TD 13.2 – Devoir surveillé du 22/10/2013

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. **Les différents exercices sont totalement indépendants**.

Question de cours : *Énoncé du théorème des accroissements finis.*
Soit $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Exercice 1. *Soit pour* $n \geq 1$, $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

1. *Montrer que* (u_n) *est croissante, et que* $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. (u_n) *converge-t-elle ?*
   On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} \geq 0$ donc u_n est croissante. On a
   $$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$
   On en déduit que la suite u_n ne converge pas sinon on aurait $\lim_{n\to\infty}(u_{2n} - u_n) = 0$ ce qui n'est pas le cas. On pourrait aussi montrer que $u_{2^n} \geq \dfrac{n}{2}$.
2. *Montrer que* (v_{2n}) *est croissante et que* (v_{2n+1}) *est décroissante.*
   On a $v_{2n+2} - v_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} > 0$ donc v_{2n} est croissante.
   On a aussi $v_{2n+3} - v_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+3} - \dfrac{1}{2n+2} < 0$ donc v_{2n+1} est décroissante.
3. *En déduire que* (v_n) *est convergente.*
   D'autre part on a $v_{2n} < v_{2n+1}$ d'où on déduit que
   $$v_0 < v_2 < \cdots < v_{2n} < v_{2n+1} < \cdots < v_1.$$
   Par conséquent la suite v_{2n} est croissante et majorée par v_1 et la suite v_{2n+1} est décroissante minorée par v_0. Les deux suites v_{2n} et v_{2n+1} sont convergentes. Comme par ailleurs $v_{2n+1} - v_{2n}$ tend vers 0, on en déduit que v_{2n} et v_{2n+1} convergent vers la même limite ℓ.
   On en déduit (résultat du cours) que v_n converge vers ℓ. On peut aussi remarque que
   $$v_{2[\frac{n}{2}]} \leq v_n \leq_{2[\frac{n}{2}]+1}$$
   qui converge par le théorème des gendarmes.

Exercice 2.

1. *Montrer que pour tous x, y réels positifs, on a*

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

On a $x + y \leq x + y + 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

2. *Montrer que pour tous a, b réels on a*

$$\sqrt{|a-b|} \geq \sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}.$$

On a $|a| \leq |b| + |a-b|$ donc

$$\sqrt{|a|} \leq \sqrt{|b| + |a-b|} \leq \sqrt{|b|} + \sqrt{|a-b|}.$$

Donc $\sqrt{|a-b|} \geq \sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}$.

Exercice 3. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. (a) *Quel est l'ensemble de définition de f ?*
   On a $e^x > 0$ pour tout x donc le dénominateur de $f(x)$ n'est jamais nul et l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

   (b) *Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.*
   On a $f(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$. et $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} = 0$ donc par composition de limite, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$. De la même façon, puisque f est impaire, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

2. (a) *Calculer $f'(x)$ pour x réel. Montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$.*
   En utilisant les formules usuelle de dérivations, on a

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

   (b) *Montrer que pour tout x réel, on a $f'(x) = 1 - [f(x)]^2$.*
   On a aussi

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = 1 - [f(x)]^2.$$