Zéro-cycles de degré un sur les espaces homogènes

Mathieu Florence

Abstract

We explain how to build homogeneous spaces of a connected linear algebraic group, having zero-cycles of degree one but no rational point, even on a smooth compactification. Thus, we give a negative answer to a recent question asked by Burt Totaro. Roughly speaking, the strategy is as follows: we apply a nonabelian cohomological machinery to some extension of finite groups, which is non-split, but split over every p-Sylow of the base. We give two precise examples: the first and easiest one, over the field $\mathbb{C}((x))((y))$; the second one, which requires a little more work, over a local or global field, and with finite abelian stabilizers. Both are rational varieties. [1]

1 Introduction

Nous nous intéressons dans cet article à la question suivante, posée par Burt Totaro ([To], Question 0.2) :

Question. *Soit G un groupe algébrique lisse connexe défini sur un corps k. Soit X une variété quasi-projective, munie d'une structure d'espace homogène sous G. Supposons qu'il existe un 0-cycle de degré $d > 0$ sur X. Peut-on alors dire que X possède un point dans une extension séparable de k, de degré divisant d ?*

Nous donnons dans cette article une réponse négative à cette question. Plus précisément, nous exposons, sur un corps de caractéristique nulle, une méthode

[1] AMS Classification: 14L30

générale de construction d'un espace homogène X, sous un groupe réductif G, à stabilisateurs finis non abéliens, sans point rationnel mais possédant un 0-cycle de degré 1 (théorème 3.1). Nous donnons ensuite deux exemples particuliers: le premier, quasi immédiat, sur le corps $\mathbb{C}((x))((y))$ (section 3.2.1); le second, demandant une étude quelque peu plus poussée, sur un corps local ou un corps de nombres (théorème 3.9). D'autres contre-exemples, d'une toute autre nature cependant, ont été récemment obtenus par Parimala ([Pa]) de façon indépendante. Plus précisément, Parimala a construit, sur un corps du type $k((t))$ (pour k un corps p-adique convenable), un espace homogène sous un groupe spécial unitaire, qui est une variété projective, possédant un 0-cycle de degré 1 mais pas de point k-rationnel.
Cet article n'aurait pas vu le jour sans les conseils et le soutien de Philippe Gille; nous l'en remercions vivement. Nous remercions également Jean-Claude Douai, David Harari, Boris Kunyavskii et Burt Totaro pour d'éclairantes conversations et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Nous remercions enfin Mikhaïl Borovoi et Ofer Gabber pour leurs précieuses suggestions.

Notations.
Dans toute la suite, la lettre k désigne un corps de caractéristique nulle, et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. On note Γ_k le groupe de Galois de $\overline{k}/k$. Si X est un k-schéma, nous notons $\overline{X}$ le $\overline{k}$-schéma $X \bigotimes_k \overline{k}$. On s'autorisera cependant parfois à noter $\overline{X}$ un $\overline{k}$-schéma quelconque, qui n'est pas nécessairement obtenu par extension des scalaires à partir d'un k-schéma. Si Y est un $\overline{k}$-schéma et si $\sigma \in \Gamma_k$, on note ${}^{\sigma}Y$ le $\overline{k}$-schéma obtenu à partir de Y par changement de base par le morphisme $\mathrm{Spec}(\overline{k}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\overline{k})$ correspondant à σ. Par définition, une k-variété X est dite rationnelle si $\overline{X}$ est $\overline{k}$-birationnelle à un espace affine. Par k-groupe, nous entendons un k-schéma en groupes lisse, localement de type fini. Dans la section 3, les k-groupes considérés seront tous linéaires. Un exemple simple de k-groupe, dont nous faisons usage dans la suite, est le groupe multiplicatif d'une k-algèbre A de dimension finie sur k, noté $GL_1(A)$. Pour toute k-algèbre commutative B, nous avons donc $GL_1(A)(B) = (A \otimes_k B)^*$. Soit G un k-groupe. On note $\mathrm{Z}(G)$ le centre de G; si $H \subset G$ est un k-sous-groupe de G, on note $\mathrm{C}_G(H)$ le centralisateur de H dans G. On note $\mathrm{Aut}(G)$ le k-groupe des automorphismes de G, $\mathrm{Inn}(G) = G/\mathrm{Z}(G)$ le k-sous-groupe distingué formé des automorphismes intérieurs, et $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ le k-groupe des automorphismes extérieurs. Si $g \in G(k)$, l'automorphisme intérieur $x \mapsto gxg^{-1}$ est noté i_g. Soit $\overline{H} \subset \overline{G}$ un $\overline{k}$-sous-groupe de $\overline{G}$, et X un G-espace homogène (à droite). On dit

que X est un espace homogène de stabilisateur $\overline{H}$ si X possède un point géométrique dont le stabilisateur est $\overline{H}$. Nous notons $H^1(k, G, \overline{H})$ les classes d'isomorphie de tels espaces. Par k-forme d'un $\overline{k}$-schéma Y, on entend la donnée d'un k-schéma X et d'un $\overline{k}$-isomorphisme $Y \simeq \overline{X}$. Si Y est un $\overline{k}$-groupe, on suppose de plus que X est un k-groupe et que l'isomorphisme donné est un isomorphisme de groupes.

2 Cohomologie

Nous établissons dans cette section les résultats de nature cohomologique qui servent à la construction des contre-exemples. La théorie utilisée ici est celle du H^2 non-abélien en cohomologie galoisienne (cf [Sp] pour une exposition détaillée, voir aussi [FSS] pour une excellente introduction). Nous avons jugé utile d'en rappeler d'abord brièvement les fondements.

2.1 Rappels

Soit $\overline{G}$ un $\overline{k}$-groupe de type fini, ne possédant pas nécessairement de k-forme.

Définition. On appelle automorphisme k-semi-algébrique de $\overline{G}$ la donnée d'un élément $\sigma \in \Gamma_k$ et d'un isomorphisme de $\overline{k}$-groupes $s : {}^{\sigma}\overline{G} \longrightarrow \overline{G}$ (il est clair que σ est alors uniquement determiné par s, vu comme automorphisme du $\mathbb{Z}$-schéma $\overline{G}$). On note $\mathrm{SAut}(\overline{G}/k)$ l'ensemble des automorphismes k-semi-algébriques de $\overline{G}$. Si $s : {}^{\sigma}\overline{G} \longrightarrow \overline{G}$ et $t : {}^{\tau}\overline{G} \longrightarrow \overline{G}$ sont deux automorphismes k-semi-algébriques de $\overline{G}$, on peut former le composé $st : {}^{\sigma\tau}\overline{G} = {}^{\sigma}({}^{\tau}\overline{G}) \xrightarrow{{}^{\sigma}t} {}^{\sigma}\overline{G} \xrightarrow{s} \overline{G}$. On munit ainsi $\mathrm{SAut}(\overline{G}/k)$ d'une structure de groupe.

Par exemple, si $\overline{G}$ possède une k-forme G, tout élément de Γ_k peut être vu comme un automorphisme k-semi-algébrique par son action naturelle sur $\overline{G}$.

