Devoir 1 – 30 octobre 2013 – MIPI 13.3

Tout appareil électronique (calculatrices, téléphones portables, etc.) est interdit

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Question de cours (2 points)

Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Devoir (13 points)

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
$$ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$
2. En déduire que pour $a > 0$, et $b > 0$,
$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n(1 - x)$.

1. Expliquer pourquoi f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer
$$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x).$$
3. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} f_n(x)\right).$$

Exercice 3. Soit $f : [0, +\infty[$, continue et positive, telle que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

1. Déterminer les ensembles de définition et de continuité de la fonction g définie par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.
2. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \geqslant M$, on a $g(x) < 1$.
3. On suppose dans cette question que $f(0) > 0$. Déterminer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ et en déduire qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \leqslant m$, on a $g(x) > 1$.
4. Montrer qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
5. $(*)$ Adapter la preuve au cas où $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1$.