Analyse et algèbre pour les sciences - Interrogation 1.

Exercice 1 : (5 points)
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^{x^3-x+1}}{x-1}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Montrer que f est dérivable et montrer que pour tout x dans le domaine de définition de f, $f'(x)$ a le même signe que $3x^3 - 3x^2 - x$.

c) Calculer les limites de f en $\pm\infty$, ainsi qu'aux points où f n'est pas définie.

d) Établir le tableau de variation de f.

e) Représenter graphiquement le graphe de la fonction f.

f) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$ (suivant la valeur de y).

Exercice 2 : (4 points)
On considère la suite $u_n := 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$.

a) Montrer que les suites $v_n := u_{2n}$ et $w_n := u_{2n+1}$ sont adjacentes.

b) Montrer que (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ telle que $u_{2n+1} < l < u_{2n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On suppose que l est rationnel, c'est-à-dire que $l = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$.

   i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier a_n tel que $qa_n - \frac{q}{2n+1} < p(2n)! < qa_n$.

   ii) En déduire que l n'est pas rationnel.

Exercice 3 : (4 points)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $S_n(x) := 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$S_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(x)}{nx^{n+1}} = \frac{1}{x(x-1)}$.

c) Montrer que si $0 \le x < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.