On a la suite exacte $1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(\overline{G})(\overline{k}) \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{G}/k) \xrightarrow{\pi} \Gamma_k$, où π est le morphisme qui à s associe σ. A une k-forme G de $\overline{G}$ correspond une section s de π, autrement dit une écriture $\mathrm{SAut}(\overline{G}/k) \simeq \mathrm{Aut}(\overline{G})(\overline{k}) \rtimes \Gamma_k$. Ce dernier produit est bien sûr direct si $\mathrm{Aut}(G)$ est constant (par exemple si G est fini constant, ce qui sera souvent le cas dans la suite, ou si G est un tore déployé).

Il est possible de munir $\mathrm{SAut}(\overline{G}/k)$ d'une structure de groupe topologique (cf [FSS], 1.6); il y a même plusieurs façons d'y parvenir. Nous n'en parlerons pas ici, car seule importe pour notre propos la notion de fonction continue $\Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{G}/k)$, qui peut être définie comme suit (cf [FSS], condition (ii) de la proposition 1.7).

Définition. Soit l une extension finie de k, telle qu'il existe une l-forme G de $\overline{G}$, définissant une section s du morphisme $\pi_{|l} : \mathrm{SAut}(\overline{G}/l) \longrightarrow \Gamma_l$. Une fonction $\Gamma_k \xrightarrow{f} \mathrm{SAut}(\overline{G}/k)$ est continue si, pour tout $\tau \in \Gamma_k$, le morphisme

$$\Gamma_k \longrightarrow \mathrm{Aut}(\overline{G})(\overline{k}), \sigma \mapsto s(\sigma)^{-1} f(\tau)^{-1} f(\tau\sigma)$$

est localement constant.

Cette notion de continuité ne dépend pas de l'extension l et de la l-forme de $\overline{G}$ choisies.

Définition. Le groupe des automorphismes k-semi-algébriques extérieurs de $\overline{G}$, noté $\mathrm{SOut}(\overline{G}/k)$, est défini comme le conoyau de l'injection naturelle $\mathrm{Inn}(\overline{G})(\overline{k}) \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{G}/k)$.

Définition. Un k-lien est un morphisme de groupes $\kappa : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SOut}(\overline{G}/k)$, qui se relève en une section ensembliste continue de π.

Par exemple, si $\overline{G}$ possède une k-forme G, l'action de Γ_k sur $\overline{G}$ fournit naturellement un k-lien, appelé lien trivial. Si $\mathrm{Aut}(G)$ est constant, un k-lien est simplement un morphisme continu (c'est-à-dire localement constant) $\Gamma_k \longrightarrow \mathrm{Out}(G)$.
Nous avons introduit le matériel requis pour définir la notion de H^2 non abélien:

Définition. Soit κ un k-lien. On appelle 2-cocycle (à coefficients dans κ) un couple (f, g) d'applications continues
$f : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{G}/k), s \mapsto f_s$, et $g : \Gamma_k \times \Gamma_k \longrightarrow \overline{G}(\overline{k}), (s, t) \mapsto g_{s,t}$
vérifiant les conditions suivantes:
(i) $f \bmod \mathrm{Inn}(\overline{G}) = \kappa$,
(ii) $f_s \circ f_t = i_{g_{s,t}} \circ f_{st}$ et $f_s(g_{t,u})g_{s,tu} = g_{s,t}g_{st,u}$.
On note $Z^2(k, \overline{G}, \kappa)$ l'ensemble des 2-cocycles. Deux cocyles (f, g) et (f', g')

sont dits équivalents s'il existe une application continue $h : \Gamma_k \longrightarrow \overline{G}(\overline{k})$ vérifiant $f'_s = i_{h_s} \circ f_s$ et $g'_{s,t} = h_s f_s(h_t) g_{s,t} h_{s,t}^{-1}$.
L'ensemble de 2-cohomologie $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$ est par définition l'ensemble des classes d'équivalences de cette relation.

Lorsque $\overline{G}$ est commutatif, auquel cas κ n'est autre qu'une action de Γ_k sur $\overline{G}$, on retrouve le second groupe de cohomologie usuel. En général, $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$ peut toujours s'interpréter en termes d'extensions de groupes. Plus précisément, considérons les extensions de groupes topologiques:

$$1 \longrightarrow \overline{G}(\overline{k}) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{q} \Gamma_k \longrightarrow 1, \tag{1}$$

où $\overline{G}(\overline{k})$ est comme auparavant muni de la topologie discrète, i et q étant continues et ouvertes sur leurs images. Deux telles extensions E et E' sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme $E \longrightarrow E'$ induisant l'identité sur $\overline{G}(\overline{k})$ et sur Γ_k.

Proposition 2.1 *Il existe une bijection naturelle entre $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$ et les classes d'extensions (1) telles que le morphisme $\Gamma_k \longrightarrow Out(\overline{G}(\overline{k}))$ qui leur est associé coïncide avec le composé $\Gamma_k \xrightarrow{\kappa} SOut(\overline{G}/k) \longrightarrow Out(\overline{G}(\overline{k}))$.*

Démonstration. [FSS], Lemme 1.19. □

En particulier, si $\overline{G}$ est fini constant, on voit que la donnée d'un k-lien κ et d'une classe dans $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$ correspond simplement à une extension E (de groupes topologiques) de Γ_k par $\overline{G}$. Une telle extension provient toujours de la théorie des groupes finis. Autrement dit, il existe un sous-groupe ouvert distingué U de Γ_k, et une extension $1 \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow E' \longrightarrow \Gamma_k/U \longrightarrow 1$, telle que E soit isomorphe au pull-back de E' par la surjection canonique $\Gamma_k \longrightarrow \Gamma_k/U$. La théorie du H^2 non abélien, dans le cas d'un groupe fini constant, se ramène donc à la théorie des extensions de groupes finis, telle qu'exposée dans [Su].

Soit κ un k-lien. L'ensemble $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$ est marqué par l'ensemble des classes neutres, c'est-à-dire qui correspondent, par la proposition précédente, à des extensions scindées. Il revient au même de dire qu'une telle classe peut être représentée par un 2-cocyle de la forme $(f, 1)$. Par exemple, si $\overline{G}$ possède une k-forme G, et si κ est le lien trivial associé à G, on dispose d'une classe neutre canonique $\eta(G)$, représentée par le 2-cocycle $(\lambda, 1)$, où $\lambda : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{G}/k)$ est donné par l'action naturelle de Γ_k sur $\overline{G}$. L'extension associée à $\eta(G)$ n'est autre que le produit semi-direct $\overline{G}(\overline{k}) \rtimes \Gamma_k$. Remarquons que $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$ peut être vide; cela arrive lorsqu'il n'est pas possible de relever κ en une section continue du morphisme π.

En général, il n'y a pas de fonctorialité agréable dans la théorie du H^2 non abélien, on ne dispose souvent que de relations (cf [Sp], 1.18). Cependant, il est clair qu'on a toujours, comme dans la théorie abélienne, des morphismes de restriction, pour toute extension l de k, $\mathrm{Res}_{l/k} : H^2(k, \overline{G}, \kappa) \longrightarrow H^2(l, \overline{G}, \kappa_{|l})$.

