TD 13.1 – Devoir surveillé du 16/10/2013

Question de cours : *Énoncé du théorème de Rolle.*
Soit $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$, tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 1. *Soit $u_0 = 1$ et $u_n = \dfrac{n!}{n^5}$, si $n \geq 1$.*

1. *Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 2$.*
2. *La suite (u_n) converge-t-elle ?*

1. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^5}{(n+1)^5} = (n+1)\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^5}.$$
Comme $\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, on a $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^5 = 1^5$ par continuité de $x \mapsto x^5$ et par propriétés des limites, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$. Donc il existe N tel que pour $n > N$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 2$.
2. On en déduit que la suite u_n est croissante à partir du rang N au moins donc converge vers une limite ℓ. Si $\ell \neq +\infty$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$ ce qui n'est pas le cas. Donc $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$.

Exercice 2. *Montrer que pour tous x, y réels, on a*
$$1 + |xy - 1| \leq (1 + |x-1|)(1 + |y-1|).$$

On remarque que $(xy - 1) = (x-1)(y-1) + (x-1) + (y-1)$ donc en utilisant l'inégalité triangulaire
$$|xy - 1| \leq |x-1||y-1| + |x-1| + |y-1|$$
soit
$$1 + |xy-1| \leq |x-1||y-1| + |x-1| + |y-1| + 1 = (1 + |x-1|)(1 + |y-1|).$$

Exercice 3.

1. *On considère la fonction $\varphi(x) = x\cos(x) - \sin(x)$.*
   (a) *Étudier les variations de la fonction φ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Quelle est l'image $\varphi([0, 2\pi])$ de l'intervalle $[0, 2\pi]$ par la fonction φ ?*
   On a $\varphi'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$. φ' s'annule pour $x = 0, \pi$ et 2π. $\varphi'(x)$ est négatif pour $0 \leq x \leq \pi$ puis positif pour $\pi \leq x \leq 2\pi$. Le minimum de φ est atteint pour $x = \pi$ et vaut $-\pi$. Il y a deux maxima locaux : $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(2\pi) = 2\pi$. On en déduit que $\varphi([0, 2\pi]) = [-\pi, 2\pi]$.
   (b) *Montrer qu'il existe un unique nombre réel α dans l'intervalle $]0, 2\pi[$ et tel que $\varphi(\alpha) = 0$.*
   Sur $[0, \pi]$, φ est strictement négative. Sur $[\pi, 2\pi]$, φ est strictement croissante et $\varphi([\pi, 2\pi]) = [-\pi, 2\pi]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule une fois sur $[\pi, 2\pi]$ et puisque φ est strictement croissante sur cet intervalle, φ s'annule une seule fois.
   (c) *Montrer que α appartient à l'intervalle $]5\pi/4, 3\pi/2[$.*
   Remarquons que $\varphi(5\pi/4) = 5\pi/4\cos 5\pi/4 - \sin 5\pi/4 = -5\pi/4\cos\pi/4 - \sin\pi/4 < 0$ et $\varphi(3\pi/2) = -\sin 3\pi/2 = 1$. φ change de signe entre $5\pi/4$ et $3\pi/2$ donc s'annule entre ces deux valeurs.

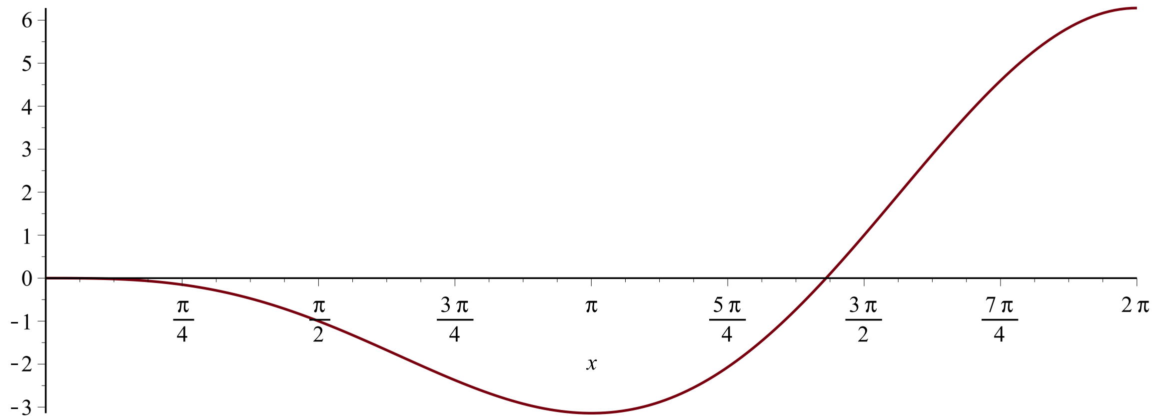

FIGURE 1 – Courbe $y = \varphi(x), x \in [0, 2\pi]$

2. *On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, \pi]$ par :*

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \neq 0$$

   (a) *Montrer que la fonction f est continue en 0 puis montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.*
   $x \mapsto \sin x$ est dérivable en 0, de dérivée $\cos 0 = 1$. On en déduit que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, comme limite du taux d'accroissement. Donc f est continue en 0. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables. En 0, on a d'après le théorème des accroissements finis $\dfrac{\sin x}{x} = \cos y$, où $|y| \leq |x|$. Mais alors

$$\frac{\dfrac{\sin x}{x} - 1}{x} = \frac{\cos y - 1}{x}$$

   et on déduit que

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = \left|\frac{\cos y - 1}{x}\right| \leq \left|\frac{\cos y - 1}{y}\right| \to_{x \to 0} 0.$$

   La dernière limite $\dfrac{\cos y - 1}{y}$ est obtenue comme limite du taux d'accroissement de $y \mapsto \cos y$ en 0, soit $-\sin 0 = 0$. Par conséquent f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. *Cette question était difficile et ne compte pas dans le barème.*

   (b) *Montrer que f est une bijection de l'intervalle $[0, \pi]$ dans l'intervalle $[0, 1]$.*
   On a $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x}$. D'après la première question, f est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, donc est une bijection sur son image $[f(\pi), f(0)] = [0, 1]$.