Université Pierre et Marie Curie 2013–2014
1M001, Corrigé de l'examen du 12 nov. 2013 (2h), sections MIPI 12 & 15

Exercice 1 (4,5 pts)**.** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2\mathrm{Arctan}(x) + \dfrac{1}{x}$.

1. (1 pt) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et déterminer l'unique $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(a) = 0$.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2(1+x^2)}$. Donc $a = 1$ est l'unique élément de $\mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(a) = 0$ et l'on a $f'(x) < 0$ pour $x \in]0,1[$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 1$. Donc f est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Elle atteint son minimimum en $a = 1$.

2. (0,5 pt) Pour quelle valeur x_0 de x dans $[-\pi/2, \pi/2]$ a-t-on $\sin(x_0) = \cos(x_0)$, c.-à.-d. $\tan(x_0) = 1$?

Solution : On sait (ou l'on voit en dessinant un cercle trigonométrique) que, pour $x_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $\sin(x_0) = \cos(x_0)$ si et seulement si $x_0 = \pi/4$. Alors, $\tan(x_0) = 1$ donne $\mathrm{Arctan}(1) = \mathrm{Arctan}(\tan(x_0)) = x_0 = \pi/4$. Remarquons aussi que comme $\tan(0) = 0$ alors $\mathrm{Arctan}(0) = 0$.

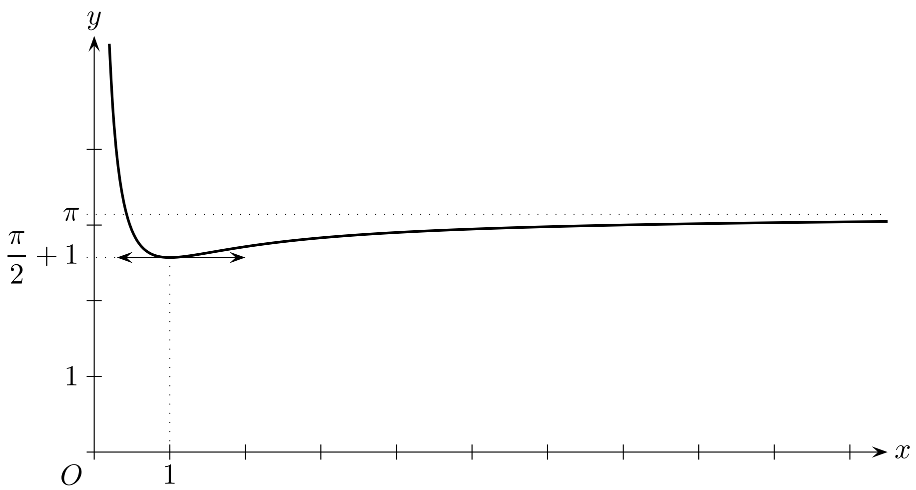
3. (2 pts) Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. Préciser si f admet un minimum ou un maximum, et exprimer $f(a)$ en fonction de x_0.

Solution : On a déjà vu que f est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Elle atteint en $a = 1$ son minimimum, égal à $2\mathrm{Arctan}(1) + 1 = \dfrac{\pi}{2} + 1$. D'autre part, lorsque $x \to 0^+$, $2\mathrm{Arctan}(x)$ tend vers $2\mathrm{Arctan}(0) = 0$ et $1/x$ tend vers $+\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$. Enfin, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Arctan}(x) = \pi/2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1/x) = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pi$. Par conséquent, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$(\pi/2)+1$	$\nearrow$	π

4. (1 pt) Tracer de façon approximative le graphe de f, en prenant approximativement 1 cm comme unité de longeur sur chacun des axes.

Solution :



Exercice 2 (5,5 pts). 1. (1 pt) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, que vaut $\mathrm{Arctan}'(x)$?

Solution : On sait que $\mathrm{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. (1 pt) Donner le DL_4 en 0 de $\mathrm{Arctan}'(x)$.

