

## TD 115 Interrogation n° 2

6/12/13 - Durée 1h

---

**Tout appareil électronique (calculatrices, téléphones portables, etc.) est interdit.**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.*

---

### Exercice 1 - Nombres complexes

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $\frac{1}{4}z^2 + 3^{1/4}z - i = 0$ .
2. Calculer la partie réelle et imaginaire de  $w = \frac{\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)}{1 + i}$ .
3. Calculer le module et l'argument de  $w$ .
4. Déterminer les racines carrées de  $w$ .
5. Donner l'expression des racines n-ième de  $w$ .
6. Déduire la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

### Exercice 2 - Equations différentielles

Soit l'équation (E) :

$$(E) : x(x^2 + 1)y' - 2y = x^3(x - 1)^2e^{-x}$$

1. Déterminer  $a$ ,  $b$ , et  $c$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \frac{2}{x(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$ .
2. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
3. Déterminer une fonction  $f(x) = P(x)e^{-x}$ , où  $P$  est un polynôme, telle que  $f'(x) = (x - 1)^2e^{-x}$ .
4. Résoudre l'équation (E).

### Exercice 3 - Développements limités

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$  par  $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{x^2 - 1}$ .

1. Donner le développement limité d'ordre 2 de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
2. Déduire l'équation d'une asymptote à la courbe représentative de  $f$  au voisinage de  $+\infty$  et donner sa position relative par rapport à la courbe de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .