Université Denis Diderot Paris 7, Semestre Septembre 2005 -janvier 2006

M1 (Maîtrise) “Math-Info”, cours d'algèbre

(M. Hindry et D. Mauger)

Corrigé du Partiel du 25 novembre 2005.

Exercice n° 1.

Soit L le sous-module de $\mathbf{Z}^4$ engendré par les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ e_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer une base adaptée de L et en déduire une description du groupe $\mathbf{Z}^4/L$.

On peut évidemment faire les calculs de bien des façons. Un des calculs les plus simples ici est d'observer par manipulation sur les colonnes que si on pose

$$f_1 := e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ f_2 := e_3 - e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } f_3 := \frac{1}{4}(e_2 - e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

alors $f_1, f_2, 4f_3$ forment une base de L alors que f_1, f_2, f_3 peuvent être complétés en une base de $\mathbf{Z}^4$ en posant par exemple $f_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi on a bien trouvé une base adaptée.

On en tire

$$\mathbf{Z}^4/L = (\mathbf{Z}f_1 \oplus \mathbf{Z}f_2 \oplus \mathbf{Z}f_3 \oplus \mathbf{Z}f_4) \,/\, (\mathbf{Z}f_1 \oplus \mathbf{Z}f_2 \oplus 4\mathbf{Z}f_3) \cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$$

Exercice n° 2.

Soit G un groupe de cardinal $96 = 2^5.3$. Montrer que G est résoluble par une méthode de votre choix ou en utilisant les indications suivantes

(i) *Soit n_2 le nombre de 2-sous-groupes de Sylow; montrer que $n_2 = 1$ ou 3 et conclure si $n_2 = 1$.*

D'après les théorèmes de Sylow n_2 est impair et divise 3 donc vaut 1 ou 3. Si $n_2 = 1$ alors il y a un unique 2-sous-groupe de Sylow, disons H, qui est donc distingué dans G. Le groupe H est résoluble car c'est un 2-groupe et G/H est de cardinal 3 donc abélien et résoluble, donc G est résoluble.

(ii) *Si $n_2 = 3$, utiliser l'action de G sur les 2-sous-groupes de Sylow de G pour construire un homomorphisme non trivial $\rho : G \to \mathcal{S}_3$. Montrer que l'image de ρ a pour cardinal* 3 *ou* 6*, calculer les valeurs possibles pour le cardinal de* $\mathrm{Ker}(\rho)$ *et conclure.*

L'action par conjugaison sur les trois sous-groupes de Sylow est transitive donc induit un homomorphisme non trivial $\rho : G \to \mathcal{S}_3$. D'après la formule des classes chaque 2-sous-groupe de Sylow P est égal à son normalisateur donc $\mathrm{Ker}(\rho) \subset P$ et le cardinal de l'image de ρ est un multiple de $(G : P) = 3$ donc vaut 3 ou 6 [c'est inutile ici, mais on peut montrer que c'est 6]. Ainsi $\mathrm{Ker}(\rho)$ est résoluble car c'est un 2-groupe et $G/\mathrm{Ker}(\rho)$ est résoluble comme sous-groupe de $\mathcal{S}_3$, donc G est résoluble.

Exercice n° 3.

Soit G un groupe fini et H un sous-groupe d'indice égal à p, le plus petit nombre premier divisant le cardinal de G, on se propose de montrer que H est distingué dans G.

a) *On fait agir G par translation sur G/H. Montrer que l'action induit un homomorphisme non trivial $\rho : G \to \mathcal{S}_p$.*

L'action par translation est transitive donc induit un homomorphisme non trivial $\rho : G \to \mathcal{S}_p$.

b) *Soit $K = \mathrm{Ker}(\rho)$, montrer que $K \subset H$.*

Le noyau est constitué des éléments g tels que, pour tout $k \in G$ on ait $gkH = kH$ ou encore $k^{-1}gk \in H$ ou encore $g \in kHk^{-1}$; ainsi

$$\mathrm{Ker}(\rho) = \cap_{k \in G} kHk^{-1} \subset H.$$

c) *Montrer que $(G : K)$ divise $|G|$ et $p!$*

D'après le théorème de Lagrange, $(G : K) = |G|/|K|$ divise $|G|$; comme ρ induit une injection de G/K dans $\mathcal{S}_p$ on a aussi $(G : K)$ divise $p!$.

d) *En déduire que $(G : K) = p$ et conclure que $K = H$.*

On peut écrire $p! = p.M$ avec M divisible uniquement par des facteurs premiers $< p$, donc, comme p est le plus petit facteur premier de $|G|$, on a $\mathrm{PGCD}(|G|, p!) = p$. Ainsi $(G : K)$ divise p et, comme $K \neq G$ (puisque l'action est non triviale), on a $(G : K) = p$. Mais $p = (G : K) = (G : H)(H : K) = p(H : K)$ donc $(H : K) = 1$ et $H = K$ est donc distingué dans G.