Solution : $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$. (Et en fait $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^5)$ par parité.)

3. (1 pt) En le justifiant brièvement, donner le DL_5 en 0 de $\mathrm{Arctan}(x)$.

Solution : Comme $\mathrm{Arctan}(0) = 0$, on obtient en intégrant le $\mathrm{DL}_4(0)$ précédent que $\mathrm{Arctan}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$. (Et en fait $\mathrm{Arctan}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^6)$ puisque Arctan est impaire.)

4. (1 pt) Donner le DL_5 en 0 de $\sin(x)$.

Solution : On sait que $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)$. (Et en fait $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^6)$ puisque sin est impaire.)

5. (1,5 pt) Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{\sin(x) - x + (x^3/6)}{\mathrm{Arctan}(x) - x + (x^3/3)}$.

Solution : D'après les deux questions précédentes, le dénominateur (resp. numérateur) admet en 0 le DL_5 $x^5/5 + o(x^5)$ (resp. $x^5/5! + o(x^5)$), i.e. est de la forme $x^5/5 + x^5\varepsilon_1(x)$ (resp. $x^5/5! + x^5\varepsilon_2(x)$), avec ε_1 et ε_2 continues et nulles en 0. Notant $f(x)$ la fonction dont on veut calculer la limite, on a donc au voisinage de $x = 0$:

$$f(x) = \frac{x^5/5! + x^5\varepsilon_2(x)}{x^5/5 + x^5\varepsilon_1(x)} = \frac{1/5! + \varepsilon_2(x)}{1/5 + \varepsilon_1(x)}.$$

Dans cette expression, le numérateur (resp. dénominateur) tend vers $1/5!$ (resp. $1/5$) quand x tend vers 0, donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} f(x) = \frac{5}{5!} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$.

Exercice 3 (6 pts). Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \Big(1 + \dfrac{a}{x}\Big)^x$.

1. (1,5 pt) Déterminer l'application g définie par $g(x) = \ln(f(x))$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Solution : Remarquons d'abord que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 + \dfrac{a}{x}$ est > 1 donc > 0. D'autre part, pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, b^y est *défini* comme étant $\exp(y\ln(b))$. Donc ici, $f(x)$ est défini par l'égalité :

$$f(x) = \exp\Big(x \ln\big(1 + \frac{a}{x}\big)\Big).$$

On a donc $\boxed{g(x) = x\ln\big(1 + \frac{a}{x}\big).}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a donc

$$g'(x) = \ln\big(1 + \frac{a}{x}\big) + x\frac{-a/x^2}{1 + a/x} = \ln\big(1 + \frac{a}{x}\big) - \frac{a}{x+a}$$

2. (1 pt) Calculer $g''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et montrer que g' est strictement monotone.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$g''(x) = \frac{-a/x^2}{1 + a/x} + \frac{a}{(x+a)^2} = \frac{-a}{x(x+a)} + \frac{a}{(x+a)^2} = \frac{-a(x+a) + ax}{x(x+a)^2} = \frac{-a^2}{x(x+a)^2} < 0.$$

Donc g' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. (1 pt) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$. En déduire que g' est de signe constant et que g est strictement monotone.

Solution : On a $g'(x) = \ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right) - \dfrac{a}{x+a}$ et lorsque x tend vers $+\infty$ le second terme du membre de droite tend vers 0, et le premier terme tend vers $\ln(1) = 0$. Donc $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$. Comme g' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. (1,5 pt) En utilisant le DL_1 en 0 de $h \mapsto \ln(1+h)$, déterminer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution : On sait que $\ln(1+h) = h + o(h)$ au voisinage de 0. Comme $\dfrac{a}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\ln(1+\dfrac{a}{x}) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{a}{x}\varphi(x)$ avec $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$. Il en résulte que $g(x) = a + a\varphi(x)$, d'où $\lim_{x\to+\infty} g(x) = a$. Comme $f(x) = \exp(g(x))$, on a donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^a$.

