18 - 29 mai 2015: Oujda (Maroc)
École de recherche CIMPA-Oujda

Théorie des Nombres et ses Applications.

Cours: *Équations diophantiennes et leurs applications*.

Références (ordre chronologique):

L.J. Mordell. *Diophantine equations*. Academeic Press, London, 1969.

S. Lang. *Elliptic curves Diophantine analysis*. Grund. Math. Wiss. **231**, Springer Verlag, 1978.

S. Lang. *Fundamentals of Diophantine Geometry*. Springer Verlag, 1983.

T.N. Shorey and R. Tijdeman. *Exponential Diophantine Equations*. Cambridge Tracts in Mathematics **87**, 1986.

M. Waldschmidt. *Diophantine equations and transcendental methods*. Transcendental numbers and related topics, RIMS Kôkyûroku, Kyoto, **599** (1986), N°8, 82-94.
http://webusers.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/articles/pdf/DiophEqnNoriko1986.pdf

W.M. Schmidt. *Diophantine approximations and Diophantine equations*. Lecture Notes in Math. **1467**, Springer Verlag 1991.

U. Zannier. *Lecture notes on Diophantine analysis*. Edizioni della Normale, Scuola Normale Superiore Pisa, 2009.

C.Levesque and M. Waldschmidt. *Some remarks on diophantine equations and diophantine approximation*. Vietnam Journal of Mathematics, **39**:3 (2011) 343-368.
http://arxiv.org/abs/1312.7200

U. Zannier (ed). *On some applications of Diophantine approximations*. Edizioni della Normale, Scuola Normale Superiore Pisa, 2014.

Résumé:

De nombreuses questions mathématiques se ramènent à résoudre des équations diophantiennes. L'arithmétique des corps de nombres est un des principaux exemples. Les équations dites de Fermat--Pell (considérées antérieurement par Brahmagupta) interviennent aussi dans l'étude topologique des variétés riemanniennes et dans des questions de combinatoire symbolique avec les mots de Christoffel. Le problème du nombre de classes de Gauss fait intervenir des équations diophantiennes. Plusieurs questions de logique se ramènent également à des équations diophantiennes.

Plusieurs méthodes permettent de résoudre des équations diophantiennes. Historiquement, les plus anciennes (remontant principalement à Pierre de Fermat) utilisent des arguments d'arithmétique spécifiques à l'exemple traité. Il a fallu attendre les travaux de Lagrange au XVIIIème siècle pour savoir résoudre complètement les équations quadratiques en deux variables. Ce n'est qu'à la fin du XIXème siècle, et surtout au XXème siècle, que des méthodes un peu générales ont été développées. La solution négative du 10ème problème de Hilbert conduit à restreindre l'étude à des équations en un petit nombre de variables - nous nous concentrerons sur le cas de deux variables qui prennent des valeurs entières (points entiers sur des courbes). De nos jours, les méthodes de géométrie arithmétique sont les plus puissantes, elles permettent dans de nombreux cas de décider si une équation diophantienne en deux variables a une infinité de solutions. Les méthodes d'approximation diophantienne fournissent les outils les mieux adaptés, le théorème du sous--espace de Schmidt est un résultat fondamental dont le domaine d'applications n'a pas fini d'être exploré. Mais cela ne suffit pas quand on veut donner la liste des solutions d'équations spécifiques: les méthodes effectives issues de la théorie des nombres transcendants sont les mieux adaptés pour parvenir à ce but.

Le résultat central de ce cours sera le théorème du sous--espace de Wolgang Schmidt. Nous en donnerons un premier énoncé simplifié, qui a déjà beaucoup d'applications profondes. Pour comprendre l'énoncé le plus général, il faut disposer de certaines bases qui seront enseignées dans ce cours. Des applications de ce théorème seront ensuite données, un choix sera fait parmi les nombreuses conséquences, nous privilégierons celles qui ne demandent pas de langage trop sophistiqué.

La démonstration du théorème du sous-espace ne sera pas donnée: quelques indications seront fournies sur la preuve, mais les détails demanderaient trop de développement techniques. Cet énoncé peut être utilisé et appliqué à de multiples questions sans qu'il soit utile de savoir comment on le démontre.

Le cours se poursuivra par une introduction aux méthodes effectives utilisant des outils de la théorie des nombres transcendants, dont l'origine se trouve dans les travaux de Gel'fond et Baker au XXème siècle.