TD 13.1 – Devoir surveillé du 16/10/2013

Tout appareil électronique (calculatrices, téléphones portables, etc.) est interdit

Numéro d'étudiant							

Nom		**Prénom**	

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. **Les différents exercices sont totalement indépendants**.

Question de cours : Énoncé du théorème de Rolle.

Exercice 1. Soit $u_0 = 1$ et $u_n = \dfrac{n!}{n^5}$, si $n \geq 1$.

1. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 2$.
2. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 2. Montrer que pour tous x, y réels, on a

$$1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|).$$

Ind. : on pourra utiliser l'inégalité triangulaire.

Exercice 3.

1. On considère la fonction $\varphi(x) = x\cos(x) - \sin(x)$.
   (a) Étudier les variations de la fonction φ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Quelle est l'image $\varphi([0, 2\pi])$ de l'intervalle $[0, 2\pi]$ par la fonction φ ?
   (b) Montrer qu'il existe un unique nombre réel α dans l'intervalle $]0, 2\pi[$ et tel que $\varphi(\alpha) = 0$.
   (c) Montrer que α appartient à l'intervalle $]5\pi/4, 3\pi/2[$.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, \pi]$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \neq 0$$

   (a) Montrer que la fonction f est continue en 0 puis montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
   (b) Montrer que f est une bijection de l'intervalle $[0, \pi]$ dans l'intervalle $[0, 1]$.

On rappelle que $\sin'(x) = \cos x$ *et* $\cos'(x) = -\sin x$.