Géométrie birationnelle équivariante des grassmanniennes

Mathieu Florence

Janvier 2010

Résumé. Soit K un corps infini et A une K-algèbre de dimension finie n. Soit $0 < r < n$ un entier. Le résultat principal de cet article est le suivant. Sous certaines hypothèses sur A (satisfaites si A est étale), la grassmannienne $\mathbb{G}(r, A)$ est K-birationnelle, de manière $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariante, au produit de $\mathbb{G}(\mathrm{pgcd}(r, n), A)$ par un espace projectif sur lequel $\mathrm{PGL}_1(A)$ agit trivialement (théorème 3.3). On en déduit par torsion plusieurs résultats nouveaux sur les variétés de Severi-Brauer généralisées, liés à la conjecture d'Amitsur. Les plus significatifs sont les suivants.
i) Si A est une K-algèbre simple centrale de degré n, et si $0 < r < n$ est un entier, la r-ième variété de Severi-Brauer généralisée $SB(r, A)$ est K-birationnelle au produit de $SB(\mathrm{pgcd}(r, n), A)$ par un K-espace projectif de dimension convenable.
ii) Si A et B sont deux K-algèbres simples centrales de degrés premiers entre eux, $SB(A \otimes_K B)$ est birationnelle au produit de $SB(A) \times_K SB(B)$ par un K-espace projectif de dimension convenable.

Introduction

Soit K un corps. En 1955, Amitsur ([Ami]) a formulé la conjecture suivante. Soient A, B deux K-algèbres simples centrales de même degré n (racine carrée de la dimension sur K). Alors les variétés de Severi-Brauer associées à A et B, notées respectivement $SB(A)$ et $SB(B)$, sont K-birationnelles si et seulement si les sous-groupes cycliques engendrés par les classes de A et de B dans le groupe de Brauer de K coïncident. Amitsur a démontré l'implication 'seulement si' de sa conjecture. En dépit de résultats partiels obtenus notamment par Roquette, Tregub et Krashen (cf. par exemple [Kra] pour une exposition de ces résultats), cette conjecture reste encore largement ouverte. Il n'est cependant pas difficile de démontrer que, si les sous-groupes engendrés par les classes de A et de B dans le groupe de Brauer de K coïncident, alors $SB(A)$ et $SB(B)$ sont *stablement* birationnellement isomorphes. En effet, soit E le corps des fonctions de $SB(A)$. L'extension E/K déploie A, donc aussi B. Par suite, $SB(B) \times_K E$ est E-isomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}_E^{n-1}$. Donc $SB(B) \times_K SB(A)$ est K-birationnellement isomorphe à $\mathbb{P}_K^{n-1} \times_K SB(A)$. En inversant les rôles de A et de B, on obtient que $\mathbb{P}_K^{n-1} \times_K SB(A)$ est K-birationnelle à $\mathbb{P}_K^{n-1} \times_K SB(B)$, cqfd.

En général, nous dirons ici que deux K-variétés X et Y sont stablement K-birationnelles s'il existe deux entiers n et m tels que $X \times_K \mathbb{P}_K^n$ est K-birationnelle à $Y \times_K \mathbb{P}_K^m$. En s'inspirant de la preuve précédente, le lecteur pourra démontrer les propositions suivantes.

i) Soient A, B deux K-algèbres simples centrales de degrés premiers entre eux. Alors $SB(A \otimes_K B)$ est stablement K-birationnelle à $SB(A) \times_K SB(B)$.

ii) Soit A une K-algèbre simple centrale de degré n. Soit $r < n$ un entier positif. Soit $SB(r, A)$ la r-ième variété de Severi-Brauer généralisée associée à A; c'est la K-forme de la grassmannienne $\mathbb{G}(r, n)$ qui représente les idéaux à droite de A, de dimension rn. Alors $SB(r, A)$ et $SB(pgcd(n, r), A)$ sont stablement K-birationnelles.

On peut formuler les propriétés plus fines suivantes, et se demander si elles sont vraies.

i') Soient A, B deux K-algèbres simples centrales de degrés premiers entre eux. Alors $SB(A \otimes_K B)$ est K-birationnelle au produit de $SB(A) \times_K SB(B)$ par un espace projectif de dimension convenable.

ii') Mêmes hypothèses que ii), avec la conclusion: $SB(r, A)$ est K-birationnelle au produit de $SB(pgcd(n, r), A)$ par un espace projectif de dimension convenable.

De même que la conjecture d'Amitsur, le passage de i) à i') (resp. de ii) à ii')) peut être vu comme un cas particulier d'un problème de 'simplification par l'espace affine': si X et Y sont deux K-variétés telles que $X \times_K \mathbb{A}^1_K$ est K-birationnelle à $Y \times_K \mathbb{A}^1_K$, est-il vrai que X et Y sont K-birationnelles? Même si X est K-rationnelle, on sait que la réponse à cette question, qui n'est alors autre que la conjecture de Zariski, est en général négative ([BCSS]).
Dans cette article, nous étudions la géométrie birationnelle des grassmanniennes de K-algèbres de dimension finie. Plus précisément, soit A une K-algèbre de dimension finie. Pour tout entier r compris entre 0 et la dimension de A, la grassmannienne $\mathbb{G}(r, A)$ des r-plans de A est naturellement munie d'une action du K-groupe algébrique $\mathrm{GL}_1(A)$, dont les K-points sont les éléments inversibles de A. On s'intéresse, par une approche nouvelle à la connaissance de l'auteur, à certaines propriétés birationnelles de cette action. Le résultat principal est le théorème 3.3. Il affirme que, sous certaines hypothèses sur A (vérifiées si A/K est étale), la K-variété $\mathbb{G}(r, A)$ est K-birationnelle, de manière $\mathrm{GL}_1(A)$-équivariante, au produit de $\mathbb{G}(pgcd(r, n), A)$ par un espace projectif sur lequel $\mathrm{GL}_1(A)$ agit trivialement. Les isomorphismes birationnels obtenus sont non triviaux. Leur complexité dépend de façon cruciale du nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide, prenant en entrée les entiers n et r, et donnant leur plus grand commun diviseur en sortie.
L'article est structuré comme suit. Dans la section 2, nous introduisons la notion de *bonne* K-algèbre (définition 2.9) ainsi que les variétés auxiliaires $G(r, s, A)$ associées à une bonne K-algèbre A (définition 2.12). On dégage ensuite certaines applications birationnelles et équivariantes entre ces variétés (définition 2.18), qui motivent a posteriori leur introduction. Le lecteur remarquera que la difficulté technique majeure de cet article consiste à vérifier que les ouverts de définition de ces applications rationnelles sont non vides.
Dans la section 3, nous démontrons le théorème principal (théorème 3.3). Enfin, nous exposons dans la section 4 quelques applications, en majeure partie nouvelles, de ce théorème. Entre autres, nous démontrons la validité de i') et de ii'), ainsi

que, dans certains cas, la conjecture d'Amitsur généralisée énoncée par Krashen dans [Kra].