Le H^2 non abélien s'insère naturellement dans des suites exactes généralisant les premiers termes des suites exactes longues usuelles de cohomologie galoisienne (cf proposition 2.5). Dans cette optique, rappelons le procédé classique qui à un espace homogène associe une classe de 2-cohomologie. Supposons donc momentanément que $\overline{G}$ possède une k-forme G, soit $\overline{H} \subset \overline{G}$ un $\overline{k}$-sous-groupe de $\overline{G}$, et X un G-espace homogène dont la classe d'isomorphie appartient à $H^1(k, G, \overline{H})$. Choisissons un point $x \in \overline{X}(\overline{k})$ de stabilisateur $\overline{H}$. Pour tout $s \in \Gamma_k$, choisissons $a_s \in \overline{G}(\overline{k})$ tel que $x.a_s = {}^s x$. On constate alors que ${}^s\overline{H} = a_s^{-1} \overline{H} a_s$ et que $a_s {}^s a_t a_{st}^{-1} \in \overline{H}(\overline{k})$. Si l'on pose $f_s(h) = a_s {}^s h a_s^{-1}$ et $g_{s,t} = a_s {}^s a_t a_{st}^{-1}$, il en découle que $h \mapsto f_s(h)$ est un automorphisme k-semi-algébrique de $\overline{H}$, que f définit un k-lien $\lambda : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SOut}(\overline{H}/k)$, et que le couple (f, g) est un élément de $Z^2(k, \overline{H}, \lambda)$. Les vérifications de ces assertions sont aisées et laissées au lecteur. Nous avons donc associé à X un k-lien λ et une classe de cohomologie $\xi \in H^2(k, \overline{H}, \lambda)$. Ces données sont indépendantes du choix de a_s, mais dépendent toutes deux du choix de x. Dans le cas particulier important où $\overline{H}$ est égal à $\mathrm{Z}(\overline{G})$, le lien λ est le lien trivial (pour l'action de Γ_k sur $\mathrm{Z}(\overline{G})$) et ξ est indépendant du choix de x. Nous obtenons ainsi le morphisme de bord $H^1(k, \overline{G}/Z(\overline{G})) \xrightarrow{\delta} H^2(k, Z(\overline{G}))$, qui permet la caractérisation suivante des classes neutres:

Proposition 2.2 *Soit κ un k-lien. Si $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$ n'est pas vide, il est naturellement muni d'une structure d'espace principal homogène sous $H^2(k, Z(\overline{G}))$. Si $\overline{G}$ possède une k-forme G et si κ est le lien trivial associé, une classe $\eta \in H^2(k, \overline{G}, \kappa)$ est neutre si et seulement si $\eta - \eta(G)$ est dans l'image du bord $H^1(k, \overline{G}/Z(\overline{G})) \xrightarrow{\delta} H^2(k, Z(\overline{G}))$.*

Démonstration. [Sp], 1.17 et [Bo], proposition 2.3. □

Nous terminons ces rappels par un résultat de Douai, qui est utile dans la suite:

Proposition 2.3 *Supposons $\overline{G}$ réductif connexe. Alors, pour tout k-lien κ, $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$ contient une classe neutre.*

Démonstration. [Do], V-3.2, ou [Bo], proposition 3.1. □

2.2 Une suite exacte

Soit G un k-groupe, et $\overline{H}$ un sous-groupe de $\overline{G}$. Soit $\overline{N}$ le normalisateur de $\overline{H}$ dans $\overline{G}$. Si $\overline{H}$ est défini sur k, et si G et H sont abéliens, on a la suite exacte $H^1(k, G/H) \longrightarrow H^2(k, H) \longrightarrow H^2(k, G)$. Nous nous proposons de donner l'analogue de cette suite en général. Cela a déjà été fait dans [Sp], proposition 1.27; néanmoins, il semble que la flèche i^2_* n'est bien définie que si $\mathrm{C}_{\overline{G}}(\overline{H}) \subset \mathrm{Z}(\overline{G})$, une condition forte mais vérifiée dans la section 3. Pour construire le contre-exemple, nous devons aussi considérer une classe plus large d'espaces homogènes, faisant intervenir des formes intérieures de G. Dans la suite de cette section, nous expliquons les quelques modifications qu'il faut apporter dans notre contexte à la suite exacte 1.27 de [Sp].
Considérons un couple (G_1, ϕ_1), où G_1 est un k-groupe et $\phi_1 : \overline{G} \longrightarrow \overline{G_1}$ un $\overline{k}$-isomorphisme tel que $a_s = \phi_1^{-1 s}\phi_1$ est intérieur pour tout $s \in \Gamma_k$. Nous identifions (G_1, ϕ_1) et (G_2, ϕ_2) lorsque $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ est défini sur k. Ces couples forment alors un ensemble E, qui n'est en réalité qu'une façon commode pour la suite d'interpréter l'ensemble de cocycles $Z^1(k, \mathrm{Inn}(G))$. Soit donc $(G', \phi) \in E$ et un espace homogène X sous G', dont le stabilisateur d'un point $\overline{x} \in X(\overline{k})$ est $\phi(\overline{H})$. On peut associer à un tel espace homogène X un lien $l' : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SAut}(\phi(\overline{H})/k)$ et une classe de cohomologie dans $H^2(k, \phi(\overline{H}), l')$ dépendant de x (cf section 2.1). Par transport de structure par ϕ, nous obtenons ainsi un lien $l : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{H}/k)$ et une classe de cohomologie $\xi \in H^2(k, \overline{H}, l)$. Il est facile de vérifier que, pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, $l(\sigma)$ est la classe d'un automorphisme k-semi-algébrique de la forme $x \mapsto a_\sigma {}^\sigma x a_\sigma^{-1}$, $a_\sigma \in \overline{G}$. Appelons L l'ensemble de tous les liens $\lambda : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{H}/k)$ jouissant de cette propriété; cet ensemble est en général plus gros que l'ensemble Φ de Springer. Tout comme lui, nous identifions, pour $n \in \overline{N}$, les ensembles $H^2(k, \overline{H}, \lambda)$ et $H^2(k, \overline{H}, i_n \circ \lambda \circ i_n^{-1})$ grâce à i_{n*}^2 (cf [Sp], 1.20). Posons :

$$H^2(k, \overline{H}, \overline{G}) = \left(\coprod_{\lambda \in L} H^2(k, \overline{H}, \lambda) \right) / \overline{N}.$$

Modulo $\overline{N}$, ξ ne dépend pas du point $\overline{x}$ choisi; nous avons donc associé à X une classe bien définie $\delta_1(X) \in H^2(k, \overline{H}, \overline{G})$.
Notons $\kappa : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SOut}(\overline{G}/k)$ le lien trivial. Soit $l \in L$. D'après [Sp], 1.18 (où $\lambda = id$ et $\mu = i : \overline{H} \longrightarrow \overline{G}$), nous avons une relation i_*^2 entre $H^2(k, \overline{H}, l)$ et $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$.

