Analyse et algèbre pour les sciences

Corrigé du devoir surveillé 1 - Groupe 14.1

Exercice 1 (Question de cours)

Soit $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin(x)$.

1. f et f^{-1} sont strictement croissante.
2. Le domaine de définition de f^{-1} est $[-1, 1]$.
3. f^{-1} est continue donc $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f^{-1}(x) = f^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f^{-1}(x) = f^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$
4. $f'(x) = \cos(x)$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Exercice 2 - 6 points

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. On sait que f admet une fonction réciproque f^{-1} continue sur l'intervalle $f(I)$. Soit $a \in I$ et $y \in f(I)$ tel que $y \neq f(a)$. y admet un et un seul antécédent par f noté $x = f^{-1}(y)$.

1. Si $x = a$, alors $y = f(a)$, ce qui est en contradiction avec l'énoncé. Donc $x \neq a$.
2. Le taux d'accroissement demandé vaut :
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}.$$
3. $\frac{x-a}{f(x)-f(a)}$ admet une limite lorsque $x \to a$ si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite non nulle lorsque $x \to a$. Donc f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si f est dérivable et de dérivée non nulle en a, et on a alors $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.
4. D'après la formule énoncé dans la question précédente,
$$\arctan'(\tan(x)) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}.$$
Ce qui donne $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$.
5. $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\arctan'(1) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3 - 10 points

Dans cet exercice, on cherche des réels a et b rendant continue la fonction f donnée par :
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ ax + b & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ x^3 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} + \ln(x)\right| & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. $f(0) = b$ et $f(-2) = -2a + b$.
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \ln(x) = 0$. (cf cours sur les croissance comparées.)
3. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, on a :
$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2.$$
D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
4. D'après l'inégalité triangulaire sur la valeur absolue, pour tout $x > 0$,
$$0 \leq f(x) \leq \left|x^3 \ln(x)\right| + \left|x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|.$$
Donc, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

5. Pour que f soit continue en 0, il faut que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = b$, c'est à dire $b = 0$.
6. Pour que f soit continue en -2, il faut que $\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = f(-2) = -2a + b$, c'est à dire que $0 = -2a + b$. Il faut donc prendre $a = b/2 = 0$.
7. On a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} + \ln(x)\right|.$$

Comme $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, on montre de la même manière que pour la question 4 que $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$.

8. Comme $a = b = 0$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$. f est donc dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

Exercice 4 - 4 points

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.

1. A et B sont non vides et bornées. Elles admettent donc une borne supérieure et une borne inférieure.
2. $\sup(B)$ est un majorant de B. Or pour tout $x \in A$, on a aussi $x \in B$. Donc pour tout $x \in A$, $x \leq \sup(B)$. $\sup(B)$ est donc un majorant de A. Comme $\sup(A)$ est le plus petit majorant de A, on obtient bien : $\sup(A) \leq \sup(B)$.
3. De même, on montre que $\inf(B)$ est un minorant de A. $\inf(A)$ étant le plus grand minorant de A, on obtient que $\inf(B) \leq \inf(A)$.

Exercice 5 (Bonus, à ne faire que si le reste est fait) - 2 points

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et telle que $f(a) = f(b)$. f, fonction continue sue m'intervalle fermé borné $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes sur $[a, b]$. Notons m un point où f atteint son minimum et M un point où f atteint son maximum.

- Cas 1 : Si $m = a$ ou $m = b$ et si $M = a$ ou $M = b$, pour tout $x \in [a, b]$, $f(a) = f(b) \leq f(x) \leq f(a) = f(b)$, autrement dit, la fonction f est constante et pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$. On prend alors $c \in]a, b[$ quelconque.
- Cas 2 : Si $m \in]a, b[$, alors $f'(m) = 0$. On prend alors $c = m$.
- Cas 3 : Si $M \in]a, b[$, alors $f'(M) = 0$. On prend alors $c = M$.