Problème.

On rappelle que D_n désigne le groupe à $2n$ éléments des isométries d'un polygone régulier à n côtés. On se propose de montrer que si G est un groupe de cardinal 30 alors G est isomorphe à l'un des 4 groupes suivants

$$\mathbf{Z}/30\mathbf{Z},\ D_{15},\ D_5 \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z},\ D_3 \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$$

La lettre p désigne, comme d'habitude, un nombre premier. On note $n_p = n_p(G)$ le nombre de p sous-groupes de Sylow d'un groupe G et $o(n) = o_G(n)$ le nombre d'éléments d'ordre n.

Préliminaires.

a) *Rappeler pourquoi un groupe de cardinal $2p$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2p\mathbf{Z}$ ou D_p.*

Prenons comme caractérisation de D_n le fait qu'il contienne un sous-groupe cyclique distingué d'ordre n, engendré par disons σ (une rotation d'angle $2\pi/n$), et un élément d'ordre 2 disons τ (une symétrie) tels que $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$ (Cf Cours ou TD).

Les théorèmes de Sylow indiquent que $n_p = 1$ et $n_2 = 1$ ou p. Ainsi G contient un sous-groupe K cyclique distingué de cardinal p. Si $n_2 = 1$, l'unique 2-sous-groupe de Sylow H est distingué et doit commuter avec K donc $G \cong K \times H \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/2p\mathbf{Z}$ (par le théorème chinois). Si $n_2 = p$, il y a p éléments d'ordre 2; ils remplissent donc, avec K le groupe G. Soit s un générateur de K et t un élément d'ordre 2 on a donc $G = \{1, s, s^2, \ldots, s^{p-1}, t, ts, ts^2, \ldots, ts^{p-1}\}$. De plus ts est d'ordre 2 donc $tsts = 1$ ou encore $tst^{-1} = s^{-1}$ et cette relation qui caractérise D_p (Cf ci-dessus).

b) *Que valent n_2 et n_p dans le cas $G = D_p$?*

Le calcul précédent montre que $n_p = 1$ et $n_2 = p$.

c) *Si S et T sont deux sous-groupes de G tels que $S \cap T = \{e\}$ on considère $ST := \{xy \mid x \in S,\ y \in T\}$; montrer les énoncés suivants :*

c1) *Si S est distingué dans G alors $ST = TS$ est un sous-groupe de cardinal $|S|.|T|$.*

L'application $\phi : S \times T \to G$ définie par $(s,t) \mapsto st$ est injective car si $st = s't'$ alors $s'^{-1}s = t't^{-1} \in S \cap T$ donc $= e$ et donc $s = s'$, $t = t'$. Ensuite $st = t(t^{-1}st) \in TS$ d'où $ST = TS$. L'ensemble ST contient l'élément neutre, est stable par multiplication car $(st)(s't') = \big(s(ts't^{-1})\big)(tt')$ et stable par inversion car $(st)^{-1} = t^{-1}s^{-1} \in TS = ST$ donc c'est bien un sous-groupe.

c2) *Si S et T sont distingués dans G alors ST est un sous-groupe isomorphe à $S \times T$. En déduire qu'un groupe de cardinal 15 est cyclique.*

Dans ce cas $sts^{-1}t^{-1} = (sts^{-1})t^{-1} = s(ts^{-1}t^{-1}) \in S \cap T$ donc $= e$, c'est-à-dire que s et t commutent. On en tire que $\phi : S \times T \to ST$ est un homomorphisme car $\phi(s,t)\phi(s',t') = sts't' = ss'tt' = \phi(ss', tt') = \phi((s,t)(s',t'))$, donc, comme il s'agit aussi d'une bijection, c'est un isomorphisme. En applicant cela à l'unique 3-sous-groupe de Sylow S de G et l'unique 5-sous-groupe de Sylow T de G, on voit que $G = ST \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$.