Remerciements

1. Notations, rappels

Dans toute la suite, on désigne par K un corps infini, et par $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Introduisons un bref dictionnaire destiné à alléger les énoncés. Ainsi, les termes 'vectoriel', 'algèbre', 'variété', 'variété rationnelle', 'groupe algébrique' signifient respectivement, sauf mention du contraire, 'K-espace vectoriel de dimension finie', 'K-algèbre de dimension finie', 'K-schéma de type fini', 'variété K-rationnelle', 'K-groupe algébrique linéaire'. Si X et Y sont deux variétés (resp. vectoriels), on note par $X \times Y$ (resp. $X \otimes Y$) la variété $X \times_K Y$ (resp. le vectoriel $X \otimes_K Y$). Soit V un vectoriel. On note V^* le dual de V, et $\mathbb{A}(V)$ l'espace affine de V; c'est la variété dont le foncteur des points est $\mathbb{A}(V)(A) = V \otimes_K A$ pour toute algèbre commutative A (non nécessairement de dimension finie). Si m est un entier positif, on note $\mathbb{G}(m, V)$ la grassmannienne des m-sous-vectoriels de V. On rappelle que sa dimension est $m(\dim V - m)$. L'espace projectif de V est $\mathbb{G}(1, V)$; on le désigne par $\mathbb{P}(V)$. Si $E \subset V$ est un sous-vectoriel, on pose $E^\perp = \{\phi \in V^*; \phi(E) = 0\}$. Si A est une algèbre, on note $\mathrm{GL}_1(A)$ le groupe algébrique dont l'ensemble des points dans une algèbre commutative B est le groupe des éléments inversibles de $A \otimes_K B$. On note $\mathrm{PGL}_1(A)$ le quotient $\mathrm{GL}_1(A)/\mathbb{G}_\mathrm{m}$; c'est l'ouvert de $\mathbb{P}(A)$ formé des droites dont tout élément non nul est inversible pour la multiplication de A. Le groupe algébrique $\mathrm{GL}_1(A)$ possède deux représentations évidentes qui seront considérées dans la suite. D'une part, il agit par multiplication à gauche sur le vectoriel A. D'autre part, il agit sur le vectoriel A^* par la formule

$$(a.\phi)(x) = \phi(a^{-1}x),$$

pour $a \in \mathrm{GL}_1(A)(K)$, $\phi \in A^*$ et $x \in A$. Pour tout entier m, ces représentations induisent une action naturelle de $\mathrm{PGL}_1(A)$ sur $\mathbb{G}(m, A)$ et sur $\mathbb{G}(m, A^*)$, capitale dans ce qui suit. Enfin, nous noterons les applications rationnelles par des flèches pleines, et non par des pointillés, comme l'on a coutume de faire. Ceci est justifié par le fait que la quasi-totalité des flèches considérées dans cet article sont des applications rationnelles, et ne saurait prêter à confusion.

2. Outils

2.1. Résultats généraux sur les torseurs.

Définition 2.1. *Soit G un groupe algébrique, agissant sur une variété non vide X de façon génériquement libre (i.e. il existe un ouvert Zariski dense de X, G-stable, où l'action est libre). Par un théorème de Gabriel (*[SGA3]*, Exposé V, Théorème 8.1), il existe alors un ouvert Zariski dense $U \subset X$, G-stable, tel que le quotient $U \longrightarrow U/G$ existe dans la catégorie des variétés, et est un G-torseur. Un ouvert U possédant cette propriété sera appelé bon pour l'action de G sur X.*

Lemme 2.2. *Soit G un groupe algébrique agissant sur une variété X, et soit P un G-torseur (disons à gauche). Le groupe G agit sur $P \times X$ par la formule $g.(p, x) = (gp, gx)$. Le quotient $P \times X \longrightarrow (P \times X)/G$ existe dans la catégorie des variétés, et est un G-torseur.*

Démonstration. [F], proposition 2.12 et remarque 2.13. $\square$

Définition 2.3. *Sous les hypothèses du lemme 2.2, on pose* ${}^P X = (P \times X)/G$. *On l'appelle le tordu de* X *par* P.

Lemme 2.4. *Soit* G *un groupe algébrique. Soit* $\pi : X \longrightarrow Y$ *un* G*-torseur (dans la catégorie des variétés). Soit* $y \in Y(K)$. *Posons* $P = \pi^{-1}(y)$*; c'est un* G*-torseur sur* K. *Alors le tordu* ${}^P X$ *possède un* K*-point canonique.*

Démonstration. Soit $\overline{K}$ une clôture séparable de K. Soit $p \in P(\overline{K})$ un point quelconque. Alors l'image de $(p, p) \in (P \times X)(K)$ dans le quotient $(P \times X)/G = {}^P X$ est indépendante du choix de p (vérification facile), donc est définie sur K par descente galoisienne. C'est le K-point en question. $\square$

2.2. Objets auxiliaires: définitions et premières propriétés. Nous introduisons ici les notions de bonne algèbre, ainsi que les variétés $G(r, s, U)$, qui jouent un rôle crucial dans la stratégie que nous adpotons pour démontrer le théorème 3.3. Leur intérêt peut sembler obscur à ce stade. Il deviendra, nous l'espérons, plus clair au fil de la lecture de cet article.

Définition 2.5. *Soit* A *une algèbre et* M *un* A*-module à gauche. Soit* E *(resp.* X*) un sous-vectoriel de* A *(resp. de* M*). Le produit de* X *par* E*, noté* $E.X$*, est par définition l'image de la composée*

$$E \otimes X \longrightarrow A \otimes M \longrightarrow M,$$

où le premier morphisme est le produit tensoriel des deux inclusions, et le second la loi donnant l'action de A *sur* M.
On définit de manière semblable un produit $X.E$ *pour les* A*-modules à droite.*

Définition 2.6. *Soit* A *une algèbre de dimension* n. *Notons par*

$$< .,. >: A \times A^* \longrightarrow K$$

l'accouplement canonique. Soient r, s, u *trois entiers positifs. Soit* $U \subset A$ *un sous-vectoriel de dimension* u.
On appelle $G'(r, s, U)$ *la sous-variété fermée de* $\mathbb{G}(r, A^*) \times \mathbb{G}(s, A)$ *donnée par*

$$\{(X, Y) \in \mathbb{G}(r, A^*) \times \mathbb{G}(s, A); < Y.U, X >= 0\}.$$

Remarque 2.7. En termes plus explicites, $G'(r, s, U)$ consiste en les couples $(X, Y) \in \mathbb{G}(r, A^*) \times \mathbb{G}(s, A)$ tels que

$$\phi(yu) = 0$$

pour tous $\phi \in X$, $y \in Y$ et $u \in U$. En particulier:
si $U = \{0\}$, on a $G'(r, s, U) = \mathbb{G}(r, A^*) \times \mathbb{G}(s, A)$;
si U est la droite de A dirigée par l'identité, $G'(r, s, U)$ est formé des couples $(X, Y) \in \mathbb{G}(r, A^*) \times \mathbb{G}(s, A)$ qui sont orthogonaux pour l'accouplement canonique.

Lemme 2.8. *On conserve les objets et les notations de la définition 2.6. Les assertions suivantes sont vraies.*

i) $G'(r, s, U)$ *est munie d'une action naturelle de* $\mathrm{PGL}_1(A)$.
ii) La fibre de la première projection $\pi'_1 : G'(r, s, U) \longrightarrow \mathbb{G}(r, A^*)$ *(resp. de la seconde projection* $\pi'_2 : G'(r, s, U) \longrightarrow \mathbb{G}(s, A)$*) en* $X \in \mathbb{G}(r, A^*)(K)$ *(resp.* $Y \in \mathbb{G}(s, A)(K)$*) est* $\mathbb{G}(s, (U.X)^{\perp})$ *(resp.* $\mathbb{G}(r, (Y.U)^{\perp})$*). On a l'assertion analogue en remplaçant* K *par une extension quelconque de* K.

iii) Supposons que $n \geq ru+s$ et $n \geq su+r$. Alors les deux projections précédentes sont dominantes, et $G'(r,s,U)$ est une variété géométriquement irréductible.

