Université Pierre et Marie Curie — Année 2013-2014
1M001 — Semestre 1

Analyse et algèbre pour les sciences

Devoir surveillé 1 - Groupe 14.1

Exercice 1 (Question de cours)

Soit $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin(x)$.

1. f est-elle monotone ? Sa réciproque f^{-1} est-elle monotone ?
2. Donner le domaine de définition de la fonction réciproque f^{-1} de f.
3. Donner $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f^{-1}(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f^{-1}(x)$
4. Que vaut f' ? Calculer $(f^{-1})'$ à partir de la formule générale.

Exercice 2 - 6 points

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. On sait que f admet une fonction réciproque f^{-1} continue sur l'intervalle $f(I)$. Soit $a \in I$ et $y \in f(I)$ tel que $y \neq f(a)$. y admet un et un seul antécédent par f noté $x = f^{-1}(y)$.

1. Montrer que $x \neq a$.
2. Exprimer le taux d'accroissement de f^{-1} entre $f(a)$ et y en fonction de x, a et f.
3. En déduire la condition pour que f^{-1} soit dérivable en $f(a)$.
4. Application : calculer la dérivée de la fonction arctan en $y = \tan(x)$ en fonction de $\tan(x)$.
5. Que valent $\arctan(1)$ et $\arctan'(1)$?

Exercice 3 - 10 points

Dans cet exercice, on cherche des réels a et b rendant continue la fonction f donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ ax + b & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ x^3 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} + \ln(x)\right| & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Que vaut $f(0)$? Que vaut $f(-2)$?
2. Que vaut $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \ln(x)$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
4. Utiliser les résultats obtenus aux questions 2 et 3 pour calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
5. Que doit valoir b pour que f soit continue en 0 ? Justifier.
6. Que doit valoir a pour que f soit continue ? Justifier.
7. Pour cette question et la suivante, on choisit $a = 0$ et $b = 0$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.
8. f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, que vaut $f'(0)$?

Exercice 4 - 4 points

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.

1. A et B admettent-elles une borne inférieure ? Une borne supérieure ?
2. Montrer que $\sup(A) \leq \sup(B)$.
3. Comparer $\inf(A)$ et $\inf(B)$.

Exercice 5 (Bonus, à ne faire que si le reste est fait) - 2 points

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et telle que $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.