Groupe 112 – Devoir d'une heure 28/10/2013

Tout appareil électronique (calculatrices, téléphones portables, etc.) est interdit
*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les questions avec un * sont plus difficiles.*

Exercice 1 (2 pts) Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$f(x) = \sin(\cos(x)), \qquad g(x) = \arctan x^2.$$

Solution :

$$f'(x) = \sin'(\cos(x)) \cdot \cos'(x) = \cos(\cos(x)) \cdot (-\sin(x)) = -\cos(\cos(x))\sin(x).$$

$$g(x) = \arctan'(x^2) \cdot (x^2)' = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot (2x) = \frac{2x}{1+x^4}.$$

Exercice 2* (2 pts) Calculer les limites suivantes

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Solution :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n^{-1}}{\sqrt{1+n^{-1}}+\sqrt{1+n^{-2}}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x-0} = (e^x)'|_{x=0} = 1.$$

Exercice 3 (Cet exercice se compose de plusieurs questions. Si vous n'arrivez pas à en résoudre une, vous pouvez admettre son résultat et l'utiliser dans les questions suivantes.)
Dans cet exercice **on va démontrer** le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soient $a < b$ dans I. Supposons par exemple $f'(a) > f'(b)$, alors pour tout $\gamma \in]f'(b), f'(a)[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \gamma$.*

(1)(1pt) Expliquez pourquoi on ne peut pas appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) directement à f' et démontrer très simplement le **théorème 1** ?

Solution : Parce que f' n'est pas forcément continue.

(2)(1pt) En utilisant un théorème du cours, démontrez qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(c)$.

Démonstration. f est dérivable sur I donc elle est continue sur I donc sur $[a, b]$, qui est un intervalle fermé borné. D'après le théorème de Weierstrass, la borne supérieure est atteinte. Donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(c)$. □

(3)(2pts) Dans cette question on va démontrer que si $f'(a) > 0$, alors $\sup_{x\in[a,b]} f(x) > f(a)$, d'où $c \neq a$. Complétez la démonstration suivante **ou bien** donnez une autre démonstration de vous-même.

Démonstration. D'après la définition de la dérivabilité de f en a, on a :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) > 0.$$

Alors, d'après la définition de la limite d'une fonction en un point, prenant $\varepsilon = f'(a) > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a, a+\delta]$ on ait :

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \varepsilon = f'(a).$$

donc

$$-f'(a) < \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) < f'(a).$$

Ceci implique $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) > -f'(a)$, donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$. Alors $f(x)-f(a) > 0$ pour tout $x \in]a, a+\delta]$. Donc $\sup_{x\in[a,b]} f(x) \geqslant f(a+\delta) > f(a)$. □

(4)(1pts) En utilisant la méthode de la question (2), démontrez que si $f'(b) < 0$, alors $f(b) < \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, d'où $c \neq b$.

Démonstration. D'après la définition de la dérivabilité de f en b, on a

$$\lim_{\substack{x \to b \\ \neq}} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = f'(b) < 0.$$

Alors, d'après la définition de la limite d'une fonction en un point, prenant $\varepsilon = -f'(b) > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [b-\delta, b[$ on ait :

$$\left|\frac{f(b)-f(x)}{b-x} - f'(b)\right| < \varepsilon = -f'(b).$$

donc

$$f'(b) < \frac{f(b)-f(x)}{b-x} - f'(b) < -f'(b).$$

Ceci implique $\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} - f'(b) - f'(b) < -f'(a)$, donc $\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} < 0$. Alors $f(x)-f(b) > 0$ pour tout $x \in [b-\delta, b[$. Donc $\sup_{x\in[a,b]} f(x) \geqslant f(b-\delta) > f(b)$. □

(5)(2pts) En utilisant un théorème du cours et les conclusions des questions (1) et (2), démontrez que dans le cas où $f'(a) > 0 > f'(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. D'après les questions (1), (2), (3) f atteint son maximum sur $[a, b]$ en un point c *intérieur* à $[a, b]$. D'après le Théorème sur les extrema des fonctions dérivables, on a donc $f'(c) = 0$. □

(6*)(2pt) En utilisant la conclusion de la question (4), démontrez le cas général : si $f'(a) > \gamma > f'(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \gamma$.

Démonstration. On construit la fonction $g(x) = f(x) - \gamma x$. Alors g est dérivable sur I et l'on a $g'(a) = f'(a) - \gamma > 0$ et $g'(b) = f'(b) - \gamma < 0$. On applique la question (5) à g : il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$ d'où $f'(c) - \gamma = 0$. □