Université Pierre et Marie Curie 2013–2014
1M001, groupe MIPI 12-4 : corrigé de l'interrogation du 29 oct. 2013 (1h10)

Exercice 1 (3,5 pts)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (0,5 pt) Donner, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, une formule exprimant la somme $G_n(x) = 1 + x + \cdots + x^n$.

Solution : On a $G_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ (pour la preuve voir le poly, 3.12). En particulier, pour $n = 1$ ceci donne $(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2$.

2. (1 pt) En le justifiant brièvement, donner les DL_n en 0 de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et de $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x),$$

où $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x}$ est continue et nulle en 0. Donc le terme de droite ci-dessus donne le DL_n en 0 de $\dfrac{1}{1-x}$.
Puis, en remplaçant x par $-x$ on obtient le DL_n en 0 suivant :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x).$$

3. (1 pt) En le justifiant brièvement, donner le DL_{n+1} en 0 de $\ln(1 + x)$.

Solution : Comme la dérivée de $\ln(1 + x)$ est $\dfrac{1}{1+x}$ alors, en intégrant le DL_n en 0 de $\dfrac{1}{1+x}$ on obtient le DL_{n+1} en 0 de $\ln(1 + x)$:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x).$$

4. (1pt) Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{\ln(1 + x) + 1 - e^x}{\cos(x) - 1}$.

Solution : Au dénominateur, on a $\cos(x) - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$. Au numérateur,

$$\ln(1 + x) + 1 - e^x = x - \frac{x^2}{2} - x - \frac{x^2}{2} + x^2\varphi(x) = -x^2 + x^2\varphi(x).$$

Notant $f(x)$ la fonction dont on veut calculer la limite, on a donc au voisinage de $x = 0$:

$$f(x) = \frac{-x^2 + x^2\varphi(x)}{-x^2/2 + x^2\varepsilon(x)} = \frac{-1 + \varphi(x)}{(-1/2) + \varepsilon(x)}.$$

Dans cette expression, le numérateur (resp. dénominateur) tend vers -1 (resp. $-1/2$) quand x tend vers 0, donc $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} f(x) = 2$.

Exercice 2 (4 pts)**.** On note e le réel $\exp(1)$. (On pourra admettre les résultats des questions 1 et 2 ci-dessous, et tenir pour acquis que $e = 2,718\ldots$.)

1. (0,5 pt) En appliquant le théorème des accroissements finis à exp sur l'intervalle $[0, 1]$, montrer que $e > 2$.

Solution : D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$e - 1 = \frac{\exp(1) - \exp(0)}{1 - 0} = \exp'(c) = \exp(c),$$

et comme exp est strictement croissante et $c > 0$, on a $\exp(c) > \exp(0) = 1$. On obtient donc $e - 1 > 1$ d'où $e > 2$.

2. (1 pt) Soit $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto x \ln(x)$. En appliquant le théorème des accroissements finis à h sur l'intervalle $[1, 2]$, montrer que $\ln(2) > \dfrac{1}{2}$.

Solution : h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $h'(x) = \ln(x) + 1$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]1, 2[$ tel que

$$2\ln(2) = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 1 + \ln(c),$$

et comme ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $c > 1$, on a $\ln(c) > \ln(1) = 0$, d'où $2\ln(2) > 1$ et donc $\ln(2) > \dfrac{1}{2}$. (L'inégalité $(1/2) < \ln(2)$ équivaut à $\sqrt{e} < 2$ donc à $e < 4$, donc elle s'ensuit si l'on tient pour acquis que $e \simeq 2,718\dots$)

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par $g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(x)$.

3. (2 pts) Déterminer l'application dérivée g' et étudier les variations de g. Montrer qu'il existe un unique réel a tel que $g(a) = 0$, et que $1 < a < 2$.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $g'(x) = \dfrac{-1}{x^2} - \dfrac{1}{x} < 0$, donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $g(1) = 1 - 0 = 1$ et $g(2) = (1/2) - \ln(2) < 0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in]1, 2[$ tel que $g(a) = 0$. De plus, comme g est strictement décroissante, a est l'unique élément de $\mathbb{R}_+^*$ tel que $g(a) = 0$.

Même si cela n'était pas demandé dans l'énoncé, étudions les limites de f en $+\infty$ et en 0^+. En $+\infty$, $1/x$ tend vers 0 et $-\ln(x)$ vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. En 0^+, $1/x$ et $-\ln(x)$ tendent tous deux vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \ln(x)\exp(-x)$.

4. (0,5 pt) Déterminer l'application dérivée f' et étudier les variations de f. Montrer que f admet un unique maximum M, et que $M > \ln(2)e^{-2}$.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x) = (1/x)\exp(-x) - \ln(x)\exp(-x) = \exp(-x)g(x)$, donc $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$, c.-à.-d. > 0 sur $]0, a[$ et < 0 sur $]a, +\infty[$. Donc f est strictement croissante sur $]0, a]$ et strictement décroissante sur $[a, +\infty[$, et elle atteint en a son maximum, égal à $\ln(a)e^{-a}$. Comme $a \neq 2$, ce maximum est $> f(2) = \ln(2)e^{-2}$.