Lemme 2.4 *Supposons que $C_{\overline{G}}(\overline{H}) \subset Z(\overline{G})$. La relation i_*^2 est alors une fonction, et l'image par i_*^2 d'une classe neutre est une classe neutre.*

Démonstration. Soit $x \in H^2(k, \overline{H}, l)$, et (f, g) un 2-cocycle représentant x. Il existe donc $a_s \in \overline{G}(\overline{k})$ vérifiant $f_s(h) = a_s {}^s h a_s^{-1}$, et la condition $f_s \circ f_t = i_{g_{s,t}} \circ f_{st}$ est équivalente à $a_{st}^{-1} g_{s,t}^{-1} a_s {}^s a_t \in \mathrm{C}_{\overline{G}}({}^{st}\overline{H})$. L'hypothèse $\mathrm{C}_{\overline{G}}(\overline{H}) \subset \mathrm{Z}(\overline{G})$ montre alors que $\tilde{f}_s(a) = a_s {}^s a a_s^{-1}$ est un prolongement de f_s à $\overline{G}$, satisfaisant $\tilde{f}_s \circ \tilde{f}_t = i_{g_{s,t}} \circ \tilde{f}_{st}$. Cette même hypothèse implique que $\tilde{f}_s$ ne dépend pas du choix de a_s. Nous pouvons donc associer à x la classe de cohomologie de $(\tilde{f}, g)$ dans $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$, classe qui ne dépend pas du choix initial de (f, g). Cette classe est la seule que i_*^2 mette en relation avec x, car, sous les hypothèses de ce lemme, un automorphisme intérieur de $\overline{G}$ est déterminé par sa restriction à $\overline{H}$. Ceci prouve que i_*^2 est une fonction. La dernière affirmation du lemme est immédiate, x étant neutre si et seulement si on peut choisir g égal à 1. $\square$

Sous l'hypothèse de ce lemme, i_*^2 induit une flèche bien définie, toujours notée $i_*^2 : H^2(k, \overline{H}, \overline{G}) \longrightarrow H^2(k, \overline{G}, \kappa)$ (cf [Sp], 1.23). Nous sommes dès lors prêt à formuler le résultat annoncé :

Proposition 2.5 *Supposons que $C_{\overline{G}}(\overline{H}) \subset Z(\overline{G})$. La suite d'ensembles marqués suivante est alors exacte :*

$$\coprod_{(G', \phi) \in E} H^1(k, G', \phi(\overline{H})) \xrightarrow{\delta_1} H^2(k, \overline{H}, \overline{G}) \xrightarrow{i_2^*} H^2(k, \overline{G}, \kappa).$$

De plus, un G'-espace homogène X dans $H^1(k, G', \phi(\overline{H}))$ est d'image neutre par δ_1 si et seulement s'il existe un G'-torseur P et un morphisme G'-équivariant $P \longrightarrow X$.

Démonstration. Soit $x \in H^2(k, \overline{H}, \overline{G})$ d'image neutre dans $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$. Prenons un 2-cocycle (f, h) représentant x. Il existe donc un morphisme continu $f'_s : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{G}/k)$ et $g_s \in \overline{G}(\overline{k})$ tels que :

$$\tilde{f}_s(a) = g_s f'_s(a) g_s^{-1},$$

$$h_{s,t} = g_s f'_s(g_t) g_{st}^{-1}.$$

Le 1-cocycle $c_s(a) = f'_s({}^{s^{-1}}a)$ est donc à valeurs dans $\mathrm{Inn}(\overline{G})$. Soit $\overline{X} = \overline{H}\backslash\overline{G}$, avec l'action de Γ_k définie par ${}^s(\overline{H}a) = \overline{H}g_s f'_s(a)$. Il est aisé de voir que l'action naturelle de $\overline{G}$ sur $\overline{X}$ est Γ_k-équivariante pour l'action tordue par c de Γ_k sur $\overline{G}$. Nous avons ainsi construit un espace homogène X sous ${}^cG$, de stabilisateur $\overline{H}$, et il est immédiat de vérifier que son image par δ_1 n'est autre que x. Toutes les autres assertions sont démontrées dans [Sp], 1.27. $\square$

2.3 Un théorème d'annulation

Rappelons le fait élémentaire suivant : sur un k-schéma donné, la présence d'un 0-cycle de degré 1 équivaut à l'existence, pour tout p-Sylow S de Γ, d'un point rationnel défini sur le corps des points fixes de S. Nous sommes confrontés dans la suite à une situation analogue en cohomologie galoisienne non abélienne. Si $\overline{G}$ est un $\overline{k}$-groupe (non nécessairement défini sur k) et κ un k-lien, nous sommes en effet amenés à considérer l'objet suivant:

Définition. On note $Ш^2_{syl}(k, \overline{G}, \kappa)$ le sous-ensemble de $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$ formé des classes de cohomologie x vérifiant la propriété suivante: il existe une famille d'extensions finies k_i/k, de degrés globalement premiers entre eux, telles que les restrictions $\mathrm{Res}_{k_i/k}(x)$ sont toutes neutres.

Une classe $x \in Ш^2_{syl}(k, \overline{G}, \kappa)$ peut être caractérisée, de façon équivalente, par la propriété suivante : pour tout nombre premier p et tout p-Sylow S de Γ_k, $\mathrm{Res}_{k_S/k}(x)$ est neutre, k_S désignant le corps des points fixes de S (cela découle de la conjugaison des p-Sylow et du fait qu'un automorphisme intérieur de Γ_k induit l'action triviale sur le H^2, cf [Sp], proposition 1.19). Tout comme $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$, $Ш^2_{syl}(k, \overline{G}, \kappa)$ est marqué par l'ensemble des classes neutres. Il est clair que $Ш^2_{syl}(k, \overline{G}, \kappa)$ ne peut avoir d'intérêt que lorsque $\overline{G}$ n'est pas abélien. Néanmoins, cet ensemble est toujours réduit à l'ensemble des classes neutres dans deux cas particuliers importants:

Proposition 2.6 *Soit G un k-groupe. Soit $\kappa : \Gamma_k \longrightarrow SOut(\overline{G}/k)$ le lien trivial. Toute classe de $Ш^2_{syl}(k, \overline{G}, \kappa)$ est neutre lorsque G est l'un des groupes suivants:*
(i) $GL_1(A)$, le groupe multiplicatif d'une k-algèbre de dimension finie,
(ii) $SL_1(A)$, le groupe spécial linéaire d'une algèbre simple centrale.

Démonstration. Occupons-nous d'abord du cas $G = GL_1(A)$. D'après [Bo], proposition 2.3, il nous faut montrer qu'un élément $\alpha \in H^2(k, \mathrm{Z}(GL_1(A)))$ est dans l'image de $H^1(k, PGL_1(A)) \longrightarrow H^2(k, \mathrm{Z}(GL_1(A)))$ si et seulement si sa restriction à des extensions finies k_i de k, de degrés premiers entre eux, l'est. Nous allons effectuer une réduction au cas $A = \mathrm{M}_n(k)$. On se ramène d'abord facilement au cas où A est simple. En effet, appelons R le radical de Jacobson de A. Soit $B = A/R$, c'est une algèbre semi-simple. La projection naturelle $GL_1(A) \longrightarrow GL_1(B)$ identifie $GL_1(B)$ au quotient de $GL_1(A)$ par son radical unipotent (autrement dit, le radical unipotent de $GL_1(A)$ est $1 + R$). Dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, PGL_1(A)) & \xrightarrow{\pi_1} & H^1(k, PGL_1(B)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(k, \mathrm{Z}(GL_1(A))) & \xrightarrow{\pi_2} & H^2(k, \mathrm{Z}(GL_1(B))), \end{array}$$