Autre solution : on a $\lim_{h\to 0} a\dfrac{\ln(1+h)}{h} = a\ln'(1) = a$ et, d'autre part, $g(x) = a\dfrac{\ln(1+\frac{a}{x})}{\frac{a}{x}}$. D'après le théorème sur la limite d'une application composée, on a donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = a$.

5. (1 pt) Montrer que f est strictement monotone.

Solution : Comme g et exp sont strictement croissantes, alors l'application $f : x \mapsto \exp(g(x))$ l'est aussi. Autre solution : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, comme $f(x) = \exp(g(x))$ on a $f'(x) = \exp(g(x))g'(x)$ et ceci est > 0 puisqu'on a vu que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et que $\exp(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 (9 pts). 1. (0,5 pt) Montrer que, pour tout $\alpha \in]0,1[$ la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_n = 1 + \alpha + \cdots + \alpha^n$ est croissante et converge vers $\ell = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

Solution : On a $T_{n+1} - T_n = \alpha^{n+1} > 0$ donc la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. D'autre part, on sait que $T_n = \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$. Comme $\alpha \in]0,1[$, on a $\lim_{n\to+\infty} \alpha^{n+1} = 0$ et donc la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. De plus, comme elle est strictement croissante, on sait que ℓ est sa borne supérieure et que $T_n < T_{n+p} < \ell$ pour tout $n, p \in \mathbb{N}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_0(x) = 1$ et $u_n(x) = x^n/n!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et l'on considère la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x)$. Pour $x = 0$, on a $S_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour les questions 2 à 7, on fixe un réel $a \neq 0$ et on écrit u_n au lieu de $u_n(a)$ et S_n au lieu de $S_n(a)$.

2. (1 pt) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 0$. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n+1}| < \dfrac{1}{2}|u_n|$ pour tout $n \geq n_0$.

Solution : Fixons $\varepsilon > 0$. On a $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{|a|}{n+1}$, et ceci sera $< \varepsilon$ si et seulement si $n+1 > \dfrac{|a|}{\varepsilon}$. Par conséquent, si on note $n_0(\varepsilon) = E(|a|/\varepsilon)$ la partie entière de $|a|/\varepsilon$, alors pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$ on a $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < \varepsilon$. Ceci montre que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 0$.

En particulier, prenant $\varepsilon = 1/2$, on obtient que $|u_{n+1}| < \dfrac{1}{2}|u_n|$ pour tout $n \geq n_0 = E(2|a|)$.

3. (0,5 pt) Montrer que pour tout entier $N \geq n_0$, on a $|u_{N+k}| < \dfrac{1}{2^k}|u_N|$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On fixe désormais un tel entier **impair** $N \geq n_0$.

Solution : Soit $N \geq n_0$. Alors $|u_{N+1}| < \frac{1}{2}|u_N|$. Soit k un entier ≥ 2 et supposons avoir montré que $|u_{N+k-1}| < \frac{1}{2^{k-1}}|u_N|$. Alors on a : $|u_{N+k}| < \frac{1}{2}|u_{N+k-1}| < \frac{1}{2^k}|u_N|$ et ceci prouve, par récurrence sur k, que $|u_{N+k}| < \frac{1}{2^k}|u_N|$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4. (0,5 pt) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Solution : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq |u_{N+k}| \leq \frac{|u_N|}{2^k}$. Comme la suite $(|u_N|/2^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5. (1,5 pt) On suppose $a > 0$. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée et convergente. On notera $f(a)$ sa limite.

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} > 0$ donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (et même strictement croissante). Comme toute suite croissante et majorée est convergente, il suffit donc de montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Soit N comme dans la question précédente. D'après la question 1, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^{k+1}}{1-(1/2)} < \frac{1}{1-(1/2)} = 2$$

et la multiplication par $u_N > 0$ ne change pas le signe de ces inégalités. Donc, en utilisant la question 2 on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{N+k} < S_{N-1} + u_N\Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\Big) < S_{N-1} + 2u_N.$$

Ceci montre que la suite croissante $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc convergente.

