TD 3S 1 – Évaluation du 29/10/2013

Aucun document ou appareil électronique autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Exercice 0 Énoncer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.

Exercice 1 Montrer les égalités suivantes, après avoir précisé pour quels réels t les expressions suivantes sont définies.

$$\cos(t) = \frac{1 - \left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2}{1 + \left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2}$$

$$\sin(t) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2}$$

Exercice 2 Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes, étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, et vérifier si l'ensemble $A_{(u_n)} := \{u_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ est borné.

a)

$$u_n = (-1)^n . \frac{n+1}{n^2}$$

b)

$$u_n = \tan\left(\frac{n\pi - 2}{2n}\right)$$

Exercice 3 Montrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

Indication: on peut étudier les fonctions $x \mapsto x - \sin x$ et $x \mapsto \sin x - \frac{2}{\pi}x$.

Exercice 4

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $a \in I$. Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que f' a une limite finie l en a. Montrer que f est alors dérivable en a et que $f'(a) = l$. (Indication: on pourra prendre (x_n) une suite de $I \setminus \{a\}$ qui tend vers a, et appliquer le théorème des accroissements finis entre a et x_n pour tout n).

2)a) Soit f la fonction qui à un nombre x associe $\operatorname{Arcsin}(1 - x^4)$. Donner le domaine maximal de définition D_f de f. En déduire que f est continue sur $I = [-1, 1]$. Montrer, en utilisant le domaine de dérivabilité de Arcsin, que f est dérivable sur $I^* = [-1, 0[\cup]0, 1]$

b) Montrer que f est dérivable en 0.