π_1 est donc une bijection et π_2 un isomorphisme. Nous pouvons ainsi supposer A semi-simple; A est alors produit d'algèbres simples. Or il est évident que la proposition est vraie pour un produit d'algèbres si et seulement si elle l'est pour chacun des facteurs du produit, on peut donc supposer A simple. Désignons par l le centre de A, c'est un corps. Appelons $\tilde{A}$ l'algèbre A vue comme l-algèbre. Désignant par $R_{l/k}$ le foncteur de restriction des scalaires à la Weil, on a un isomophisme canonique de k-groupes :

$$GL_1(A) \simeq R_{l/k}(GL_1(\tilde{A})).$$

L'isomorphisme de Shapiro, compatible au diagramme commutatif précédent, permet donc de se ramener au cas où A est une k-algèbre simple centrale, de dimension n^2. Dans ce cas, $PGL_1(A)$ n'est autre que le groupe des automorphismes de la k-algèbre A, $H^1(\Gamma_k, PGL_1(A))$ classifie donc les k-formes de A, c'est-à-dire les algèbres simples centrales de rang n^2. Le choix d'un isomorphisme $A \otimes_k \overline{k} \simeq \mathrm{M}_n(\overline{k})$ détermine explicitement une bijection entre $H^1(\Gamma_k, PGL_1(A))$ et $H^1(\Gamma_k, PGL_n(k))$ selon la technique habituelle de torsion ([Se1], §5.3). On est donc ramené au problème suivant : soit $x \in Br(k)$ tel que $\mathrm{Res}_{k_i/k}(x)$ est, pour tout i, représenté par une algèbre simple centrale d'indice n. Il nous faut voir que x elle-même est représentée par une algèbre d'indice n. Soit D/k un corps gauche représentant x. On peut écrire $D = D_1 \otimes_k ... \otimes_k D_m$, où D_i est un corps gauche de degré p_i premier, les p_i étant distincts. Le produit tensoriel de deux corps gauches de degrés premiers entre eux étant encore un corps gauche, on en déduit que l'indice de

D_i divise n pour tout i, en choisissant j tel que $p_i \nmid d_j$. L'indice de D divise donc n, ce qu'il fallait démontrer. Le cas de $SL_1(A)$, pour une algèbre simple centrale A de degré n, se ramène au précédent de façon très simple, puisque la flèche $H^1(k, PGL_1(A)) \longrightarrow H^2(k, \mathrm{Z}(GL_1(A)))$ se factorise par $H^2(k, \mathrm{Z}(SL_1(A))) = H^2(k, \mu_n)$. $\square$

Cette proposition n'est pas capitale dans la construction des contre-exemples; néanmoins, elle est fort utile pour en assurer le caractère minimal.

3 Construction de contre-exemples

3.1 Méthode générale

Nous identifions ici un groupe fini B au k-groupe constant qui lui est associé. On a alors une écriture canonique $\mathrm{SAut}(\overline{B}/k) = \mathrm{Aut}(B) \times \Gamma_k$.

Théorème 3.1 *Supposons donnés un groupe fini P et une extension (de groupes topologiques) $1 \longrightarrow P \longrightarrow E \longrightarrow \Gamma_k \longrightarrow 1$, non scindée, mais scindée au-dessus de tout p-Sylow de Γ_k. Il existe alors un k-groupe G' réductif connexe (le groupe multiplicatif d'une forme intérieure de l'algèbre $k[P]$), et un G'-espace homogène X, possédant les propriétés suivantes:*
(i) le stabilisateur d'un point géométrique de X est isomorphe à P,
(ii) X n'a pas de point k-rationnel, et il en est de même de toute compactification lisse de X,
(iii) X possède un 0-cycle de degré 1,
(iv) si le problème de Noether pour P admet une réponse positive, X est une variété rationnelle.

Démonstration. Appelons $\lambda : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SOut}(\overline{P}/k)$ le k-lien de E. Nous notons x la classe de E dans $Ш^2_{syl}(k, \overline{P}, \lambda)$. On a un diagramme commutatif évident, fonctoriel en k

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & GL_1(k[P]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Aut}(P) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(GL_1(k[P])), \end{array}$$

où les flèches verticales sont données par $g \mapsto i_g$. Ainsi, le lien λ se prolonge de façon naturelle en un lien $\tilde{\lambda} : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SOut}(GL_1(\overline{k}[P])/k)$. Le corps k étant de caractéristique 0, $\overline{k}[P]$ est une algèbre semi-simple, donc $GL_1(\overline{k}[P])$

est réductif. D'après la proposition 2.3, $H^2(k, GL_1(\overline{k}[P]), \tilde{\lambda})$ contient une classe neutre, dont nous choisissons un représentant $(\phi, 1)$, où $\phi : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SAut}(GL_1(\overline{k}[P])/k)$. Le morphisme ϕ se factorise en fait par le groupe des automorphismes k-semi-linéaires de la $\overline{k}$-algèbre $\overline{k}[P]$: cela découle simplement du fait que la flèche naturelle $\mathrm{Aut}(P) \longrightarrow \mathrm{Aut}(GL_1(k[P]))$ se factorise elle-même par le groupe des automorphismes de la k-algèbre $k[P]$. On obtient ainsi par descente une k-forme A de $k[P]$. Nous allons appliquer les résultats de la section 2 (dont nous conservons les notations) à $G = GL_1(A)$ et à $\overline{H} = \overline{P}$. L'hypothèse $\mathrm{C}_{\overline{G}}(\overline{H}) \subset \mathrm{Z}(\overline{G})$ est ici vérifiée: en effet, un élément de $\overline{k}[P]$ commutant avec P commute bien avec $\overline{k}[P]$ tout entier. De plus, le lien λ est, par construction de A, un élément de L. Par la proposition 2.6, $i^2_*(x)$ est donc neutre. D'après la proposition 2.5, il existe une forme intérieure G' de G (qui est donc tout comme G le groupe multiplicatif d'une k-algèbre de dimension finie) et un espace homogène X sous G', dont l'image par δ_1 est x. Montrons qu'une compactification lisse de X n'a pas de point k-rationnel; autrement dit, que $X(k((t)))$ est vide. Si $X(k((t)))$ était non vide, d'après la proposition 2.5, le pullback de E par la surjection canonique $\Gamma_{k((t))} \longrightarrow \Gamma_k$ serait scindé. Mais alors, l'extension E elle-même serait scindée, puisque la surjection $\Gamma_{k((t))} \longrightarrow \Gamma_k$ l'est, ce qui est absurde. Nous remercions Ofer Gabber pour nous avoir signalé cet argument. Démontrons maintenant l'assertion iii). D'après une généralisation du théorème 90 de Hilbert ([Kn], 1.7, exemple 1), G' n'a pas de cohomologie en degré 1. Par le dernier point de la proposition 2.5, X a donc un point rationnel sur toutes les extensions de k correspondant à des p-Sylow de Γ_k, c'est-à-dire que X possède un 0-cycle de degré 1. Le reste est immédiat, vu l'isomorphisme birationnel $\overline{X} \simeq P\backslash\overline{k}[P]$.$\square$

3.2 Un contre-exemple particulier

Nous expliquons maintenant comment un raffinement de la construction précédente permet, sur un corps local ou sur un corps de nombres, d'obtenir comme contre-exemple un espace homogène sous un groupe spécial linéaire, qui soit une variété rationnelle.

