Corrigé du devoir 1 – 30 octobre 2013 – MIPI 13.3

Exercice 1. 1. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2).$$

2. En déduire que pour $a>0$, et $b>0$,

$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Démonstration. 1. On sait que $(a-b)^2 \geqslant 0$ donc $a^2-2ab+b^2 \geqslant 0$. On déduit que $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

2. On a $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \frac{1}{2}\ln(ab) = \ln\sqrt{ab}$, car $a,b>0$.
D'après la question précédente, $\sqrt{a}\sqrt{b} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2\right)$ i.e. $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. De plus la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, donc $\ln\sqrt{ab} \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Comme $\ln\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$, on en déduit le résultat. □

Exercice 2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n(1-x)$.

1. Expliquer pourquoi f_n est dérivable sur $[0,1]$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer
$$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x).$$
3. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} f_n(x)\right).$$

Démonstration. 1. La fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0,1]$. On a, pour $x\in[0,1]$

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \left(nx^{n-1}\right)(1-x) + x^n \times (-1) \\ &= nx^{n-1} - (n+1)x^n. \\ &= nx^{n-1}\left(1-\frac{n+1}{n}x\right). \end{aligned}$$

2. Comme f_n est continue sur le segment $[0,1]$, elle est continue et atteint ses bornes, donc $\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = \max_{x\in[0,1]} f_n(x)$. Pour chercher le maximum, étudions les variations de f_n.
La dérivée f_n' s'annule en 0 et en $x_n = \frac{n}{n+1}$. On obtient le tableau de variation suivant pour f_n :

x	0		x_n		1
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

avec $M_n = f_n(x_n)$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = M_n &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < \frac{n}{n+1} < 1$ donc $0 < \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$, et
$$0 < \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) < \frac{1}{n+1}.$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, on a par encadrement
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = 0.$$

□

Exercice 3. Soit $f : [0, +\infty[$, continue et positive, telle que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$
Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

1. Déterminer les ensembles de définition et de continuité de la fonction g définie par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.
2. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \geqslant M$, on a $g(x) < 1$.
3. On suppose dans cette question que $f(0) > 0$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et en déduire qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \leqslant m$, on a $g(x) > 1$.
4. Montrer qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
5. $(*)$ Adapter la preuve au cas où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell < 1$.

Démonstration.
1. La fonction g est définie et continue sur $]0, +\infty[$, comme quotient de deux fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas.
2. Comme $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{2}$, par définition de la limite, il existe $M > 0$ tel que
$$x \geqslant M \Rightarrow \left|g(x) - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$
On a en particulier, si $x \geqslant M$,
$$g(x) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1.$$
3. Comme f est continue en 0, on a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) > 0$, et de plus $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Ainsi, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.
On en déduit par définition de la limite qu'il existe $m > 0$ tel que si $|x| \leqslant m$, alors $g(x) \geqslant 1$.
4. Si $f(0) = 0$, alors $\alpha = 0$ convient. Sinon, comme f est positive, $f(0) > 0$. Prenons alors $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant m$ et $\alpha_1 \geqslant M$, on a d'après les deux questions précédentes $g(\alpha_0) > 1$ et $g(\alpha_1) < 1$. Comme g est continue sur $[\alpha_0, \alpha_1]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ tel que $g(\alpha) = 1$ i.e. $f(\alpha) = \alpha$.
5. Le seul résultat à adapter est celui de la question 2. Comme $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell < 1$, par définition de la limite, il existe $M > 0$ tel que
$$x \geqslant M \Rightarrow |g(x) - \ell| \leqslant \frac{1-\ell}{2}.$$
Ainsi, on a en particulier, si $x \geqslant M$,
$$g(x) \leqslant \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2} < 1.$$
Le reste de la preuve se déroule de la même façon que lorsque $\ell = \frac{1}{2}$.

□