U P M C – Paris 6 | 1M001
Mathématiques | 2013- 2014

Contrôle 1

Exercice 1 : Soit $a \in R$. On définit la fonction $f:]-1, \quad 1\,[\to R$ par :

$$f(x) = \frac{x\sin(1/x)}{\ln|x|} \qquad \text{pour } x \neq 0, \quad \text{et} \quad f(0) = a.$$

1. Citer des résultats du cours qui assurent que f est continue sur $]-1, \quad 1\,[\setminus\{0\}$ (1pt)
2. Calculer $\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} f(x)$.(2pts)
3. Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 0.(1pt)
4. Vérifier dans ce cas si f est dérivable en 0.(2pts)

Exercice 2 : On considère la fonction réelle f définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{e^{\tan(x)} - e^{-\tan(x)}}{e^{\tan(x)} + e^{-\tan(x)}}$$

1. Calculer $f'(x)$ $(x \in I)$.(3pts)
2. Déterminer l'image $J = f\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par f et montrer que f admet une application réciproque f^{-1} définie sur J. (2pts)
3. Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 0 et calculer sa dérivée en ce point.(1pt)
4. Calculer $\tan\left(f^{-1}(x)\right)$ $\quad (x \in J)$. (0.5pts)
5. Déterminer la dérivée de la fonction f^{-1}. (0.5 pts)