3.2.1 Une extension de groupes

Dans cette section, nous notons $P = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$, le groupe des quaternions, et $Q = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3$. Nous construisons un exemple

d'extension
$$1 \longrightarrow P \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$
scindée au-dessus de tout p-Sylow de Q, mais telle qu'aucun sous-groupe abélien de E ne s'envoie de façon surjective sur Q. En particulier, cette extension est non scindée.
L'injection
$$P \xrightarrow{\rho} SL_2(\mathbb{F}_3)$$
$$i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$j \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
fait de P l'unique 2-Sylow de $SL_2(\mathbb{F}_3)$. Nous notons σ l'élément $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_3)$, d'ordre 3. Considérons le produit π des projections $P \longrightarrow P/\mathrm{Z}(P)$ et $SL_2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow SL_2(\mathbb{F}_3)/P$. Le produit $P/\mathrm{Z}(P) \times SL_2(\mathbb{F}_3)/P$ étant isomorphe à Q, nous pouvons identifier π au morphisme explicite suivant, identiquement nul sur $\mathrm{Z}(P) \times P$:
$$P \times SL_2(\mathbb{F}_3) \xrightarrow{\pi} Q$$
$$(i, 1) \mapsto (1, 0, 0),\ (j, 1) \mapsto (0, 1, 0),\ (1, \sigma) \mapsto (0, 0, 1).$$
Appelons E le quotient de $P \times SL_2(\mathbb{F}_3)$ par le sous-groupe distingué à deux éléments engendré par $(-1, -1)$, et ρ le monomorphisme obtenu par composition de $1 \times \rho : P \longrightarrow P \times SL_2(\mathbb{F}_3)$ (1 désignant le morphisme nul) et de la projection canonique $P \times SL_2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow E$. Il est immédiat que π induit par passage au quotient une suite exacte
$$1 \longrightarrow P \xrightarrow{\rho} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1. \tag{2}$$

Lemme 3.2 *Les propriétés suivantes sont vérifiées:*
(i) La suite exacte (2) est scindée au-dessus de tout p-Sylow de Q.
(ii) Aucun sous-groupe abélien de E ne se projette de façon surjective sur Q.

Démonstration. C'est un exercice élémentaire. Tout d'abord, le sous-groupe de E engendré par $\overline{(1, \sigma)}$ (resp par $\overline{(i, i)}$ et $\overline{(j, j)}$) se projette isomorphiquement sur le 3-Sylow (resp le 2-Sylow) de Q. Ceci démontre le premier point. Supposons donnés deux éléments x et y de E, dont les images par π sont

$(1,0,0)$ et $(0,1,1)$ respectivement. Montrons alors que x et y ne commutent pas, ce qui prouvera la seconde assertion. De la conjugaison des 3-Sylow de E résulte que l'on peut supposer, quitte à conjuguer x et y par un même élément, que $y = \overline{(j,\sigma)}$. Ecrivant $x = \overline{(i,p)}$, pour $p \in P \subset SL_2(\mathbb{F}_3)$, on constate que x et y commutent si et seulement si $p\sigma p^{-1} = -\sigma$. L'élément de gauche étant d'ordre 3, et celui de droite d'ordre 6, cette égalité est impossible. $\square$

Un premier contre-exemple. Prenons le corps k égal à $\mathbb{C}((x))((y))$. On a alors un isomorphisme $\Gamma_k \simeq \widehat{\mathbb{Z}} \times \widehat{\mathbb{Z}}$. Choisissons une surjection quelconque $\Gamma_k \longrightarrow Q = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/6$. Le lemme précédent assure que le pullback de (2) par cette surjection est non scindé, et l'on peut appliquer le théorème 3.1, obtenant ainsi le premier contre-exemple promis dans l'introduction. L'espace homogène X ainsi construit est une variété rationnelle: en effet, le problème de Noether pour le groupe des quaternions à 8 éléments a une réponse positive (cf [Se2], 4.3).

3.2.2 Propriétés cohomologiques de l'extension (2)

Nous commençons par un lemme élémentaire:

Lemme 3.3 *(i) Le groupe Out(P) est isomorphe à S_3, vu comme groupe des permutations de l'ensemble $\{\{i,-i\},\{j,-j\},\{k,-k\}\}$.*
(ii) La suite exacte $1 \longrightarrow Inn(P) \longrightarrow Aut(P) \xrightarrow{\pi} Out(P) \longrightarrow 1$ est scindée.

Démonstration. Il est facile de voir qu'un automorphisme de P induit la permutation triviale si et seulement si il est intérieur. Nous obtenons ainsi une injection naturelle $\mathrm{Out}(P) \xrightarrow{\rho} S_3$. Pour prouver le lemme, il suffit dès lors de construire une section $S_3 \longrightarrow \mathrm{Aut}(P)$ du morphisme $\rho \circ \pi$. Celle-ci s'obtient comme suit. A la transposition $(\{i,-i\},\{j,-j\})$, on associe l'automorphisme de P envoyant i sur $-j$ et j sur $-i$ (et par conséquent k sur $-k$). A la permutation circulaire $(\{i,-i\},\{j,-j\},\{k,-k\})$, on associe l'automorphisme de P envoyant i sur j et j sur k (et par conséquent k sur i). Il est facile de vérifier que l'on définit bien ainsi la section cherchée. $\square$

Considérons l'extension de groupe naturelle suivante, où la première flèche identifie $\mathbb{Z}/2$ au centre de P:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow P \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 1. \tag{3}$$

Cette extension induit une application bord:

$$H^1(k, \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2) = H^1(k, \mathbb{Z}/2) \times H^1(k, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\delta_P} H^2(k, \mathbb{Z}/2).$$

Cette application, naturellement fonctorielle en k, peut être vue comme un invariant cohomologique au sens de [GMS], chapitre 1 (où l'on prend $k_0 = \mathbb{Q}$).

Lemme 3.4 *L'application δ_P est donnée par la formule:*
$\delta_P\big(x, y\big) = x \cup y + (-1) \cup xy$, *pour tout* $x, y \in k^*/k^{*2}$.

