Université Pierre et Marie Curie 2013–2014
1M001, groupe MIPI 12-4 : interrogation du 29 oct. 2013 (1h10)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte **3** exercices et est noté sur **13**.

Exercice 1 (3,5 pts)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (0,5 pt) Donner, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, une formule exprimant la somme $G_n(x) = 1 + x + \cdots + x^n$. (Pour éviter des erreurs, vérifiez par exemple que votre formule est correcte pour $n = 2$.)
2. (1 pt) En le justifiant brièvement, donner les DL_n en 0 de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et de $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
3. (1 pt) En le justifiant brièvement, donner le DL_{n+1} en 0 de $\ln(1+x)$.
4. (1pt) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \dfrac{\ln(1+x) + 1 - e^x}{\cos(x) - 1}$.

Exercice 2 (4 pts)**.** On note e le réel $\exp(1)$. (On pourra admettre les résultats des questions 1 et 2 ci-dessous, et tenir pour acquis que $e = 2,718\ldots$.)

1. (0,5 pt) En appliquant le théorème des accroissements finis à exp sur l'intervalle $[0, 1]$, montrer que $e > 2$.
2. (1 pt) Soit $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto x\ln(x)$. En appliquant le théorème des accroissements finis à h sur l'intervalle $[1, 2]$, montrer que $\ln(2) > \dfrac{1}{2}$.

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par $g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(x)$.

3. (2 pts) Déterminer l'application dérivée g' et étudier les variations de g. Montrer qu'il existe un unique réel a tel que $g(a) = 0$, et que $1 < a < 2$.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \ln(x)\exp(-x)$.

4. (0,5 pt) Déterminer l'application dérivée f' et étudier les variations de f. Montrer que f admet un unique maximum M, et que $M > \ln(2)e^{-2}$.

Exercice 3 (5,5 pts)**.** 1. (0,5 pt) Soit $a \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $G_n = 1 + a + \cdots + a^n$. Montrer que la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $\ell = \dfrac{1}{1-a}$. (Considérer $\ell - G_n$.)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle *à termes positifs* (c.-à.-d. ≥ 0).

(I) Pour les deux questions suivantes, on suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $a \in]0, 1[$ tels que $u_{n+1} \leq a u_n$ pour tout $n \geq N$. On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

2. (0,5 pt) Montrer qu'on a $u_{N+k} \leq a^k u_N$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3. (1,5 pt) On utilisant les questions précédentes, montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et convergente.

(II) Pour les deux questions suivantes, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout $n \geq N$. On considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $A_n = u_0 - u_1 + \cdots + (-1)^n u_n$.

4. (2 pts) On définit les suites $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $U_k = A_{N+2k}$ et $V_k = A_{N+2k+1}$. Montrer que ces suites sont adjacentes. (On pourra se contenter de traiter, par exemple, le cas où N est *pair*.)
5. (1 pt) En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.