Démonstration. Pour le premier point, on constate tout de suite que l'action naturelle de $\mathrm{PGL}_1(A)$ sur $\mathbb{G}(r,A^*) \times \mathbb{G}(s,A)$ laisse $G'(r,s,U)$ stable (cf. section 1 pour la définition de cette action). L'assertion ii) est immédiate. Démontrons iii). On a $\dim \mathbb{G}(s,(U.X)^\perp) = s(\dim(U.X)^\perp - s) \geq s(n - ru - s) \geq 0$, et l'inégalité analogue pour $\mathbb{G}(r,(Y.U)^\perp)$, ce qui montre que les projections sont dominantes. Pour montrer que $G'(r,s,U)$ est géométriquement irréductible, on peut supposer K algébriquement clos. Soit $C \subset G'(r,s,U)$ une composante irréductible, telle que $\pi'_{1|C}$ (la restriction de π'_1 à C) soit dominante. Supposons qu'il existe un point $x \in G'(r,s,U)(K)$ qui n'appartienne pas à C. Puisque C est une variété projective et que $\pi'_{1|C}$ est dominante, il existe $y \in C(K)$ tel que $\pi'_1(x) = \pi'_1(y)$. La fibre de π'_1 en $\pi'_1(x)$ contient x et y; elle n'est donc pas irréductible. Ceci est absurde, puisque ladite fibre est une grassmannienne par le point ii). $\square$

Nous pouvons maintenant définir la notion de *bonne* algèbre, capitale dans ce qui suit.

Définition 2.9. *Soit A une algèbre, dont on note n la dimension. On dit qu'un sous-vectoriel U de A, de dimension u, est bon si la propriété qui suit est vraie. Pour tout entier positif t tel que $ut \leq n$, il existe $X \in \mathbb{G}(t,A^*)$ et $Y \in \mathbb{G}(t,A)$ tels que $U.X$ et $Y.U$ sont de dimension ut (les plus grandes possibles).*
On dit que A est bonne si, pour tout entier u compris entre 1 et $n-1$, les propriétés suivantes sont satisfaites.
(*) L'algèbre A possède un bon sous-vectoriel de dimension u.
(**) L'action de $\mathrm{PGL}_1(A)$ sur $\mathbb{G}(u,A)$ est génériquement libre.

A titre d'exercice, le lecteur pourra construire des algèbres qui ne satisfont aucune des deux conditions définissant une algèbre bonne. Je pense que toute algèbre séparable (i.e. de radical de Jacobson nul) est bonne. Cependant, je n'ai pu le montrer que dans le cas d'une algèbre étale, ce qui est suffisant pour obtenir de nombreuses applications.

Lemme 2.10. *Soit A une algèbre étale. Alors A est bonne.*

Démonstration. Montrons d'abord que A satisfait la condition (*) de la définition 2.9. Soit n la dimension de A. Soit $a \in A$ un générateur de A comme algèbre (un tel élément existe car K est infini). Une base de A comme vectoriel est donc $(1, a, a^2, \ldots, a^{n-1})$. Soient u, t deux entiers positifs tels que $ut \leq n$. Posons

$$Y := < 1, a, \ldots, a^{t-1} > \subset A$$

et

$$U := < 1, a^t, a^{2t}, \ldots a^{(u-1)t} > \subset A.$$

On vérifie tout de suite que

$$Y.U = < 1, a, \ldots, a^{ut-1} >,$$

on a donc bien $\dim(Y.U) = ut$. Puisque A/K est étale, l'application trace fournit un isomorphisme de A-modules

$$T : A \longrightarrow A^*,$$

$$a \mapsto (x \mapsto \mathrm{tr}(ax)).$$

Posant $X := T(Y)$, on voit que $\dim(U.X) = ut$.
Montrons maintenant que A satisfait la condition (**) de la définition 2.9. Soit $1 \leq u \leq n-1$ un entier. Montrons que l'action de $\mathrm{PGL}_1(A)$ sur $\mathbb{G}(u,A)$ est génériquement libre. Soit $K' := K(X_0,\ldots,X_{n-1})$ une extension transcendante pure de K, et $A' := K'[T]/ < T^n + X_{n-1}T^{n-1} + \ldots + X_1 T + X_0 >$. La propriété à démontrer étant de nature géométrique, et deux algèbres étales de même dimension étant géométriquement isomorphes, on peut remplacer K par K' et A par A'. On peut donc supposer que A et K sont les seules sous-algèbres de A. Il nous faut montrer que le stabilisateur schématique du point générique de $\mathbb{G}(u,A)$ est trivial. Puisque les points K-rationnels de $\mathbb{G}(u,A)$ sont Zariski-denses, il suffit de montrer que le stabilisateur schématique de tout point K-rationnel de $\mathbb{G}(u,A)$ est trivial. Soit donc $E \in \mathbb{G}(u,A)(K)$. Soit $\overline{K}[\epsilon]$ la $\overline{K}$-algèbre des nombres duaux. Vérifions que l'ensemble des $\overline{K}[\epsilon]$-points du stabilisateur schématique de E ne contient que l'élément neutre, i.e. que

$$\{a \in \mathrm{PGL}_1(A)(\overline{K}[\epsilon]), a.(E \otimes \overline{K}[\epsilon]) = E \otimes \overline{K}[\epsilon]\} = \{1\}.$$

L'ensemble

$$\{a \in A, a.E \subset E\}$$

est une sous-algèbre de A: c'est donc K ou A. On voit facilement que le second cas est exclu. Puisque $\overline{K}[\epsilon]$ est libre sur K, on en déduit

$$\overline{K}[\epsilon] = \{a \in A \otimes \overline{K}[\epsilon], a.(E \otimes \overline{K}[\epsilon]) \subset (E \otimes \overline{K}[\epsilon])\},$$

d'où l'assertion. □

Lemme 2.11. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Les assertions suivantes sont vraies.*

i) Soit u un entier compris entre 0 et n. L'ensemble des points de $\mathbb{G}(u,A)$ qui sont des bons sous-vectoriels est un ouvert non vide de $\mathbb{G}(u,A)$.
ii) Soit $0 \leq u_1 < u_2 < \ldots < u_j \leq n$ une collection de j entiers. Soit $\mathbb{D}_{u_1,\ldots,u_j}(A)$ la variété des drapeaux de A, de type $(u_1,\ldots,u_j)$. L'ensemble des points $(U_1,\ldots,U_j) \in \mathbb{D}_{u_1,\ldots,u_j}(A)$ tels que $U_1,\ldots,U_j$ sont des bons sous-vectoriels est un ouvert non vide de $\mathbb{D}_{u_1,\ldots,u_j}(A)$.

Démonstration. Le point i) résulte immédiatement du fait suivant. Soit t un entier positif tel que $n \geq ut$. Soit U_0 un bon sous-vectoriel de dimension u. Soit $X_0 \in \mathbb{G}(t,A^*)$ et $Y_0 \in \mathbb{G}(t,A)$ tels que $U_0.X_0$ et $Y_0.U_0$ sont de dimension ut. Pour $U \in \mathbb{G}(u,A)$, la condition "$U.X_0$ est de dimension ut" est équivalente à la condition "le morphisme canonique $U \otimes X_0 \stackrel{u\otimes x \mapsto ux}{\longrightarrow} A$ est injectif". C'est donc une condition ouverte (non-annulation d'un déterminant). Il en est de même de la condition "$Y_0.U$ est de dimension ut".
Montrons ii). Pour $i = 1\ldots j$, soit $\pi_i : \mathbb{D}_{u_1,\ldots,u_j}(A) \longrightarrow \mathbb{G}(u_i,A)$ le morphisme qui à un drapeau $(U_1,\ldots,U_j)$ associe U_i. Pour $i = 1\ldots j$, soit $\mathcal{U}_i \subset \mathbb{G}(u_i,A)$ l'ouvert non vide du point i). L'intersection des $\pi_i^{-1}(\mathcal{U}_i)$ est l'ouvert cherché. □