Démonstration. D'après le théorème 16.4 de [GMS], il existe $a, b, c, d \in k^*/k^{*2}$, et $\epsilon \in \mathbb{Z}/2$ tels que :

$$\delta_P\big(x, y\big) = a \cup b + c \cup x + d \cup y + \epsilon x \cup y.$$

Il est clair que l'on peut choisir a et b égaux à 1. Suivant le lemme 3.3, S_3 agit sur P, induisant une action de S_3 sur $P/\mathrm{Z}(P) = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Le fait (évident) que S_3 agisse trivialement sur $Z(P) = \mathbb{Z}/2$ permet d'affirmer que δ_P est invariant par l'action de S_3 induite sur les groupes de cohomologie. Autrement dit, pour tout $\sigma \in S_3$, on a $\delta_P \circ \sigma = \delta_P$. En prenant pour σ une permutation, on en tire $\delta_P\big(x, y\big) = \delta_P\big(y, x\big)$; on peut donc choisir c égal à d. En prenant pour σ un 3-cycle, on obtient $\delta_P\big(x, y\big) = \delta_P\big(y, xy\big)$; autrement dit, après un calcul très simple, $c \cup y = \epsilon y \cup y = \epsilon(-1) \cup y$, et ce pour tout $y \in k^*/k^{*2}$. Si ϵ était nul, on en déduirait que δ_P lui-même, vu comme invariant cohomologique, serait nul. Ceci n'est pas le cas: en effet, il est facile de vérifier que le morphisme $x \mapsto \delta_P\big(x, 0\big)$ coincide avec la flèche $H^1(k, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^2(k, \mathbb{Z}/2)$ tirée de la suite exacte longue de cohomologie associé à la suite exacte $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z}/4 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$. Or il est bien connu que cette flèche est le cup-produit par (-1), qui est un invariant non nul. Ainsi, ϵ est égal à 1, et l'on peut choisir c égal à (-1), ce qui clôt la démonstration du lemme.$\square$

Considérons l'extension (2) de la section 3.2.1. Notre prochain objectif est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le pull-back de cette extension par un élément de $H^1(k, Q)$ soit scindé.
Composons le lien $\lambda : Q \longrightarrow \mathrm{Out}(P)$ associé à cette extension avec la section $\mathrm{Out}(P) \longrightarrow \mathrm{Aut}(P)$ du lemme 3.3. Nous obtenons ainsi une action de Q sur P; $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \subset Q$ agissant trivialement, et $\mathbb{Z}/3 \subset Q$ par permutation cyclique de i, j, k. Appelons E' le produit semi-direct $P \rtimes Q$ pour cette

action, et ξ (resp. n) la classe de l'extension (2) (resp. $1 \longrightarrow P \longrightarrow E' \longrightarrow Q \longrightarrow 1$) dans $H^2(Q, P, \lambda)$. D'après la proposition 2.2, il existe un unique $\alpha \in H^2(Q, \mathbb{Z}/2)$ tel que $\xi = \alpha.n$. L'injection naturelle $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{i} Q$ induit un isomorphisme $H^2(Q, \mathbb{Z}/2) \simeq H^2(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$, que nous utiliserons pour identifier ces deux groupes.

Lemme 3.5 *α est la classe de l'extension (3).*

Démonstration. Remarquons que le pull-back de E (resp. E') par i n'est autre que le produit semi-direct $P \rtimes \mathrm{Inn}(P)$ pour l'action naturelle de $\mathrm{Inn}(P)$ sur P (resp le produit $P \times \mathrm{Inn}(P)$). L'assertion à prouver est alors une conséquence du lemme suivant :

Lemme 3.6 *Soit G un groupe fini. Soit $\kappa : Inn(G) \longrightarrow Out(G)$ le lien trivial. Soit $\mu \in H^2(Inn(G), Z(G))$ la classe de l'extension $1 \longrightarrow Z(G) \longrightarrow G \longrightarrow Inn(G) \longrightarrow 1$. Soit a (resp. b) la classe de l'extension triviale (resp. du produit semi-direct $G \rtimes Inn(G)$ pour l'action naturelle de $Inn(G)$ sur G) dans $H^2(Inn(G), G, \kappa)$. On a la formule :*

$$b = (-\mu).a$$

Démonstration. Soit $c : \mathrm{Inn}(G) \longrightarrow G$ une section (ensembliste) de la projection naturelle. La classe $(-\mu).a$ est représentée par le 2-cocycle $z_1 = (1, c_\sigma c_\tau {c_{\sigma\tau}}^{-1})$, et b par $z_2 = (i_\sigma, 1)$. Il est alors clair que ces cocycles sont équivalents : on a la relation $c.z_1 = z_2$.$\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat promis. Si $z \in H^1(k, \mathbb{Z}/3)$, on note ${}^zP$ la forme tordue de P par l'action naturelle de $\mathbb{Z}/3$ sur P donnée par E'. Lorsque $z \neq 0$, on note l l'extension cubique de k correspondante, et σ le générateur de Γ_k/Γ_l dont l'image par z est 1.

Proposition 3.7 *Soit $h = (x, y, z) \in H^1(k, Q) = H^1(k, \mathbb{Z}/2) \times H^1(k, \mathbb{Z}/2) \times H^1(k, \mathbb{Z}/3)$. On a la formule $h^*\big(\alpha\big) = \delta_P\big(x, y\big) = x \cup y + (-1) \cup xy$.*
Le pull-back de (2) par h est scindé si et seulement si $z = 0$ ou s'il existe $a \in l^*/l^{*2}$ vérifiant $Cor_{l/k}\big(-a \cup {}^\sigma a\big) = h^*\big(\alpha\big)$.

Démonstration. La première formule découle des lemmes 3.4 et 3.5. Le reste de la proposition est évident si $z = 0$, puisque le 2-Sylow de Q se relève dans E. On suppose donc $z \neq 0$. D'après la proposition 2.2, le pull-back de (2) par h est scindé si et seulement si $h^*\big(\alpha\big)$ est dans l'image du bord $H^1(k, {}^zP/\mathrm{Z}({}^zP)) \xrightarrow{\delta_{{}^zP}} H^2(k, \mathbb{Z}/2)$ que nous allons maintenant calculer. Le Γ_k-module ${}^zP/\mathrm{Z}({}^zP)$ est isomorphe au noyau N de la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow (\mathbb{Z}/2)[\Gamma_k/\Gamma_l] \xrightarrow{aug} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0.$$

En effet, σ agit sur ${}^zP$ par permutation cyclique de i, j, k. Le morphisme ${}^zP/\mathrm{Z}({}^zP) \longrightarrow (\mathbb{Z}/2)[\Gamma_k/\Gamma_l]$ donné par $\bar{i} \mapsto (1+\sigma)$ et $\bar{j} \mapsto (\sigma + \sigma^2)$ identifie ainsi ${}^zP/\mathrm{Z}({}^zP)$ à N. En utilisant la suite exacte de cohomologie associée, on voit alors que $H^1(k, N)$ est isomorphe au noyau de la corestriction $H^1(l, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{Cor} H^1(k, \mathbb{Z}/2)$. Le composé $\mathrm{Cor}_{l/k} \circ \mathrm{Res}_{l/k}$ étant l'identité de $H^1(k, \mathbb{Z}/2)$, la flèche $\delta_{{}^zP}$ s'identifie au composé
$\mathrm{Ker}(l^*/l^{*2} \xrightarrow{N} k^*/k^{*2}) = \mathrm{Ker}(H^1(k, (\mathbb{Z}/2)[\Gamma_k/\Gamma_l]) \longrightarrow H^1(k, \mathbb{Z}/2)) \xrightarrow{Res}$ $\mathrm{Ker}(H^1(l, (\mathbb{Z}/2)[\Gamma_k/\Gamma_l]) \longrightarrow H^1(l, \mathbb{Z}/2)) \simeq H^1(l, \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\delta_P} H^2(l, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{Cor}$ $H^2(k, \mathbb{Z}/2)$,
où l'isomorphisme du milieu est donné par la projection sur deux facteurs (le choix de ces facteurs est sans importance). D'après le lemme 3.4, pour $a \in \mathrm{Ker}(l^*/l^{*2} \xrightarrow{N} k^*/k^{*2})$, on a $\delta_{{}^zP}\big(a\big) = Cor_{l/k}\big(a \cup {}^\sigma a + (-1) \cup a\, {}^\sigma a\big) = Cor_{l/k}\big(-a \cup {}^\sigma a\big)$. Nous avons ainsi démontré la proposition, avec la condition supplémentaire $a \in \mathrm{Ker}(l^*/l^{*2} \xrightarrow{N} k^*/k^{*2})$. Il est facile de voir que cette condition est en fait superflue: en effet, l'élément $Cor_{l/k}\big(-a \cup {}^\sigma a\big)$ n'est pas modifié si l'on remplace a par $a\, {}^\sigma a$, et la norme de ce dernier élément est toujours un carré. □

