Université Pierre et Marie Curie 2013–2014
1M001, Corrigé de l'examen du 17 déc. 2013 (2h), sections MIPI 11 à 16

Exercice 1. On rappelle que $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions $\mathrm{sh}(x)$, $\sin(x)$, $\mathrm{ch}(x)$ et $\cos(x)$, puis en déduire ceux de $\mathrm{sh}(x) - \sin(x)$ et de $\mathrm{ch}(x) - \cos(x)$.

Solution : $\mathrm{sh}(x) = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, donc $\boxed{\mathrm{sh}(x) - \sin(x) = \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)}$.
$\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ et $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ donc $\boxed{\mathrm{ch}(x) - \cos(x) = x^2 + o(x^3)}$.

2. Montrer que $\mathrm{ch}(x) - \cos(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Solution : On sait que $\mathrm{ch}(x) > \mathrm{ch}(0) = 1$ pour tout $x \neq 0$. (Ceci résulte de l'étude des variations de $\mathrm{ch}(x)$: sa dérivée $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ est < 0 sur $\mathbb{R}_-^*$ et > 0 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\mathrm{ch}(x) > \mathrm{ch}(0) = 1$ pour tout $x \neq 0$.) Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $\mathrm{ch}(x) > 1 \geq \cos(x)$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x) - \sin(x)}{x(\mathrm{ch}(x) - \cos(x))}$. Sur son domaine de définition $\mathbb{R}^*$, f est-elle continue ?

Solution : Les fonctions $\mathrm{sh}(x)$, $\sin(x)$, $\mathrm{ch}(x)$ et $\cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc il en est de même des fonctions $g(x) = \mathrm{sh}(x) - \sin(x)$ et $h(x) = x(\mathrm{ch}(x) - \cos(x))$. De plus, d'après la question précédente, la fonction h ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Par conséquent, la fonction $f = g/h$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Bien que cela ne soit pas demandé par l'énoncé, remarquons que les fonctions $\mathrm{sh}(x)$, $\sin(x)$, $\mathrm{ch}(x)$ et $\cos(x)$ sont dérivables (et même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}$, donc il en est de même des fonctions $g(x) = \mathrm{sh}(x) - \sin(x)$ et $h(x) = x(\mathrm{ch}(x) - \cos(x))$. De plus, d'après la question 2, la fonction h ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Par conséquent, la fonction $f = g/h$ est dérivable (et même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}^*$.

4. f a-t-elle une limite en 0 ? Si oui, laquelle ?

Solution : D'après la question 1, au voisinage de 0 on a $f(x) = \dfrac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^4)} = \dfrac{1/3 + o(1)}{1 + o(x)}$ donc f tend vers $1/3$ lorsque x tend vers 0.

On peut aussi dire ce qui suit, si l'on préfère utiliser des fonctions ε plutôt que la notation o. D'après la question 1, il existe des fonctions ε_1 et ε_2 définies sur un intervalle ouvert I contenant 0 et continues et nulles en 0, telles que pour tout $x \neq 0$ dans I on ait $f(x) = \dfrac{x^3/3 + x^3\varepsilon_1(x)}{x^3 + x^4\varepsilon_2(x)} = \dfrac{1/3 + \varepsilon_1(x)}{1 + x\varepsilon_2(x)}$. Par conséquent, la limite de f en 0 existe et vaut $1/3$.

Exercice 2. 1. Soit $x \mapsto a(x)$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit A une primitive de a sur I. Rappeler quelles sont les solutions sur I de l'équation différentielle $y'(x) = a(x)y(x)$.

Solution : Ce sont les fonctions $I \to \mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto c\exp(A(x))$, pour une constante $c \in \mathbb{R}$ fixée.

2. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = (1 + \sin(x))y(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis déterminer celle qui prend en 0 la valeur 1.

Solution : Ici, $I = \mathbb{R}$ et une primitive sur $\mathbb{R}$ de $a(x) = 1 + \sin(x)$ est la fonction $A(x) = x - \cos(x)$. Donc les solutions sont les fonctions $c\,e^{x-\cos(x)}$, avec $c \in \mathbb{R}$. Comme $A(0) = -1$, la solution y telle que $y(0) = 1$ est obtenue pour $c = e$, et l'on a $y(x) = e^{x+1-\cos(x)}$.

Pour les questions suivantes, on considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'(x) = 3y(x) + \cos(x)$.

3. Déterminer une solution particulière y_0 de la forme $y_0(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$.

Solution : Cherchons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $y_0(x) = a\cos(x)+b\sin(x)$ vérifie $y_0'(x) = 3y_0(x)+\cos(x)$, c'est-à-dire tels qu'on ait $b\cos(x) - a\sin(x) = (3a + 1)\cos(x) + 3b\sin(x)$. Ceci donne $a = -3b$ puis $b = -9b+1$, donc $b = 1/10$ et $a = -3/10$, d'où la solution particulière $\boxed{y_0(x) = (-3\cos(x) + \sin(x))/10}$.

4. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle, puis déterminer celle qui prend en 0 la valeur 1.

Solution : On sait que les solutions sont de la forme $y_0 + f$, où f est une solution de l'équation sans second membre, i.e. $f' = 3f$. Donc $f(x) = c\,e^{3x}$ pour une constante $c \in \mathbb{R}$, et les solutions cherchées sont les fonctions $x \mapsto y_0(x) + c\,e^{3x}$.
Déterminons celle qui prend en 0 la valeur 1. On a $y_0(0) = -3/10$ et $e^0 = 1$, donc la condition $y(0) = 1 = \dfrac{-3}{10}+c$ donne $c = 13/10$. Donc la solution y telle que $y(0) = 1$ est $\boxed{y(x) = (-3\cos(x) + \sin(x) + 13e^{3x})/10}$.

Exercice 3. 1. Exprimer sous la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, puis sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, les nombres complexes $z_1 = \dfrac{3+i}{2-i}$ et $z_2 = (1 + i)^4$.

Solution : Comme $|2 - i|^2 = 5$, on a $z_1 = (1/5)(3 + i)(2 + i) = (1/5)(5 + 5i) = 1 + i$. Donc $|z_1|^2 = 2$ et $z_1 = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.
Puis $(1 + i)^2 = 1 - 1 + 2i = 2i$, donc $z_2 = (2i)^2 = -4 = 4e^{i\pi}$. On pouvait aussi écrire que $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, d'où $z_2 = (\sqrt{2})^4 e^{i\pi} = 4e^{i\pi}$.

2. Écrire $Z = 4(-1 + i\sqrt{3})$ sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, puis déterminer, sous la même forme, ses racines 3-ièmes dans $\mathbb{C}$.

Solution : On a $Z = 8(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3))$ d'où $Z = 8e^{i2\pi/3}$. Cherchons ses racines cubiques sous la forme $z = re^{i\theta}$, alors l'égalité $z^3 = r^3e^{i3\theta} = 8e^{i2\pi/3}$ donne $r = 2$ et $3\theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, d'où $\theta = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}$, pour $k = 0, 1, 2$. Donc les racines cubiques de Z sont : $2e^{i2\pi/9}$, $2e^{i8\pi/9}$ et $2e^{i(14\pi/9)}$.

3. Déterminer les deux racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P = X^2 - 2X + 1 - 2i$.

Solution : Le discriminant de P est $(-2)^2 - 4(1 - 2i) = 8i$ Ses deux racines carrées sont donc $\alpha = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2(1 + i)$ et $-\alpha = -2(1 + i)$. Par conséquent, les deux racines dans $\mathbb{C}$ de P sont :

$$z_1 = \frac{2+\alpha}{2} = 2 + i, \qquad z_2 = \frac{2-\alpha}{2} = -i.$$

Autres solutions. On pouvait aussi remarquer que $P(X) = (X - 1)^2 - 2i$, donc z est racine de P si et seulement si $(z - 1)^2 = 2i$. Comme les deux racines carrées de $2i$ sont $1 + i$ et $-1 - i$, ceci donne $z - 1 = 1 + i$ d'où $z = 2 + i$, ou bien $z - 1 = -1 - i$ d'où $z = -i$.

Ou bien, on pouvait remarquer que $-i$ est racine « évidente ». On trouve alors la seconde racine z_1 grâce aux relations entre coefficients et racines, en l'occurence pour un polynôme unitaire de degré 2 la formule $P = X^2 - sX + p$ où s désigne la somme des racines et p leur produit. Donc $z_1 - i = 2$, d'où $z_1 = 2 + i$.

Exercice 4. 1. Montrer que le polynôme $R = X^2 - X - 2$ a deux racines dans $\mathbb{R}$, que l'on déterminera.

Solution : Le discriminant de R est $1 + 8 = 9 > 0$, donc R a deux racines réelles qui sont $(1 + 3)/2 = 2$ et $(1 - 3)/2 = -1$.

2. Quelles sont les racines du polynôme $Q = X^4 - X^2 - 2$ dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$?

Solution : Un nombre complexe z est racine de Q si et seulement si z^2 est racine de R. On obtient donc que les racines de Q dans $\mathbb{C}$ sont $\pm\sqrt{2}$ et $\pm i$. Par conséquent, les seules racines réelles de Q sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

3. Factoriser Q dans $\mathbb{C}[X]$ comme produit de polynômes de degré 1.

Solution : D'après ce qui précède, on a $Q = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - i)(X + i)$.

4. Factoriser Q dans $\mathbb{R}[X]$ comme produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 sans racines réelles.

Solution : Le polynôme $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$ n'a pas de racines réelles et, d'après ce qui précède, l'on a $Q = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2 + 1)$.

5. On considère le polynôme $P = X^6 - 2X^5 + 2X^3 - 3X^2 + 4X - 2$. Montrer que 1 est racine double de P mais pas racine triple.