On suppose maintenant que G a pour cardinal 30

d) *Exprimer $o(p)$ en terme de n_p et énumérer les valeurs possibles a priori pour n_2, n_3 et n_5.*

L'union des p-sous-groupes de Sylow privés de l'élément neutre est l'ensemble des éléments d'ordre p donc $o(p) = n_p(p-1)$. Les théorèmes de Sylow restreignent les possibilités à $n_2 = 1, 3, 5$ ou 15; $n_3 = 1$ ou 10; $n_5 = 1$ ou 6.

e) *On suppose* $n_3 \neq 1$*, déduire de la question précédente que* $n_5 = 1$*; de même montrer que si* $n_5 \neq 1$ *alors* $n_3 = 1$.

Dans le premier cas on a $o(3) = 20$ donc on ne peut pas avoir $n_5 = 6$ car alors on aurait $o(5) = 24$ et $20 + 24 > 30$. Le même argument montre que si $n_5 \neq 1$ alors $n_3 = 1$.

f) *Déduire de ce qui précède que* G *possède un sous groupe* K *d'ordre 15 et montrer que* K *est distingué dans* G.

D'après ce qui précède, G posséde un 3-sous-groupe de Sylow ou un 5-sous-groupe de Sylow qui est distingué. Appelons S un 3-sous-groupe de Sylow et T un 5-sous-groupe de Sylow; d'après la question c), l'ensemble $K := ST$ est un sous-groupe de cardinal 15 qui est donc cyclique. Comme $(G : K) = 2$, le sous-groupe K est distingué.

g) *En déduire que* $n_3 = n_5 = 1$ *et que* $K \cong \mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$.

On sait déjà que $K \cong \mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$. Soit S le 3-sous-groupe de Sylow contenu dans K, on observe que K est contenu dans $N_G(S)$ le normalisateur de S donc $n_3 = (G : N_G(S))$ divise $(G : K) = 2$ donc vaut 1 (idem pour n_5).

h) *Calculer* n_2 *dans le cas des quatre groupes* $\mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$, $D_3 \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$, $D_5 \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ D_{15} *et en déduire qu'ils ne sont pas isomorphes.*

Le groupe $\mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$ est abélien donc $n_2 = 1$. Un 2-sous-groupe de Sylow de $D_3 \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ est contenu dans $D_3 \times \{0\}$ donc il y en a autant que de 2-sous-groupes de Sylow dans D_3, c'est-à-dire $n_2 = 3$. Un 2-sous-groupe de Sylow de $D_5 \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ est contenu dans $D_5 \times \{0\}$ donc il y en a autant que de 2-sous-groupes de Sylow dans D_5, c'est-à-dire $n_2 = 5$. Enfin dans le cas de D_{15} on a vu que $n_2 = 15$. On peut également répondre à cette question en comptant les éléments d'ordre 2 et en observant qu'ici $n_2 = o(2)$.

i) *Inversement, montrer en considérant les valeurs possibles de* n_2 *que* G *est isomorphe à un des 4 groupes cités.*

Soit W un 2 sous-groupe de Sylow, soit S l'unique 3-sous-groupe de Sylow et T l'unique 5-sous-groupe de Sylow et $K = ST \cong \mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$. Si $n_2 = 1$ alors W commute avec K et $G \cong W \times K \cong \mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$. Si $n_2 = 3$ alors WT doit être abélien sinon il serait isomorphe à D_5 et contiendrait 5 2-sous-groupes de Sylow, de même WS n'est pas abélien et est donc isomorphe à D_3 (sinon il n'y aurait qu'un seul 2-sous-groupe de Sylow). Ainsi T commute avec WS et $G \cong (WS) \times T \cong D_3 \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$. Si $n_2 = 5$ alors WT doit être isomorphe à D_5 sinon il serait abélien et il n'y aurait pas assez de 2-sous-groupes de Sylow, de même WS est abélien car sinon il serait isomorphe à D_3 et il y aurait trop de 2-sous-groupes de Sylow. Ainsi S commute avec WT et $G \cong (WT) \times S \cong D_5 \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Si maintenant $n_2 = 15$, considérons s générateur de K et t élément d'ordre 2. Les éléments d'ordre 2 remplissent donc, avec K le groupe G. Or on a $G = \{1, s, s^2, \ldots, s^{p-1}, t, ts, ts^2, \ldots, ts^{p-1}\}$. Ainsi ts est d'ordre 2 donc $stst = 1$ ou encore $tst^{-1} = s^{-1}$ – relation qui caractérise D_{15} (Cf Cours ou TD).