Comme conséquence du calcul de $\delta_{{}^zP}$, nous obtenons le:

Corollaire 3.8 *Supposons que k est un corps local, de corps résiduel κ. Si la caractéristique de κ est différente de 2, on a $\delta_{{}^zP} = 0$. Pour que le pull-back de (2) par h soit scindé, il faut et il suffit donc que $h^*\big(\alpha\big) = 0$.*

Démonstration. Soit $a \in \mathrm{Ker}(l^* \xrightarrow{N} k^*/k^{*2})$. Ecrivons $a = \pi^r u$, avec π une uniformisante de l et u une unité; r est donc pair. On a $Cor_{l/k}\big((a) \cup ({}^\sigma a)\big) = Cor_{l/k}\big((\pi^r u) \cup ({}^\sigma \pi^r\, {}^\sigma u)\big) = Cor_{l/k}\big((u) \cup ({}^\sigma u)\big) = 0.$□

3.2.3 Le contre-exemple sur un corps p-adique ou sur un corps de nombres

Dans cette section, k est soit un corps p-adique, avec $p \neq 2$, soit un corps de nombres. On suppose que k contient les racines quatrièmes de l'unité. Nous allons montrer le

Théorème 3.9 *Il existe une algèbre de quaternions D/k, et un espace homogène X sous $PGL_1(D)$, à stabilisateurs isomorphes à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, sans point k-rationnel, mais possédant un 0-cycle de degré 1. De plus, X est une variété rationnelle, et une compactification lisse de X ne peut pas posséder de point k-rationnel.*

Démonstration. Nous donnons la démonstration lorsque k est un corps de nombres; le lecteur pourra aisément se convaincre qu'elle contient celle où k est p-adique. Choisissons $x, y \in H^1(k, \mathbb{Z}/2)$ tels que l'image locale de $\gamma := \delta_P\big(x, y\big) = x \cup y$ en une place ultramétrique ν de k, dont le corps résiduel n'est pas de caractéristique 2, soit non nulle. Choisissons $z \in H^1(k, \mathbb{Z}/3)$ tel que ν soit inerte pour l'extension l/k.
Notons $h = (x, y, z)$ l'élément de $H^1(k, Q)$ ainsi construit. Appelons F le pull-back de l'extension (2) par h, elle est donc non scindée d'après le corollaire 3.8. Notons H l'algèbre (déployée) des quaternions usuels sur k. Pour construire l'espace homogène X, suivons maintenant la méthode du théorème 3.1 à l'extension F, en la modifiant quelque peu, de façon à obtenir un espace homogène non pas sous le groupe multiplicatif d'une k-algèbre, mais sous le groupe spécial linéaire d'une algèbre de quaternions. Le théorème 3.1 pourrait s'appliquer sans changement, cela dit, les modifications mineures que nous allons faire permettent de se rapprocher d'un exemple minimal. Remplaçons donc $k[P]$ par H, et $GL_1(k[P])$ par $SL_1(H)$, le morphisme $P \longrightarrow SL_1(H)$ étant l'injection naturelle. On laisse au lecteur le soin de vérifier que les arguments utilisés restent valables dans cette nouvelle situation, avec les modifications évidentes qui s'imposent. On peut même ici se passer du recours à [Bo], proposition 3.1, en prenant pour $\tilde{\lambda}$ le composé $\Gamma_k \xrightarrow{\lambda} \mathrm{SOut}(\overline{P}/k) \xrightarrow{s} \mathrm{SAut}(\overline{P}/k) \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{SL_1(H)}/k)$, où s est naturellement induite par la section $\mathrm{Out}(P) \longrightarrow \mathrm{Aut}(P)$ du lemme 3.3. Le groupe G' ainsi obtenu est de la forme $SL_1(D)$, pour une algèbre simple centrale D. En vertu du principe de Hasse, G' étant semi-simple simplement connexe et k un corps de nombres totalement imaginaire, tout G'-torseur est trivial. Plus précisément, G' est ici le groupe spécial linéaire d'une k-algèbre simple, et

il suffit de combiner un théorème d'Eichler ([Kn], 5.4) à la surjectivité de la norme réduite pour les algèbres simples sur un corps local ([Kn], 4.3, lemme 1). D'après la démonstration de la rationalité de $P\backslash\mathbb{Q}[P]$ figurant dans [Se2], 4.3, l'espace homogène X obtenu est une variété rationnelle. Pour terminer la démonstration, il reste à constater que le centre de $\overline{G'}$ est exactement le centre de P; par suite, X est en fait un $PGL_1(D)$-espace homogène, à stabilisateurs isomorphes à $P/\mathrm{Z}(P) = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2.\square$

Bibliographie

[Bo] M. Borovoi. — *Abelianization of the second nonabelian Galois Cohomology*, Duke Math. J. **72** (1993), 217-239.

[Do] J.-C. Douai. — *2-cohomologie galoisienne des groupes semi-simples*, thèse, Université de Lille I, 1976.

[FSS] Y. Z. Flicker, C. Scheiderer, R. Sujatha. — *Grothendieck's theorem on non-abelian H^2 and local-global principles*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 731-750.

[GMS] S. Garibaldi, A. Merkurjev, J.-P. Serre. — *Cohomological invariants in Galois Cohomology*, University Lecture Series (Providence, R.I.) **28** (2003).

[Kn] M. Kneser. — *Lectures on Galois Cohomology of classical groups*, Lecture Notes, Tata Institute (1969).

[Pa] R. Parimala. — *Homogeneous varieties- zero cycles of degree one versus rational points*, prépublication, janvier 2004.

[Se1] J.-P. Serre. — *Cohomologie Galoisienne*, Lecture Notes in Math. 5, 5ième édition (1994), Springer-Verlag.

[Se2] J.-P. Serre. — *Topics in Galois Theory*, Research Notes in Math. 1 (1992), AK Peters Ltd.

[Sp] T.A. Springer. — *Nonabelian H^2 in Galois Cohomology*, in *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups*, Proc. Symp. Pure Math. **9**, Amer. Math. Soc. (1966), 164-182.

[Su] M. Suzuki. — *Group Theory I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **247**, Springer-Verlag.

[To] B. Totaro. — *Splitting fields for E_8-torsors*, Duke Math. J., à paraître.