Université Denis Diderot Paris 7, Semestre septembre 2006-janvier 2007

Master 1, math-info, cours d'algèbre

(M. Hindry et C. Armana)

Partiel du 7 novembre 2006 ; durée : 3 heures.

Le problème et les exercices sont indépendants. Les groupes et ensembles sont tous supposés finis.

Exercice 1

1.a) Soit G un groupe possédant m (exactement) p-sous-groupes de Sylow. En faisant agir G sur ces sous-groupes, en déduire un homomorphisme non trivial $\rho : G \to \mathcal{S}_m$.

1.b) Soit G un groupe de cardinal 36, montrer qu'il n'est pas simple. [Indication : considérer ses 3-sous-groupes de Sylow.]

Exercice 2

Soit G un groupe agissant transitivement sur un ensemble X de cardinal $d \geq 2$. On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Le nombre d'éléments de G agissant sans point fixe sur X est $\geq |G|/d$.*

On notera $X^g := \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$ et f_i le nombre d'éléments de G possédant exactement i points fixes.

2.a) Montrer que le nombre d'orbites sous l'action d'un groupe G sur un ensemble Y est donnée par la formule suivante :

$$|G \backslash Y| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Y^g|$$

[Indication : on pourra compter de deux manières différentes le cardinal de l'ensemble $\{(g, y) \in G \times Y \mid g \cdot y = y\}$.]

2.b) Dans le cas présent en déduire :

$$|G| = \sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{i=0}^{d} i f_i \tag{1}$$

2.c) Considérons l'action de G sur $X \times X$ donnée par $g \cdot (x, x') = (g \cdot x, g \cdot x')$. Montrer que $(X \times X)^g = X^g \times X^g$ et que cette action possède au moins deux orbites distinctes. [Indication : on pourra considérer l'ensemble $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$.]

2.d) En déduire l'inégalité :

$$\sum_{i=0}^{d} i^2 f_i \geq 2|G| \tag{2}$$

2.e) Montrer que

$$\sum_{i=0}^{d} f_i = |G| \tag{3}$$

2.f) En utilisant (1), (2) et (3), montrer que

$$\sum_{i=0}^{d} (i-1)(i-d) f_i \geq |G|,$$

et en déduire $f_0 \geq |G|/d$.

Problème.

On rappelle que D_n désigne le groupe à $2n$ éléments des isométries d'un polygone régulier à n côtés. On se propose de montrer que si G est un groupe de cardinal 70 alors G est isomorphe à l'un des 4 groupes suivants

$$\mathbf{Z}/70\mathbf{Z},\ D_{35},\ D_5 \times \mathbf{Z}/7\mathbf{Z},\ D_7 \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}.$$

On note $n_p = n_p(G)$ le nombre de p sous-groupes de Sylow d'un groupe G et $o(n) = o_G(n)$ le nombre d'éléments d'ordre n.

Préliminaires.

c.1) Rappeler pourquoi un groupe de cardinal $2p$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2p\mathbf{Z}$ ou D_p (ici p est premier *impair*).

c.2) Que valent n_2 et n_p dans le cas $G = D_p$?

Si S et T sont deux sous-groupes de G tels que $S \cap T = \{e\}$ on considère $ST := \{xy \mid x \in S,\ y \in T\}$.

c.3) Montrer que, si S est distingué dans G, alors $ST = TS$ est un sous-groupe de cardinal $|S|.|T|$.

c.4)Montrer que, si S et T sont distingués dans G, alors ST est un sous-groupe isomorphe à $S \times T$. En déduire qu'un groupe de cardinal 35 est cyclique.

Classification des groupes de cardinal 70.

On revient au problème initial et on suppose maintenant que G a pour cardinal 70.

d.1) Exprimer $o(p)$ en terme de n_p et énumérer les valeurs possibles *a priori* pour n_2, n_5 et n_7.

d.2) Déduire de ce qui précède que G possède un sous groupe K d'ordre 35, montrer que K est distingué dans G.

d.3) En déduire que G contient un sous-groupe distingué $K \cong \mathbf{Z}/35\mathbf{Z}$.

d.4) Calculer n_2 dans le cas des quatre groupes $\mathbf{Z}/70\mathbf{Z}$, $D_7 \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$, $D_5 \times \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$ et D_{35}; en déduire qu'ils ne sont pas isomorphes.

d.5) Inversement, montrer en considérant les valeurs possibles de n_2 que G est isomorphe à un des 4 groupes cités.