Groupe 112 – Devoir d'une heure 28/10/2013

Tout appareil électronique (calculatrices, téléphones portables, etc.) est interdit

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les questions avec un * sont plus difficiles.*

Exercice 1 (2 pts) Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$f(x) = \sin(\cos(x)), \qquad g(x) = \arctan x^2.$$

Exercice 2^* (2 pts) Calculer les limites suivantes

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Exercice 3 (Cet exercice se compose de plusieurs questions. Si vous n'arrivez pas à en résoudre une, vous pouvez admettre son résultat et l'utiliser dans les questions suivantes.)
Dans cet exercice **on va démontrer** le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soient $a < b$ dans I. Supposons par exemple $f'(a) > f'(b)$, alors pour tout $\gamma \in]f'(b), f'(a)[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \gamma$.*

(1)(1pt) Expliquez pourquoi on ne peut pas appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) directement à f' et démontrer très simplement le **théorème 1** ?

(2)(1pt) En utilisant un théorème du cours, démontrez qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(c)$.

(3)(2pts) Dans cette question on va démontrer que si $f'(a) > 0$, alors $\sup_{x\in[a,b]} f(x) > f(a)$, d'où $c \neq a$. Complétez la démonstration suivante **ou bien** donnez une autre démonstration de vous-même.

(4)(1pts) En utilisant la méthode de la question (2), démontrez que si $f'(b) < 0$, alors $f(b) < \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, d'où $c \neq b$.

(5)(2pts) En utilisant un théorème du cours et les conclusions des questions (1) et (2), démontrez que dans le cas où $f'(a) > 0 > f'(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

(6^*)(2pt) En utilisant la conclusion de la question (4), démontrez le cas général : si $f'(a) > \gamma > f'(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \gamma$.