Pour les deux questions suivantes, on suppose $a < 0$. On définit les suites $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $I_k = S_{N+2k}$ et $P_k = S_{N+2k+1}$.

6. (1 pt) Montrer que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (resp. $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$) est croissante (resp. décroissante). Indication : pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $I_k - I_{k-1}$ (resp. $P_k - P_{k-1}$) en fonction de $|u_{N+2k}|$ et $|u_{N+2k-1}|$ (resp. $|u_{N+2k+1}|$ et $|u_{N+2k}|$) et utiliser que N est impair.

Solution : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p = \frac{a^p}{p!}$ égale $(-1)^p|u_p|$. Tenant compte du fait que N est impair et que $|u_{n+1}| < \frac{1}{2}|u_n| < |u_n|$ pour $n \geq N$, on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$I_k - I_{k-1} = u_{N+2k} + u_{N+2k-1} = -|u_{N+2k}| + |u_{N+2k-1}| > 0,$$
$$P_k - P_{k-1} = u_{N+2k+1} + u_{N+2k} = |u_{N+2k+1}| - |u_{N+2k}| < 0.$$

Ceci montre que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décroissante.

7. (1 pt) Montrer que les suites $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera $f(a)$ sa limite.

Solution : On a $P_k - I_k = u_{N+2k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et, d'après la question (4), $\lim_{k\to+\infty} u_{N+2k+1} = 0$. Il en résulte que les suites $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers une même limite ℓ. Ceci entraîne que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. En effet, soit $\varepsilon > 0$; il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq p$ on ait $\ell - \varepsilon < I_k \leq \ell \leq P_k < \ell + \varepsilon$ et alors pour tout $n \geq N + 2p$ on a $\ell - \varepsilon < S_n < \ell + \varepsilon$.

On pose aussi $f(0) = 1$. Désormais, on fixe $a \in \mathbb{R}$ et l'on pose $A = |a| + 1$. On fixe $\varepsilon > 0$.

8. (1 pt) En utilisant la question (5), montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on ait : $\displaystyle\sum_{n=p}^{p+k} \frac{A^n}{n!} < f(A) - S_{p-1}(A) < \varepsilon$.

Solution : D'après la question (5), la suite $(S_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et converge vers sa borne supérieure $f(A)$. Donc, $\varepsilon > 0$ étant fixé, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n = p + k \geq p$, on ait $f(A) - \varepsilon < S_{p-1}(A) < S_{p+k}(A) < f(A)$, d'où $0 < \displaystyle\sum_{n=p}^{p+k} \frac{A^n}{n!} = S_{p+k}(A) - S_{p-1}(A) < f(A) - S_{p-1}(A) < \varepsilon$.

9. (1 pt) On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a| < 1$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\left|\sum_{n=p+1}^{p+k} \frac{u_n(x) - u_n(a)}{x - a}\right| = \left|\sum_{n=p+1}^{p+k} \frac{1}{n!}\,\frac{x^n - a^n}{x - a}\right| \leq \sum_{n=p+1}^{p+k} \frac{A^{n-1}}{(n-1)!}$$

Solution : La fonction $h(t) = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{p+k} \frac{t^n}{n!}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe c compris entre a et x tel que

$$\sum_{n=p+1}^{p+k} \frac{1}{n!}\,\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(c) = \sum_{n=p+1}^{p+k} \frac{1}{n!} n c^{n-1} = \sum_{i=p}^{p+k-1} \frac{1}{i!} c^i.$$

De plus, comme $|x - a| < 1$ on a aussi $|c - a| < 1$ et donc $|c| \leq 1 + |a| = A$ et donc le terme de droite ci-dessus est $\leq \displaystyle\sum_{n=p}^{p+k-1} \frac{1}{n!} A^n$, qui est $< \varepsilon$ d'après la question précédente.