Définition 2.12. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soit $U \subset A$ un bon sous-vectoriel, de dimension u. Soient r et s deux entiers positifs tels que $n \geq ru+s$ et $n \geq su+r$. Soit U_1 (resp. U_2) l'ouvert non vide de $\mathbb{G}(r,A^*)$ (resp. $\mathbb{G}(s,A)$) formé des $X \in \mathbb{G}(r,A^*)$ (resp $Y \in \mathbb{G}(s,A)$) tels que* $\dim(U.X) = ru$ *(resp.* $\dim(Y.U) = su$*). Soit $\pi_1 : G'(r,s,U) \longrightarrow \mathbb{G}(r,A^*)$ et $\pi_2 : G'(r,s,U) \longrightarrow \mathbb{G}(s,A)$ les projections canoniques. On pose*

$$G(r,s,U) := \pi_1^{-1}(U_1) \cap \pi_2^{-1}(U_2).$$

Remarque 2.13. Par le point iii) du lemme 2.8, on voit que $G(r,s,U)$ est un ouvert non vide de la variété géométriquement irréductible $G'(r,s,U)$.

Lemme 2.14. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soit $U \subset A$ un bon sous-vectoriel, de dimension u. Soient r et s des entiers positifs tels que $n \geq ru+s$ et $n \geq su+r$. Les propriétés suivantes sont vraies.*

i) $G(r,s,U)$ est munie d'une action naturelle de $\mathrm{PGL}_1(A)$.
ii) $G(r,s,U)$ est une variété géométriquement irréductible et lisse.
Sa dimension est $r(n-r)+s(n-s)-sru$.

Démonstration. Pour i), on vérifie sans difficulé que l'ouvert $G(r,s,U) \subset G'(r,s,U)$ est stable par l'action de $\mathrm{PGL}_1(A)$.
Pour démontrer les autres points, on peut supposer K algébriquement clos.
La définition de $G'(r,s,U)$ montre que cette variété (irréductible par le point iii) du lemme 2.8) est localement définie par rsu équations. Par suite, elle est de codimension $\leq rsu$ dans $\mathbb{G}(r,A^*)\times\mathbb{G}(s,A)$, i.e. de dimension $\geq r(n-r)+s(n-s)-rsu$. Nous allons montrer que l'espace tangent en tout point K-rationnel de $G(r,s,U)$ est de dimension $r(n-r)+s(n-s)-rsu$, ce qui démontrera ii).
Soit donc $(X,Y) \in G(r,s,U)(K)$. On sait que l'espace tangent en X (resp. Y) de $\mathbb{G}(r,A^*)$ (resp. de $\mathbb{G}(s,A)$) s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}(X,A^*/X)$ (resp. à $\mathrm{Hom}(Y,A/Y)$). En différenciant les équations définissant $G'(r,s,U)$, on voit que son espace tangent de $G(r,s,U)$ en (X,Y) est le noyau du morphisme

$$\Theta : \mathrm{Hom}(X,A^*/X) \oplus \mathrm{Hom}(Y,A/Y) \longrightarrow (X \otimes Y \otimes U)^*,$$

$$(f,g) \mapsto (x \otimes y \otimes z \mapsto f(x)(yz) + x(g(y)z)).$$

Ce morphisme est surjectif. En effet, soit $\phi \in X^*$ et $\psi \in (Y \otimes U)^*$. Puisque le morphisme 'multiplication' $Y \otimes U \longrightarrow Y.U$ est un isomorphisme, il existe $\psi' \in A^*$ tel que $\psi'(yz) = \psi(y \otimes z)$ pour tous $y \in Y$, $z \in U$. Soit $f : X \longrightarrow A^*/X$ le morphisme envoyant $x \in X$ sur la classe de $\phi(x)\psi'$. On a $\Theta(f,0) = \phi \otimes \psi$. Puisque ϕ et ψ sont arbitraires, cela montre la surjectivité de Θ. L'espace tangent en (X,Y) à $G(r,s,U)$ est donc de dimension $r(n-r)+s(n-s)-sru$, cqfd. □

Le lemme suivant illustre l'utilisation que nous ferons des bons sous-vectoriels.

Lemme 2.15. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soit $n = qd$ une décomposition de n en produit de deux entiers. Soit $U \subset A$ un bon sous-vectoriel, de dimension $q-1$. Alors l'application rationnelle* $\mathrm{PGL}_1(A)$*-équivariante*

$$\Phi_U : \mathbb{G}(d,A) \longrightarrow \mathbb{G}(d,A^*),$$

$$Y \mapsto (Y.U)^{\perp},$$

est birationnelle.

Démonstration. Soient $\pi_1 : G(d,d,U) \longrightarrow \mathbb{G}(d,A^*)$ et $\pi_2 : G(d,d,U) \longrightarrow \mathbb{G}(d,A)$ les projections canoniques. D'après le lemme 2.8 ii), la fibre générique (au sens schématique) de π_1 est un ouvert non vide de la grassmannienne des sous-espaces de dimension d d'un vectoriel de dimension $n-(q-1)d = d$); c'est donc un point. Par suite, π_1 est birationnelle puisque sa source est intègre. On peut exhiber l'inverse birationnel de π_1 comme

$$X \in \mathbb{G}(d,A^*) \mapsto (X,(U.X)^{\perp}) \in G(d,d,U).$$

De même, π_2 est birationnelle. Puisque $\Phi_U = \pi_1 \circ \pi_2^{-1}$, on a l'assertion voulue. □

2.3. Flèches équivariantes. Nous allons maintenant dégager certaines applications rationnelles et équivariantes entre les variétés auxiliaires $G(r,s,U)$ (définition 2.18). Celles-ci sont naturelles et leur définition n'est pas bien compliquée, pourvu qu'on parvienne à démontrer que leur ouvert de définition est non vide. Ceci est l'objet des deux lemmes techniques suivants.

Lemme 2.16. *Les objets et notations sont ceux de la définition 2.12. Distinguons deux cas.*
i) Supposons $r \geq s$. Ecrivons la division euclidienne $r = sq + t$. Soit $U' \subset A$ un bon sous-vectoriel, contenant U, de dimension $u + q$. Les conditions
a) $\dim(Y.U') = s(u+q)$ *et*
b) $\dim(X \cap (Y.U')^{\perp}) = t$,
portant sur $(X,Y) \in G(r,s,U)$, définissent alors un ouvert non vide $\mathcal{U} \subset G(r,s,U)$.

ii) Supposons $s \geq r$. Ecrivons la division euclidienne $s = rq + t$. Soit $U' \subset A$ un bon sous-vectoriel, contenant U, de dimension $u + q$. Les conditions
a) $\dim(U'.X) = r(u+q)$ *et*
b) $\dim(Y \cap (U'.X)^{\perp}) = t$,
portant sur $(X,Y) \in G(r,s,U)$, définissent alors un ouvert non vide $\mathcal{U} \subset G(r,s,U)$.