Exercice 3 (5,5 pts). 1. (0,5 pt) Soit $a \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $G_n = 1 + a + \cdots + a^n$. Montrer que la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $\ell = \dfrac{1}{1-a}$. (Considérer $\ell - G_n$.)

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $G_{n+1} - G_n = a^{n+1} > 0$ donc la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. D'autre part, on a vu dans l'exercice 1 que $G_n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$. Comme $|a| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{n+1} = 0$ et donc la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = \dfrac{1}{1-a}$. On pouvait aussi former la différence $\ell - G_n = \dfrac{a^{n+1}}{1-a}$ et dire que, puisque $|a| < 1$, cette différence tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle *à termes positifs* (c.-à.-d. ≥ 0).

(I) Pour les deux questions suivantes, on suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $a \in]0,1[$ tels que $u_{n+1} \leq au_n$ pour tout $n \geq N$. On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

2. (0,5 pt) Montrer qu'on a $u_{N+k} \leq a^k u_N$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Solution : Montrons ceci par récurrence sur k. Par hypothèse, ceci est vrai pour $k = 1$. Soit donc k un entier ≥ 2 et supposons avoir montré que $u_{N+k-1} \leq a^{k-1}u_N$. Ceci, combiné à l'hypothèse faite en (I), donne : $u_{N+k} \leq a\,u_{N+k-1} \leq a^k\,u_N$. Ceci prouve, par récurrence sur k, que $u_{N+k} \leq a^k\,u_N$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3. (1,5 pt) On utilisant les questions précédentes, montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et convergente.

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme toute suite croissante et majorée est convergente, il suffit donc de montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Soit N comme dans la question précédente. Comme $u_N \geq 0$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{N+k} \leq S_{N-1} + u_N\Big(1 + a + \cdots + a^k\Big) = S_{N-1} + u_N\frac{1-a^{k+1}}{1-a} \leq S_{N-1} + \frac{1}{1-a}u_N.$$

Ceci montre que la suite croissante $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc convergente.

(II) Pour les deux questions suivantes, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout $n \geq N$. On considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $A_n = u_0 - u_1 + \cdots + (-1)^n u_n$.

4. (2 pts) On définit les suites $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $U_k = A_{N+2k}$ et $V_k = A_{N+2k+1}$. Montrer que ces suites sont adjacentes. (On pourra se contenter de traiter, par exemple, le cas où N est *pair*.)

Solution : Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$U_k - U_{k-1} = (-1)^{N+2k}u_{N+2k} + (-1)^{N+2k-1}u_{N+2k-1},$$
$$V_k - V_{k-1} = (-1)^{N+2k+1}u_{N+2k+1} + (-1)^{N+2k}u_{N+2k}.$$

Tenant compte de l'hypothèse $u_{n+1} \leq u_n$ pour $n \geq N$, on obtient ce qui suit :

(i) Si N est *pair*, alors $U_k - U_{k-1} = u_{N+2k} - u_{N+2k-1} \leq 0$ et $V_k - V_{k-1} = -u_{N+2k+1} + u_{N+2k} \geq 0$, donc la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ croissante.

(ii) Si N est *impair*, alors $U_k - U_{k-1} = -u_{N+2k} + u_{N+2k-1} \geq 0$ et $V_k - V_{k-1} = u_{N+2k+1} - u_{N+2k} \leq 0$, donc la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décroissante.

Dans les deux cas, on a $V_k - U_k = (-1)^{N+2k+1}u_{N+2k+1}$ donc la suite $(V_k - U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Ceci montre, dans les deux cas, que les suites $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite ℓ.

5. (1 pt) En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Solution : Ceci découle de ce que les suites $(A_{N+2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(A_{N+2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers ℓ. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier p_0 (resp. p_1) tel que pour tout $k \geq p_0$ (resp. $\geq p_1$) on ait $|\ell - A_{N+2k}| < \varepsilon$ (resp. $|\ell - A_{N+2k+1}| < \varepsilon$). Soit $p = \max(p_0, p_1)$. Alors on a $|\ell - A_{N+2k}| < \varepsilon$ et $|\ell - A_{N+2k+1}|$ pour tout $k \geq p$, donc $|\ell - A_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N + 2p$. Ceci montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \ell$.

Autre démonstration. Il résulte de la question précédente que ℓ est la borne supérieure de l'ensemble $\{A_{2k+1} \mid 2k+1 > N\}$ (c.-à-d., l'ensemble des termes de la suite dont l'indice est impair et $> N$) et la borne inférieure de l'ensemble $\{A_{2k} \mid 2k > N\}$ (c.-à-d., l'ensemble des termes de la suite dont l'indice est pair et $> N$). Donc, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $p \geq N$ tel que pour tout $k \geq p$ on ait

$$\ell - \varepsilon < A_{2k} \leq \ell \leq A_{2k+1} < \ell + \varepsilon$$

et alors pour tout $n \geq 2p$ on a $\ell - \varepsilon < A_n < \ell + \varepsilon$. Ceci montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \ell$ (et cela dit de plus que les termes A_n avec $n \geq N$ et n impair (resp. pair) convergent vers ℓ « par en-dessous » (resp. « par au-dessus »).