Université Paris 7 - Denis Diderot
UFR de Mathématiques

Premier semestre 2006/07
M1 Maths-info - Algèbre

Feuille d'exercices n^o 5

Théorie de Galois / Galois theory

Exercice 1. Les extensions suivantes sont-elles galoisiennes ? Déterminer leur groupe des automorphismes et leurs sous-corps intermédiaires : $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$.

Exercise 2. Set $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1) Show that $\mathbb{Q}(i, j) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{3})$. We denote by F this subfield of $\mathbb{C}$.
2) Determine the degree of F over $\mathbb{Q}$.
3) Show that the extension $F/\mathbb{Q}$ is Galois and find its Galois group.
4) Give all the intermediate extensions between $\mathbb{Q}$ and F.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier. Un générateur du groupe $\mu_n \subset \mathbb{C}$ des racines n-èmes de l'unité est appelée une racine primitive n-ème de l'unité. On note μ_n^* le sous-ensemble de ces racines primitives n-èmes de l'unité. On note $\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in \mu_n^*}(X - \zeta)$. C'est un polynôme irréductible à coefficients entiers.

Soit $\mathbb{Q}(\zeta)$ le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par une racine primitive $\zeta \in \mu_n^*$ fixée.

1) En utilisant le fait que $\Phi_n(X)$ est un polynôme irréductible à coefficients entiers, déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$.
2) Montrer que cette extension $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ est galoisienne.
3) Montrer que son groupe de Galois est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ des éléments inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 4.

1) Montrer que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5 + \sqrt{21}})$ est une extension de degré 4 de $\mathbb{Q}$.
2) Montrer que cette extension $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne.
3) Montrer que son groupe de Galois est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
4) Déterminer les sous-corps de K.
5) Écrire $\sqrt{5 + \sqrt{21}}$ sans racine carrée emboîtée.
6) Peut-on faire la même chose avec $\sqrt{7 + 2\sqrt{5}}$?

Exercise 5.

1) What is the degree of the extension $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$?
2) Show that this extension is not Galois and that the smallest subfield of $\mathbb{C}$ which is a finite and Galois extension of $\mathbb{Q}$ containing $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ is $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.
3) What is the degree of the extension $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$?
4) Show that the extension $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}(i)$ is Galois and cyclic (i.e. its Galois group is cyclic).
5) Show that the extension $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$ is not abelian (i.e. its Galois group is not abelian).

6) More precisely, show that the Galois group of this extension is generated by two elements σ and τ, with σ of order 2 and τ of order 4 satisfying the relation $\sigma\tau = \tau^3\sigma$.

Exercice 6. Soit K un corps et $P \in K[X]$ un polynôme. Soit L un corps de décomposition de L sur K et $a_1, \dots, a_n$ les racines distinctes de P dans L (comptées sans leur multiplicité).

1) Rappeler pourquoi l'extension L/K est galoisienne.
2) On note $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Expliquer pourquoi G s'identifie à un sous-groupe du groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$.

Exercise 7. Let $P = X^5 - 4X + 2$ and K the splitting field of P over $\mathbb{Q}$.

1) How many real roots does P have ?
2) Show that the Galois group G of the extension $K/\mathbb{Q}$, seen as a group of permutations of the roots of P, has a transposition.
3) When p is a primer number, show that if $\tau \in \mathfrak{S}_p$ is a transposition and $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ is a p-cycle, then the permutation group $\mathfrak{S}_p$ is generated by σ and τ.
4) Show that G is isomorphic to $\mathfrak{S}_5$.
5) Is the equation $X^5 - 4X + 2 = 0$ solvable by radicals ?

Exercice 8. Donner une équation de degré 5 sur $\mathbb{Q}$ résoluble par radicaux et de groupe de Galois non trivial.

Exercise 9.

1) Is the extension $\mathbb{Q}(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{15}})/\mathbb{Q}$ Galois ?
2) What is its Galois group ? Is it cyclic ?
3) Determine the subfields of $\mathbb{Q}(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{15}})$ of degree 4 and 2 over $\mathbb{Q}$.

Exercice 10. Soit k un corps de caractéristique nulle et $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in k[X]$. Si x_1, $\ldots$, x_n sont les racines de P (comptées avec leurs multiplicités) dans un corps de décomposition K de P, le discriminant de P est défini par $D = \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2 \in K$.

1) Montrer que $D \in k$.
2) Calculer le discriminant d'un polynôme du second degré.
3) Soit $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ et $\delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$. Montrer que pour tout $\sigma \in G$, $\sigma(\delta) \in \{\delta, -\delta\}$.
4) Montrer que, vu comme groupe de permutation des racines de P, G est un sous-groupe du groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ si et seulement si D est un carré dans k.

Exercise 11. Let p be a prime number.

1) Show that $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mathrm{i}, \sqrt[4]{p})/\mathbb{Q})$ is isomorphic to the dihedral group D_4.
2) Is the equation $X^4 - p = 0$ solvable by radicals ?
3) Determine all the intermediate subfields of the extension $\mathbb{Q}(\mathrm{i}, \sqrt[4]{p})/\mathbb{Q}$.