Démonstration. Donnons la démonstration de i); celle de ii) est identique. Supposons satisfaite la condition a), qui est ouverte (elle exprime que le morphisme linéaire "multiplication" $Y \otimes U' \longrightarrow A$ est injectif). Soient A et B les vectoriels X et $(Y.U')^{\perp}$, vus comme sous-vectoriels de $C := (Y.U)^{\perp}$. La condition b) exprime alors simplement que $A^{\perp} \subset C^*$ et $B^{\perp} \subset C^*$ (de dimensions respectives $n - su - r$ et $n - su - (n - s(u+q)) = sq$) sont en somme directe. C'est aussi une condition ouverte. Il nous faut donc montrer que $\mathcal{U}$ est non vide. Soit $\pi : G(r,s,U) \longrightarrow \mathbb{G}(s,A)$ la projection, dominante par le lemme 2.14. Puisque A est bonne, il existe donc $(X',Y) \in G(r,s,U)(K)$ satisfaisant a). La fibre de π en $\pi(X',Y)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{G}(r,(Y.U)^{\perp})$. L'ouvert formé des $X \in \mathbb{G}(r,(Y.U)^{\perp})$ satisfaisant b) étant aussi non vide, n'importe quel point rationnel X de l'intersection de ces deux ouverts est tel que (X,Y) satisfait a) et b), cqfd. □

Lemme 2.17. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soient r,s,u trois entiers positifs, tels que $n \geq su + r$ et $n \geq ru + s$.*
Supposons d'abord $r \geq s$. Ecrivons la division euclidienne $r = qs + t$. Soient $U \subset U' \subset A$ deux bons sous-vectoriels, de dimensions u et $u+q$. On a

$$t(u+q) + s \leq s(u+q) + t = su + r \leq n;$$

on peut donc considérer la variété $G(t,s,U')$. D'après le lemme 2.16, on a une application rationnelle bien définie

$$\phi : G(r,s,U) \longrightarrow G'(t,s,U'),$$

au moyen de la formule

$$(X,Y) \mapsto (X \cap (Y.U')^{\perp}, Y).$$

Les propositions suivantes sont vraies.

i) ϕ est $\mathrm{PGL}_1(A)$- équivariante.
ii) Soit $\mathcal{U}$ l'ouvert du lemme 2.16. Soit L une extension de K. La fibre du morphisme $\phi_{|\mathcal{U}}$ en $(X,Y) \in G'(t,s,U')(L)$ est un ouvert de $\mathbb{G}_L(sq,(Y.U)^{\perp}/X)$.

iii) ϕ est dominante.

Si $s > r$, écrivons la division euclidienne $s = rq + t$. Soient $U \subset U' \subset A$ deux bons sous-vectoriels, de dimensions u et $u + q$. On définit de manière semblable une application rationnelle

$$\phi : G(r, s, U) \longrightarrow G'(r, t, U'),$$

au moyen de la formule

$$(X, Y) \mapsto (X, Y \cap (U'.X)^{\perp}).$$

On a alors les assertions analogues à i), ii) et iii).

Démonstration. La première assertion est une vérification facile. Montrons ii). La fibre de $\phi_{|\mathcal{U}}$ en (X, Y) est un ouvert du sous-schéma fermé de $\mathbb{G}_L(r, A^*)$ formé des X' vérifiant $X \subset X' \subset (Y.U)^{\perp}$, qui n'est autre que $\mathbb{G}_L(sq, (Y.U)^{\perp}/X)$. Cette fibre est donc soit vide, soit de dimension $sq(n - us - t - sq) = sq(n - us - r)$. D'après le calcul de dimension fait au point ii) du lemme 2.14, on en déduit que la clôture de l'image de ϕ est de dimension

$$\dim \mathcal{U} - sq(n - us - r) = s(n - s) + r(n - su - r) - sq(n - us - r)$$

$$= s(n - s) + t(n - su - r) = s(n - s) + t(n - s(u + q) - t) = \dim G(t, s, U').$$

Ceci démontre iii). □

Définition 2.18. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soient r, s, u trois entiers positifs, tels que $n \geq su + r$ et $n \geq ru + s$.*
Supposons d'abord $r \geq s$. Ecrivons la division euclidienne $r = qs + t$. Soient $U \subset U' \subset A$ deux bons sous-vectoriels, de dimensions u et $u + q$. Le lemme 2.17 permet de définir une application rationnelle, dominante, $\mathrm{PGL}_1(A)$*- équivariante, à fibres rationnelles*

$$\phi_{U,U'} : G(r, s, U) \longrightarrow G(t, s, U')$$

par la formule

$$(X, Y) \mapsto (X \cap (Y.U')^{\perp}, Y).$$

Supposons maintenant $s > r$. Ecrivons la division euclidienne $s = qr + t$. Soient $U \subset U' \subset A$ deux bons sous-vectoriels, de dimensions u et $u + q$. On définit de la même manière une application rationnelle, dominante, $\mathrm{PGL}_1(A)$*- équivariante, à fibres rationnelles*

$$\phi_{U,U'} : G(r, s, U) \longrightarrow G(r, t, U')$$

par la formule

$$(X, Y) \mapsto (X, Y \cap (U'.X)^{\perp}).$$

Remarque 2.19. On peut itérer la construction précédente, en suivant l'algorithme d'Euclide, et composer les applications rationnelles $\phi_{U,U'}$ entre elles. C'est ce que nous allons faire dans la prochaine section.

3. Démonstration du théorème principal

Définition 3.1. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soient r, s et u trois entiers positifs vérifiant $ru + s \leq n$ et $su + r \leq n$. Supposons $r \geq s$. Soit*

$$r_0 = r, r_1 = s, r_2, \ldots, r_d = \text{pgcd}(r, s), r_{d+1} = 0$$

la suite d'entiers définie selon l'algorithme d'Euclide, en prenant pour r_{i+1} le reste de la division euclidienne de r_{i-1} par r_i. Soient q_i les entiers tels que $r_{i-1} = q_i r_i + r_{i+1}$. Soit

$$\mathcal{U} = (U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_d)$$

un drapeau formé de bons sous-vectoriels de A, tels que $\dim(U_0) = u$ et $\dim(U_i) - \dim(U_{i-1}) = q_i$ (un tel drapeau existe par le lemme 2.11).
Supposons d impair. D'après la définition 2.18, il existe alors une suite d'applications rationnelles dominantes, $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariantes, à fibres rationnelles:

$$\begin{aligned} \phi_{U_0,U_1} &: G(r_0, r_1, U_0) \longrightarrow G(r_2, r_1, U_1), \\ \phi_{U_1,U_2} &: G(r_2, r_1, U_1) \longrightarrow G(r_2, r_3, U_2), \\ \phi_{U_2,U_3} &: G(r_2, r_3, U_2) \longrightarrow G(r_4, r_3, U_3), \\ &\ldots \\ \phi_{U_{d-1},U_d} &: G(r_{d-1}, r_d, U_{d-1}) \longrightarrow G(r_{d+1}, r_d, U_d). \end{aligned}$$

Puisque $G(r_{d+1}, r_d, U_d)$ est un ouvert de $\mathbb{G}(\text{pgcd}(r, s), A)$, la composée de toutes ces applications est une application rationnelle, dominante, $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariante, à fibres rationnelles

$$\Phi_{\mathcal{U}} : G(r, s, U_0) \longrightarrow \mathbb{G}(\text{pgcd}(r, s), A).$$

Si d est pair, le même procédé fournit une application rationnelle, dominante, $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariante, à fibres rationnelles

$$\Phi_{\mathcal{U}} : G(r, s, U_0) \longrightarrow \mathbb{G}(\text{pgcd}(r, s), A^*).$$

On a l'énoncé analogue si $s > r$.

Le point ii) de la proposition suivante est capital.

Proposition 3.2. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soient r, s, u trois entiers positifs et non nuls, tels que $n \geq ru + s$ et $n \geq su + r$.*
Supposons $r \geq s$. Ecrivons la division euclidienne $r = qs + t$. Soit $U \subset U' \subset A$ deux bons sous-vectoriels, de dimensions u et $u + q$. Soit

$$\phi_{U,U'} : G(r, s, U) \longrightarrow G(t, s, U')$$

l'application rationnelle, dominante et $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariante de la définition 2.18. Les propositions suivantes sont vraies.

i) L'action de $\mathrm{PGL}_1(A)$ sur la source et le but de $\phi_{U,U'}$ est génériquement libre.

