TD SDR – Devoir sur table du 30/10/2013

Les appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, etc.) et les documents sont interdits.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1

1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

2) En utilisant la question 1, trouver la limite de $\ln(1+\frac{1}{x})^x$ lorsque x tend vers ∞.

3) Calculer, en justifiant, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$.

Exercice 2

On considère l'application $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

1) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que $\tan(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$.

2) En étudiant la dérivée de tan et en utilisant le résultat de la question 1, montrer que cette application est bijective. On note arctan sa réciproque.

3) Montrer que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (*Indication :* Utiliser l'une des deux formules qu'on a déduit pour $\tan'(y)$).

Exercice 3

1) A l'aide du théorème des gendarmes, trouver la limite de $\frac{\sin n}{n}$ lorsque n tend vers ∞.

2) En utilisant le résultat obtenu à la question 1, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sin n}(e^{\frac{\sin n}{n}}-1)$ existe et calculer cette limite.

Exercice 4

Dans cet exercice, on s'intéresse à la fonction $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{2}$.

1) Montrer que f est la composée de deux fonctions usuelles.

2) Donner, en justifiant, le domaine de définition de f.

3) Donner, en justifiant, son domaine de dérivabilité. Calculer sa dérivée sur ce domaine.

4) En utilisant la dérivée calculée à la question 3, étudier les variations de f.

Exercice bonus

1) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $1-x^n = (1-x)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)$.

2) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par $a_n = 1+\frac{1}{2}+...+(\frac{1}{2})^{n-2}+(\frac{1}{2})^{n-1}$, converge. Calculer sa limite.