10. (1 pt) Déduire des questions précédentes que si $|x - a| < 1$ alors $\left|\dfrac{f(x) - S_p(x) + S_p(a) - f(a)}{x - a}\right| \leq \varepsilon$.

Solution : Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. D'après les deux questions précédentes on a :

$$\left|\frac{S_{p+k}(x) - S_p(x) + S_p(a) - S_{p+k}(a)}{x - a}\right| = \left|\sum_{n=p+1}^{p+k} \frac{u_n(x) - u_n(a)}{x - a}\right| < \varepsilon.$$

Lorsque k tend vers $+\infty$, $S_{p+k}(x)$ et S_{p+k} tendent, respectivement, vers $f(x)$ et $f(a)$. Donc, prenant la limite lorsque $k \to +\infty$, les inégalités (strictes) ci-dessus donnent l'inégalité large

$$\left|\frac{f(x) - S_p(x) + S_p(a) - f(a)}{x - a}\right| \leq \varepsilon.$$

FIN DE L'EXAMEN.

Questions à faire chez soi (pour les étudiants intéressés).

11. Montrer que $|S_{p+k}(a) - S_{p-1}(a)| \leq \displaystyle\sum_{n=p}^{n+k} \frac{A^n}{n!} < \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis que $|f(a) - S_{p-1}(a)| \leq \varepsilon$.

Solution : Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. Tenant compte de la question (8) on a :

$$|S_{p+k}(a) - S_{p-1}(a)| = \left|\sum_{n=p}^{p+k} \frac{a^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=p}^{p+k} \frac{|a|^n}{n!} \leq \sum_{n=p}^{p+k} \frac{A^n}{n!} < \varepsilon.$$

Prenant la limite lorsque $k \to +\infty$, on obtient $|f(a) - S_{p-1}(a)| \leq \varepsilon$.

12. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$, on ait $\left| \dfrac{S_p(x) - S_p(a)}{x-a} - \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} \frac{a^n}{n!} \right| < \varepsilon$.

Solution : Le terme de gauche égale $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \varphi_n(x)$, où $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{x^n - a^n}{x-a} - \dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!}$, et l'on a $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \varphi_n(x) = 0$. Pour $n = 1, \dots, p$ il existe donc $\delta_n > 0$ tel que $|\varphi_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{p}$ si $|x-a| < \delta_n$. Posant $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$, on obtient que si $|x-a| < \delta_n$ alors

$$\left| \frac{S_p(x) - S_p(a)}{x-a} - \sum_{n=0}^{p-1} \frac{a^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=1}^{p} |\varphi_n(x)| < \varepsilon.$$

De plus, quitte à remplacer δ par $\min(1, \delta)$, on peut supposer que $\delta \leq 1$.

13. Montrer que f est dérivable en a et déterminer $f'(a)$.

Solution : $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} - f(a)$ égale

$$\frac{f(x) - S_p(x) + S_p(a) - f(a)}{x-a} + S_{p-1}(a) - f(a) + \left(\frac{S_p(x) - S_p(a)}{x-a} - \sum_{n=0}^{p-1} \frac{a^n}{n!} \right).$$

Donc, d'après les trois questions précédentes, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$ on ait $\left| \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} - f(a) \right| \leq 3\varepsilon$. Ceci montre que f est dérivable en a et que $f'(a) = f(a)$.

14. Reconnaissez-vous la fonction $x \mapsto f(x)$?

Solution : On a donc obtenu que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f' = f$. De plus $f(0) = 1$. Ceci prouve l'existence de la fonction exponentielle et montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)$ est la limite lorsque n tend vers $+\infty$ des sommes $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, où par convention $x^0 = 1 = 0!$. On exprime ceci en écrivant que $\exp(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.