Soit $\tilde{G}(r, s, U)$ (resp. $\tilde{G}(t, s, U')$) un ouvert de $G(r, s, U)$ (resp. $G(t, s, U')$), bon pour l'action de $\mathrm{PGL}_1(A)$, et tel que $\phi_{U,U'}$ induise un morphisme partout défini

$$\phi : \tilde{G}(r, s, U) \longrightarrow \tilde{G}(t, s, U').$$

ii) Le morphisme quotient

$$\overline{\phi} : \tilde{G}(r, s, U)/\mathrm{PGL}_1(A) \longrightarrow \tilde{G}(t, s, U')/\mathrm{PGL}_1(A)$$

induit une extension transcendante pure sur les corps de fonctions.

Si $s > r$, écrivons la division euclidienne $s = qr + t$. Soit $U \subset U' \subset A$ deux bons sous-vectoriels, de dimensions u et $u+q$. Soit

$$\phi_{U,U'} : G(r,s,U) \longrightarrow G(r,t,U')$$

l'application rationnelle, dominante et $\mathrm{PGL}_1(A)$*-équivariante de la définition 2.18. On a alors les assertions analogues à i) et ii).*

Démonstration. On suppose $r \geq s$; l'autre cas se traite de même.
i) Soit $\mathcal{U}$ un drapeau comme dans le lemme 3.1, avec $U_0 = U$. Considérons l'application $\Phi_{\mathcal{U}}$ de ce même lemme. Sa source est $G(r,s,U)$. Son but est $\mathbb{G}(\mathrm{pgcd}(r,s), A)$ si l'algorithme d'Euclide partant de (r,s) a un nombre impair d'étapes, et $\mathbb{G}(\mathrm{pgcd}(r,s), A^*)$ sinon. Par un argument élémentaire laissé au lecteur, l'existence de Φ_U implique que l'action de $\mathrm{PGL}_1(A)$ sur $G(r,s,U)$ est génériquement libre si elle l'est sur $\mathbb{G}(\mathrm{pgcd}(r,s), A)$ (ou sur $\mathbb{G}(\mathrm{pgcd}(r,s), A^*)$). Ceci est le cas par définition d'une algèbre bonne.

Montrons ii). Ceci peut se faire soit par un calcul de cocycles galoisiens, soit par une approche intrinsèque utilisant le procédé de *torsion* par des espaces principaux homogènes de groupes algébriques (ou torseurs). J'ai choisi le second point de vue, plus canonique.
Soit $\pi : \tilde{G}(t,s,U') \longrightarrow \tilde{G}(t,s,U')/\mathrm{PGL}_1(A)$ la projection canonique. Soit L une extension de K, et $y \in (\tilde{G}(t,s,U')/\mathrm{PGL}_1(A))(L)$. La fibre $P := \pi^{-1}(y)$ est un $\mathrm{PGL}_1(A)_L$-torseur (sur L). Soit V_t (resp. V_s, W) le tordu de $\mathbb{G}(t, A^*)_L$ (resp. $\mathbb{G}(s,A)_L$, $\tilde{G}(t,s,U')_L$) par P (cf. définition 2.3). Par fonctorialité de l'opération de torsion, W est un ouvert d'une sous-variété fermée de $V_t \times_L V_s$. Les L-variétés V_t et V_s sont des variétés de Severi-Brauer généralisées. Plus précisément, Soit $\mathcal{A}' := \mathrm{End}_L(A \otimes L)$ (endomorphismes de L-vectoriel). Faisons agir le L-groupe $\mathrm{PGL}_1(A)_L$ trivialement sur $A \otimes L$, et par automorphismes intérieurs sur $\mathcal{A}'$ (formule: $(a.f)(x) = af(a^{-1}x)$, pour $a \in \mathrm{PGL}_1(A)_L$, $f \in \mathcal{A}'$ et $x \in A \otimes L$). On vérifie tout de suite que le morphisme canonique (de L-algèbres)

$$A^{op} \otimes L \longrightarrow \mathcal{A}',$$

$$a \mapsto (x \mapsto xa)$$

est équivariant pour ces actions. En tordant ce morphisme par P, on en déduit un morphisme $A^{op} \otimes L \longrightarrow \mathcal{A}$, où $\mathcal{A} = {}^P\mathcal{A}'$. En d'autres termes, on a construit une L-algèbre simple centrale $\mathcal{A}$, contenant $A^{op} \otimes L$. On a alors des identifications canoniques $V_s = SB(s, \mathcal{A})$ et $V_t = SB(t, \mathcal{A}^{op}) = SB(n-t, \mathcal{A})$.
Soit $w \in W(L)$ le point canonique dont le lemme 2.4 (appliqué à π, qui est un torseur sous $G = \mathrm{PGL}_1(A)_L$) affirme l'existence. Soit $\tilde{X}$ (resp. $\tilde{Y}$) l'image de w par la projection $W \longrightarrow SB(n-t, \mathcal{A})$ (resp. $W \longrightarrow SB(s, \mathcal{A})$). Considérons les L-vectoriels $U \otimes L$ et $U' \otimes L$, vus comme sous-vectoriels de $\mathcal{A}$ grâce à l'inclusion $A^{op} \otimes L \longrightarrow \mathcal{A}$. Soit $\tilde{Z} = (U \otimes L)\tilde{Y}$ (resp. $\tilde{Z}' = (U' \otimes L)\tilde{Y}$); c'est un idéal à droite de $\mathcal{A}$ de dimension usn (resp. $(u+q)sn$), donc un élément de $SB(us, \mathcal{A})$ (resp. $SB((u+q)s, \mathcal{A})$). Il s'agit là des "versions tordues" de $Y.U$ et $Y.U'$.
Les équations reliant $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ s'expriment en disant que $\tilde{Z}' \subset \tilde{X}$ (inclusion d'idéaux). C'est la version tordue de la condition $Y.U' \subset X^{\perp}$, qui définit $G'(s,t,U')$.
On dispose également de la version tordue du point ii) du lemme 2.17: la fibre de

$\overline{\phi}$ en y est un ouvert de la sous-variété fermée $F \subset SB(n-r, \mathcal{A})$ formée des idéaux I satisfaisant $\tilde{Z} \subset I \subset \tilde{X}$. Pour finir, il suffit de montrer que $F(L) \neq \varnothing$. En effet, cela implique que F est L-rationnelle, comme toute variété de Severi-Brauer généralisée possédant un point rationnel. On termine alors la démonstration de ii) en prenant pour L le corps des fonctions de $\tilde{G}(t, s, U')/\mathrm{PGL}_1(A)$ et pour y son point générique.
Si I est un idéal de $\mathcal{A}$, il est commode de considérer la quantité $\dim'(I) = \frac{\dim(I)}{n}$; c'est la dimension réduite de I. Il nous faut donc construire un idéal $I \subset \mathcal{A}$, de dimension réduite $(n-r)$, satisfaisant $\tilde{Z} \subset I \subset \tilde{X}$. S'il existe un idéal $I' \subset \mathcal{A}$ de dimension réduite $n-r+t$, alors il en existe un dont l'intersection avec $\tilde{X}$ est de dimension réduite la plus petite possible, c'est-à-dire $n-r = \dim'(I') - \mathrm{codim}'(\tilde{X})$ (justification laissée au lecteur). Par conséquent, il suffit de montrer qu'il existe un idéal de $\mathcal{A}$ contenant $\tilde{Z}$ et de dimension réduite $n-r+t$. A nouveau, s'il existe un idéal $I'' \subset \mathcal{A}$ de dimension réduite $n-r+t-su = n-(qs+t)-t-su = n-s(u+q)$, alors il en existe tel que I'' et $\tilde{Z}$ sont en somme directe, et cette somme directe est alors un idéal de $\mathcal{A}$ de dimension $n-r+t$, qui fait l'affaire. Or il existe dans $\mathcal{A}$ un idéal de dimension réduite s; par exemple $\tilde{Y}$. Par suite, il existe des idéaux de $\mathcal{A}$ de dimension (ou de codimension) réduite n'importe quel multiple de s plus petit que n. En particulier, il existe un idéal $I'' \subset \mathcal{A}$ de dimension réduite $n - s(u+q)$, cqfd.

