

TD 13.2 – Devoir surveillé du 22/10/2013

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. **Les différents exercices sont totalement indépendants.**

Question de cours : Énoncé du théorème des accroissements finis.

Exercice 1. Soit pour $n \geq 1$, $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante, et que $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. (u_n) converge-t-elle ?
2. Montrer que (v_{2n}) est croissante et que (v_{2n+1}) est décroissante.
3. En déduire que (v_n) est convergente.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tous x, y réels positifs, on a

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

2. Montrer que pour tous a, b réels on a

$$\sqrt{|a-b|} \geq \sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}.$$

Exercice 3. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. (a) Calculer $f'(x)$ pour x réel. Montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
(b) Montrer que pour tout x réel, on a $f'(x) = 1 - [f(x)]^2$.