienne. On note G son groupe de Galois; quel est son cardinal ?

4.c) On note H_1 le sous-groupe de G correspondant à $K_1 = \mathbf{Q}(\zeta)$ et H_2 celui correspondant à $K_2 = \mathbf{Q}(\alpha)$. Vérifier que H_1 (resp. H_2) est un 5-sous-groupe de Sylow de G (resp. un 2-sous-groupe de Sylow). Montrer de plus que H_1 est l'unique 5-sous-groupe de Sylow de G, alors qu'il y a cinq 2-sous-groupes de Sylow.

4.d) Montrer que, pour $a \in (\mathbf{Z}/5Z)^\times$ il existe $\tau_a \in G$ tel que $\tau_a(\alpha) = \alpha$ et $\tau_a(\zeta) = \zeta^a$. Montrer de même qu'il existe $\sigma \in G$ tel que $\sigma(\alpha) = \zeta\alpha$ et $\sigma(\zeta) = \zeta$.

4.e) Montrer que σ engendre H_1, que $H_2 = \{\tau_a \mid a \in (\mathbf{Z}/5Z)^\times\}$ et que $\tau_a \sigma \tau_a^{-1} = \sigma^a$.

4.f) En déduire que G est isomorphe au groupe de la droite affine sur $\mathbf{F}_5$ (ou encore au produit semi-direct tautologique de $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ par $\text{Aut}(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}) = (\mathbf{Z}/5Z)^\times$).

4.g) Montrer que le groupe G possède cinq sous-groupes d'ordre 4, un seul sous-groupe d'ordre 5, un seul sous-groupe d'ordre 10. Combien de sous-groupes d'ordre 2 existe-t-il dans G ?

4.h) Déterminer la liste des sous-extensions $F \subset K$ (on pourra en particulier observer que $\mathbf{Q}(\zeta + \zeta^{-1}) = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$).