Solution : On a $P(1) = 1 - 2 + 2 - 3 + 4 - 2 = 0$, donc 1 est racine de P.
On a $P'(X) = 6X^5 - 10X^4 + 6X^2 - 6X + 4$ d'où $P'(1) = 6 - 10 + 6 - 6 + 4 = 0$, donc 1 est racine multiple de P. Et $P''(X) = 30X^4 - 40X^3 + 12X - 6$ d'où $P''(1) = -4$, donc 1 est racine double de P mais pas racine triple.

6. Faire la division euclidienne de P par $(X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1$, puis factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ comme produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 sans racines réelles.

Solution : Faisant la division euclidienne de P par $X^2 - 2X + 1$ on obtient :

$$\begin{array}{r|l} X^6 - 2X^5 \quad + 2X^3 - 3X^2 + 4X - 2 & X^2 - 2X + 1 \\ \cline{2-2} -X^4 + 2X^3 - 3X^2 + 4X - 2 & X^4 - X^2 - 2 \\ -2X^2 + 4X - 2 & \\ 0 & \end{array}$$

ce qui montre que $P = (X - 1)^2 Q$. On déduit alors de la question 4 la factorisation suivante : $P = (X - 1)^2(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2 + 1)$.

Remarque. On pouvait aussi faire deux fois la division euclidienne par $X - 1$:

$$\begin{array}{r|l} X^6 - 2X^5 \quad + 2X^3 - 3X^2 + 4X - 2 & X - 1 \\ \cline{2-2} -X^5 \quad + 2X^3 - 3X^2 + 4X - 2 & X^5 - X^4 - X^3 + X^2 - 2X + 2 \\ -X^4 + 2X^3 - 3X^2 + 4X - 2 & \\ X^3 - 3X^2 + 4X - 2 & \\ -2X^2 + 4X - 2 & \\ 2X - 2 & \\ 0 & \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{r|l} X^5 - X^4 - X^3 + X^2 - 2X + 2 & X - 1 \\ \cline{2-2} -X^3 + X^2 - 2X + 2 & X^4 - X^2 - 2 \\ -2X + 2 & \\ 0 & \end{array}$$

ce qui donne aussi que $P = (X - 1)^2 Q$.

Exercice 5. Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, on note $(\vec{u} \mid \vec{v})$ leur produit scalaire (aussi noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$) et l'on note $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u} \mid \vec{u})}$ la norme euclidienne de $\vec{u}$. On dit que $\vec{u}$ est unitaire si $\|\vec{u}\| = 1$. On note O le point $(0,0)$.

1. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ en fonction de $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et de $(\vec{u} \mid \vec{v})$.

<u>Solution</u> : On a $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} + \vec{v})$ et par bilinéarité ceci égale

$$(\vec{u} \mid \vec{u} + \vec{v}) + (\vec{v} \mid \vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} \mid \vec{u}) + (\vec{u} \mid \vec{v}) + (\vec{v} \mid \vec{u}) + (\vec{v} \mid \vec{v}),$$

et comme $(\vec{v} \mid \vec{u}) = (\vec{u} \mid \vec{v})$ on obtient $\boxed{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u} \mid \vec{v})}$.

2. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs unitaires tels que $\vec{u} + \vec{v}$ soit unitaire. Déterminer $(\vec{u} \mid \vec{v})$.

<u>Solution</u> : Comme $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}+\vec{v}$ sont unitaires, on obtient $1^2 = 1^2+1^2+2(\vec{u} \mid \vec{v})$, d'où $(\vec{u} \mid \vec{v}) = -1/2$.

3. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ trois vecteurs unitaires tels que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$. Déterminer les produits scalaires $(\vec{u} \mid \vec{v})$, $(\vec{v} \mid \vec{w})$ et $(\vec{w} \mid \vec{u})$.

<u>Solution</u> : $\vec{u} + \vec{v} = -\vec{w}$ est unitaire, donc d'après la question précédente on a $(\vec{u} \mid \vec{v}) = -1/2$. De même, $\vec{v} + \vec{w} = -\vec{u}$ et $\vec{w} + \vec{u} = -\vec{v}$ sont unitaires, donc $(\vec{v} \mid \vec{w}) = -1/2 = (\vec{w} \mid \vec{u})$.

4. Soient A, B, C trois points du cercle de centre O et de rayon 1, tels que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$. Montrer que les points A, B, C forment un triangle équilatéral. Indication : calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$ et $\|\overrightarrow{CA}\|$.

<u>Solution</u> : Posons $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$. Alors on est sous les hypothèses de la question précédente, donc $(\vec{u} \mid \vec{v}) = -1/2 = (\vec{v} \mid \vec{w}) = (\vec{w} \mid \vec{u})$. Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{v} - \vec{u}$, donc d'après la question 1, on a :

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 1 + 1 - 2(\vec{u} \mid \vec{v}) = 3$$

et l'on obtient de même que $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = 3 = \|\overrightarrow{CA}\|^2$. Donc les trois côtés du triangle ABC sont de longueur $\sqrt{3}$, et ce triangle est donc équilatéral.