$\square$

Nous disposons maintenant du matériel requis pour démontrer le théorème principal de cette section.

Théorème 3.3. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soit $0 < s < n$ un entier. Soit $d = \mathrm{pgcd}(s, n)$. Alors la variété $\mathbb{G}(s, A)$ est birationnelle, de manière $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariante, au produit de $\mathbb{G}(d, A)$ par un espace affine sur lequel $\mathrm{PGL}_1(A)$ agit trivialement.*

Démonstration. Posons $r = n$, $U = \{0\} \subset A$ et $u = 0$. Alors $G(r, s, U)$ est un ouvert non vide de $G'(r, s, U) = \mathbb{G}(s, A)$. Supposons que le nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide partant de (r, s) est impair. La définition 3.1 (appliquée à un drapeau convenable), fournit alors une application rationnelle, dominante, $\mathrm{PGL}_1(A)$- équivariante

$$\Phi : \mathbb{G}(s, A) \longrightarrow \mathbb{G}(d, A).$$

Si le nombre d'étapes est pair, le but de Φ est $\mathbb{G}(d, A^*)$, qu'on identifie à $\mathbb{G}(d, A)$ au moyen du lemme 2.15. Soit $\tilde{\mathbb{G}}(s, A)$ (resp. $\tilde{\mathbb{G}}(d, A)$) un bon ouvert de $\mathbb{G}(s, A)$ (resp. $\mathbb{G}(d, A)$) pour l'action de $\mathrm{PGL}_1(A)$, tels que Φ induise un morphisme partout défini

$$\Phi' : \tilde{\mathbb{G}}(s, A) \longrightarrow \tilde{\mathbb{G}}(d, A).$$

Par applications itérées du point iv) de la proposition 3.2, on voit que le morphisme quotient

$$\overline{\Phi}' : \tilde{\mathbb{G}}(s, A)/\mathrm{PGL}_1(A) \longrightarrow \tilde{\mathbb{G}}(d, A)/\mathrm{PGL}_1(A)$$

induit une extension transcendante pure sur les corps de fonctions. Or le morphisme canonique

$$\tilde{\mathbb{G}}(s, A) \longrightarrow \tilde{\mathbb{G}}(d, A) \times_{\tilde{\mathbb{G}}(d,A)/\mathrm{PGL}_1(A)} (\tilde{\mathbb{G}}(s, A)/\mathrm{PGL}_1(A))$$

induit par le diagramme

$$\begin{CD}
\tilde{\mathbb{G}}(s,A) @>>> \tilde{\mathbb{G}}(d,A) \\
@VVV @VVV \\
\tilde{\mathbb{G}}(s,A)/\mathrm{PGL}_1(A) @>>> \tilde{\mathbb{G}}(d,A)/\mathrm{PGL}_1(A)
\end{CD}$$

est un isomorphisme (un morphisme entre deux torseurs est un isomorphisme!), ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 3.4. *Sous les hypothèses du théorème 3.3, supposons de plus que $d = 1$. Alors la variété $\mathbb{G}(s,A)/\mathrm{PGL}_1(A)$ (définie à isomorphisme birationnel près) est rationnelle.*

Démonstration. Appliquant le théorème 3.3, on voit que $\mathbb{G}(s,A)$ est birationnelle, de manière $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariante, au produit de $\mathbb{P}(A)$ par un espace affine. Il revient au même de dire qu'elle est birationnelle, de manière $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariante, au produit de $\mathrm{PGL}_1(A)$ par un espace affine, d'où l'assertion. □

Remarque 3.5. Soit V un vectoriel de dimension n, et $A = \mathrm{End}(V)$. Le lecteur pourra montrer, à titre d'exercice, que le quotient birationnel $\mathbb{G}(n,A)/\mathrm{PGL}_1(A)$ est stablement birationnel à l'espace classifiant de $\mathrm{PGL}_1(A) = \mathrm{PGL}(V)$. Sa (stable) rationalité est un problème majeur et très largement ouvert. Elle n'est en effet connue que lorsque n divise 420 ([BLB]).

4. Quelques applications du théorème 3.3

Nous énonçons dans cette section, sous forme de propositions, plusieurs corollaires du théorème principal, qui s'en déduisent par torsion. Pour des rappels sur cet important procédé, nous renvoyons le lecteur à [F], proposition 2.12 et lemme 2.14.

Proposition 4.1. *Soit $0 < r < n$ deux entiers, et $d = \mathrm{pgcd}(r,n)$. Soit A une algèbre simple centrale de degré n. Alors la variété de Severi-Brauer généralisée $SB(r,A)$ est birationnelle au produit de $SB(d,A)$ par un espace affine de dimension convenable.*

Démonstration. Soit L une sous-algèbre étale commutative maximale de A. Il est classique (suite exacte longue de cohomologie combinée au théorème 90 de Hilbert) que la cohomologie du groupe algébrique $T := R_{L/K}(\mathbb{G}_\mathrm{m})/\mathbb{G}_\mathrm{m} = \mathrm{PGL}_1(L)$ s'identifie au noyau de la flèche naturelle $Br(K) \longrightarrow Br(L)$; il correspond donc à A un T-torseur P tel que $SB(m,A)$ s'identifie au tordu de $\mathbb{G}(m,L)$ par P, pour tout $m = 1 \ldots n$. On déduit tout de suite le corollaire par torsion à partir du théorème 3.3, appliqué à L. □

Définition 4.2. *Soit G un groupe algébrique agissant sur une variété géométriquement intègre X. Nous dirons que l'action de G sur X est parfaite si X est birationnelle, de manière G-équivariante, au produit de G par un espace affine sur lequel G agit trivialement.*

Remarque 4.3. Soit G un groupe algébrique agissant sur une variété géométriquement intègre X. Le lecteur se convaincra aisément que l'action de G sur X est parfaite si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.
i) L'action de G sur X est génériquement libre.
ii) Soit $U \subset X$ un ouvert bon pour l'action de G. Alors le G-torseur $U \longrightarrow U/G$ possède des sections rationnelles, et sa base est rationnelle.

Proposition 4.4. *Soit V un vectoriel de dimension r, et A une bonne algèbre de dimension n. Supposons $r \leq n$ et pgcd$(n, r) = 1$. Soit G le conoyau du morphisme*

$$\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}_1(A),$$

$$x \mapsto (x, x^{-1}).$$

Le groupe G agit sur $\mathbb{A}(V \otimes A)$ par la formule

$$(f, x).(v \otimes a) = f(v) \otimes xa,$$

pour $f \in \mathrm{GL}(V)$, $x \in \mathrm{GL}_1(A)$, $v \in V$ et $a \in A$.
Cette action est parfaite.

Démonstration. Soit U l'ouvert de $\mathbb{A}(V \otimes A) = \mathbb{A}(\mathrm{Hom}(V^*, A))$ formé des applications linéaires de rang maximal r. L'ouvert U est stable par l'action naturelle de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathbb{A}(V \otimes A)$, et le quotient $U/\mathrm{GL}(V)$ n'est autre que $\mathbb{G}(r, A)$. La projection naturelle $U \longrightarrow \mathbb{G}(r, A)$ est un $\mathrm{GL}(V)$-torseur. Puisque l'action de $\mathrm{PGL}_1(A) = G/\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathbb{G}(r, A)$ est génériquement libre, on en déduit que l'action de G sur $\mathbb{A}(V \otimes A)$ l'est aussi. On sait alors (définition 2.1) qu'il existe un ouvert $U' \subset \mathbb{A}(V \otimes A)$, bon pour l'action de G. Par le théorème 90 de Hilbert, la projection $U' \longrightarrow U'/\mathrm{GL}(V)$ possède des sections rationnelles. D'après le théorème 3.3 (et la preuve du corollaire 3.4), on sait que l'action de $\mathrm{PGL}_1(A)$ sur $\mathbb{G}(r, A)$ est parfaite. Ceci se traduit ici en disant que le $\mathrm{PGL}_1(A)$-torseur $U'/\mathrm{GL}(V) \longrightarrow U'/G$ possède des sections rationnelles, et que sa base est rationnelle. En définitive, on voit que le G-torseur $U' \longrightarrow U'/G$ possède des sections rationnelles, et que sa base est rationnelle. En d'autres termes, l'action de G sur $\mathbb{A}(V \otimes A)$ est parfaite. □

Proposition 4.5. *Soient A et B deux algèbres simples centrales, de degrés premiers entre eux. Alors $SB(A \otimes B)$ est birationnelle au produit de $SB(A) \times SB(B)$ par un espace affine de dimension convenable.*

Démonstration. Soit n (resp. r) le degré de A (resp. B). On suppose $r < n$. Soit L (resp. M) une sous-algèbre étale commutative maximale de A (resp. B). Soit G le conoyau du morphisme

$$\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{GL}(M) \times \mathrm{GL}_1(L),$$

$$x \mapsto (x, x^{-1}).$$

Soit G' le conoyau du morphisme

$$\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{GL}_1(M) \times \mathrm{GL}_1(L),$$

$$x \mapsto (x, x^{-1});$$

c'est un sous-groupe de G. Par le théorème 90 de Hilbert, le torseur $\mathrm{GL}(M) \longrightarrow \mathrm{GL}_1(M)\backslash\mathrm{GL}(M)$ possède des sections rationnelles. Sa base étant rationnelle (exercice laissé au lecteur), il suit que l'action de $\mathrm{GL}_1(M)$ sur $\mathrm{GL}(M)$ (par multiplication à gauche) est parfaite, donc que l'action de G' sur G est parfaite. Puisque l'action de G sur $\mathbb{A}(M \otimes L)$ est parfaite par la proposition 4.4, on en déduit -et c'est nettement plus faible- que l'action de G' sur $\mathbb{A}(L \otimes M)$ est parfaite. Passant au quotient par $\mathbb{G}_m$, on voit finalement que l'action de $\mathrm{PGL}_1(L) \times \mathrm{PGL}_1(M)$ sur $\mathbb{P}(L \otimes M)$ est parfaite. En d'autres termes, la variété $\mathbb{P}(L \otimes M)$ est birationnelle, de manière $\mathrm{PGL}_1(L) \times \mathrm{PGL}_1(M)$-équivariante, au produit de $\mathbb{P}(L) \times \mathbb{P}(M)$ par un espace projectif. Le résultat annoncé suit par torsion, comme dans la preuve de la proposition 4.1. □

Proposition 4.6. *([Kly]) Soient L et M deux algèbres étales, de degrés premiers entre eux. Soit T le conoyau du morphisme*

$$\mathrm{GL}_1(M) \times \mathrm{GL}_1(L) \longrightarrow \mathrm{GL}_1(M \otimes L),$$

$$(x, y) \mapsto x \otimes y;$$

c'est un tore algébrique. La variété T est rationnelle.

Démonstration. Soit G' le conoyau du morphisme

$$\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{GL}_1(M) \times \mathrm{GL}_1(L),$$

$$x \mapsto (x, x^{-1}).$$

Dans la preuve de la proposition 4.5, on a vu que l'action de G' sur $\mathbb{A}(M \otimes L)$ -donc aussi sur $\mathrm{GL}_1(M \otimes L)$- est parfaite. Le résultat suit par définition d'une action parfaite, vu que T n'est autre que $\mathrm{GL}_1(M \otimes L)/G'$. □

Proposition 4.7. *([Kra], Theorem 3.1) Soit A une algèbre simple centrale de degré n. Soit $0 < r < n$ un entier. Alors les variétés $SB(r, A)$ et $SB(r, A^{op})$ sont birationnellement isomorphes.*

Démonstration. Au vu de la proposition 4.1, on peut supposer que r divise n. Soient L et P comme dans la preuve de cette proposition. D'après le lemme 2.15, il existe un isomorphisme birationnel et $\mathrm{PGL}_1(L)$-équivariant

$$f : \mathbb{G}(r, L) \longrightarrow \mathbb{G}(r, L^*).$$

En tordant f par P, on obtient un isomorphisme birationnel entre $SB(r, A)$ et $SB(r, A^{op})$, cqfd. □

Proposition 4.8. *Soit r, n deux entiers premiers entre eux, vérifiant $3 \leq r \leq n-3$. Soient A, A' deux algèbres simples centrales de degré n, engendrant le même sous-groupe du groupe de Brauer de K. Alors les variétés $SB(r, A)$ et $SB(r, A')$ sont birationnelles.*

Démonstration. Puisque A et A' engendrent le même sous-groupe du groupe de Brauer de K, on sait (cf. introduction) que $SB(A) \times \mathbb{P}^{n-1}$ est birationnelle à $SB(A') \times \mathbb{P}^{n-1}$. D'après le corollaire précédent, $SB(r, A)$ (resp. $SB(r, A')$) est birationnelle à $SB(A) \times \mathbb{P}^s$ (resp. $SB(A') \times \mathbb{P}^s$) avec $s = r(n-r) - n + 1$. Puisqu'on a $s \geq n - 1$ au vu des hypothèses faites sur n et r (vérification laissée au lecteur), on en déduit que $SB(A) \times \mathbb{P}^s$ et $SB(A') \times \mathbb{P}^s$ sont birationnellement isomorphes, cqfd. □

Bibliographie

[Ami] S. A. Amitsur.— *Generic splitting fields of central simple algebras*, Ann. of Math. (2) 62 (1955), 8-43.

[BCSS] A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, P. Swinnerton-Dyer.— *Variétés stablement rationnelles non rationnelles*, Ann. of Math. (2) 121 (1985), 283-318.

[BLB] C. Bessenrodt, L. Le Bruyn.— *Stable rationality of certain PGL_n-quotients*, Invent. Math. 104 (1991), no. 1, 179–199.

[F] M. Florence.— *On the essential dimension of cyclic p-groups*, Invent. Math. 171 (2008), no. 1, 175–189.

[Kly] A. A. Klyachko. — *On rationality of tori with a cyclic splitting field*, Arithmetic and Geometry of Varieties, Kuibyshev Univ. Press (1988), 73-78 (article en russe).

[Kra] D. Krashen.— *Birational maps between generalized Severi-Brauer varieties*, Journal of Pure and Applied Algebra 212, vol. 4 (2008), 689-703.

[SGA3] M. Demazure, A. Grothendieck.— *Schémas en groupes. I: Propriétés générales des schémas en groupes*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3), Lecture Notes in Mathematics 151. Springer-Verlag, 1970.

Mathieu Florence, Equipe de Topologie et Géométrie Algébriques, Institut de Mathématiques de Jussieu, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris.