Université Pierre et Marie Curie 2013–2014
1M001, groupe MIPI 12-4
Corrigé du devoir no.2 du 3 déc. 2013 (1h) + question de cours no.11 (10 mn)

Question de cours (2 pts)**.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n > 0$.

1. (1 pt) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Donner la définition de : « a est racine de P d'ordre k » et en donner la caractérisation en termes de P et de ses polynômes dérivés.

Solution : Par définition, a est racine de P d'ordre k si P est divisible par $(X-a)^k$ mais pas par $(X-a)^{k+1}$, c'est-à-dire si l'on a $P = (X-a)^k Q$ avec $Q(a) \neq 0$ (où Q est un polynôme de degré $n-k$).

On a démontré en cours que ceci est le cas si et seulement si P et ses dérivés jusqu'à l'ordre $k-1$ s'annulent en a, mais le k-ième polynôme dérivé $P^{(k)}$ ne s'y annule pas, c'est-à-dire : $P(a) = 0 = \cdots = P^{(k-1)}(a)$ mais $P^{(k)}(a) \neq 0$. Donc :

(1) a est racine simple (i.e. d'ordre 1) si et seulement si $P(a) = 0$ mais $P'(a) \neq 0$.

(2) a est racine double si et seulement si $P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$ mais $P''(a) \neq 0$.

(3) a est racine triple si et seulement si $P(a) = 0 = P'(a) = P''(a)$ mais $P^{(3)}(a) \neq 0$.

(4) a est racine d'ordre 4 si et seulement si $P(a) = 0 = P'(a) = P''(a) = P^{(3)}(a)$ mais $P^{(4)}(a) \neq 0$, etc.

2. (1 pt) Soit $P = X^3 - 6X^2 + 9X - 4$. Calculez le polynôme dérivé P' puis ses deux racines dans $\mathbb{R}$, puis déterminez, en le justifiant, si P admet une racine multiple ou non.

Solution : On a $P' = 3X^2 - 12X + 9 = 3(X^2 - 4X + 3) = 3(X-1)(X-3)$ donc les racines de P' sont 1 et 3. Si P a une racine multiple a, alors a est racine de P' donc égale à 1 ou 3, donc il suffit de voir si 1 ou 3 est racine de P. On calcule $P(3) = -4$ et $P(1) = 0$. Donc 1 est racine de P d'ordre ≥ 2. Pour déterminer son ordre, calculons $P''(X) = 6X - 12$; on a $P''(1) = -6 \neq 0$ donc 1 est racine double de P mais pas triple.

Bien que cela ne soit pas demandé par l'énoncé, faisons la division euclidienne de P par $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$ pour déterminer la 3-ième racine de P :

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 6X^2 + 9X - 4 & X^2 - 2X + 1 \\ \cline{2-2} -4X^2 + 8X - 4 & X - 4 \\ 0 & \end{array}$$

Donc $P = (X-1)^2(X-4)$.

Exercice 1 (4 pts)**.** Déterminer sur l'intervalle I donné les solutions des équations différentielles :

1. (2 pts) $y'(x) = 2x\,y(x) + e^{x^2+\sin(x)}\cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$.

Solution : Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $a(x) = 2x$ est la fonction $A(x) = x^2$, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions λe^{x^2}, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution de l'équation avec 2ème membre sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{x^2}$, où cette fois $\lambda(x)$ est une fonction (« méthode de variation de la constante »). On obtient alors que $\lambda'(x)e^{x^2} = e^{x^2+\sin(x)}\cos(x)$, d'où $\lambda'(x) = e^{\sin(x)}\cos(x)$. On reconnaît à droite la dérivée de $e^{\sin(x)}$, d'où $\lambda(x) = e^{\sin(x)} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ et les solutions sont donc les fonctions $y(x) = e^{x^2+\sin(x)} + c\,e^{x^2}$, pour $c \in \mathbb{R}$.

Bien que cela ne soit pas demandé par l'énoncé, déterminons la solution y telle que $y(0) = 1$. Comme $e^{\sin(0)} = 1$, on obtient $c = 0$.

2. (2 pts) $y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} y(x) + e^{\sqrt{x}}(1+\tan(x)^2)$ sur $I =]0, \pi/2[$.

Solution : Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $a(x) = 1/2\sqrt{x}$ est la fonction $A(x) = \sqrt{x}$, donc les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène sont les fonctions $\lambda e^{\sqrt{x}}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On considère l'équation avec second membre seulement sur l'intervalle $I =]0, \pi/2[$ (pour que $\tan(x)$ soit défini). On en cherche une solution sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{\sqrt{x}}$, où cette fois $\lambda(x)$ est une fonction. On obtient alors que $\lambda'(x)e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}(1+\tan(x)^2)$, d'où $\lambda'(x) = 1+\tan(x)^2$. On reconnaît à droite la dérivée de $\tan(x)$, d'où $\lambda(x) = \tan(x)+c$ avec $c \in \mathbb{R}$ et les solutions sont donc les fonctions $y(x) = e^{\sqrt{x}}\tan(x)+c\,e^{\sqrt{x}}$, pour $c \in \mathbb{R}$.

Bien que cela ne soit pas demandé, déterminons par exemple la solution y telle que $y(\pi/4) = 1$. Comme $\tan(\pi/4) = 1$, on obtient l'équation $1 = e^{\pi/4}(1+c)$ d'où $c = e^{-\pi/4} - 1$.

Exercice 2 (6 pts). 1. (1 pt) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $z = \dfrac{2+3i}{2+i}$.

Solution : Pour tout nombre complexe $u = a+ib$, on sait que $\dfrac{1}{u} = \dfrac{\overline{u}}{u\overline{u}} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$. Appliquant ceci à $u = 2+i$ on obtient : $z = (1/5)(2+3i)(2-i) = (1/5)(7+4i)$ donc $\mathrm{Re}(z) = 7/5$ et $\mathrm{Im}(z) = 4/5$.

2. (1,5 pt) Déterminer le module et l'argument des nombres complexes $z_1 = -1+i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

Solution : On a $|z_1| = \sqrt{2}$ et $z_1 = \sqrt{2}\Big(\dfrac{-\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)$ donc l'argument de z_1 est $3\pi/4$ modulo 2π.

Et l'on a $|z_2| = 2$ et $z_2 = 2\Big(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\Big)$ donc l'argument de z_1 est $-\pi/6$ modulo 2π.

3. (1,5 pt) Écrire $Z = 4(-1+i\sqrt{3})$ sous la forme $re^{i\theta}$ puis déterminer ses racines 6-ièmes dans $\mathbb{C}$.

Solution : On a $|Z| = 4 \cdot 2 = 8$ et $Z = 8\Big(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 8e^{i2\pi/3}$. On cherche les nombres complexes $z = re^{i\theta}$ tels que $z^6 = r^6e^{i6\theta}$. Comme $8 = 2^3 = (\sqrt{2})^6$, on trouve $r = \sqrt{2}$. Et l'on a $6\theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, où k parcourt les entiers modulo 6 (car k et $k+6$ donnent le même θ modulo 2π), d'où :

$$\theta = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{6} = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$$

pour $k = 0, 1, \ldots, 5$. Comme $\pi/3 = 3\pi/9$, on trouve donc que les 6 racines 6-ièmes de Z sont :

$$\sqrt{2}e^{i\pi/9}, \quad \sqrt{2}e^{i4\pi/9}, \quad \sqrt{2}e^{i7\pi/9}, \quad \sqrt{2}e^{i10\pi/9}, \quad \sqrt{2}e^{i13\pi/9}, \quad \sqrt{2}e^{i16\pi/9}.$$

En notant z_0 l'une d'elles, par exemple $z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/9}$, on voit que ces racines sont les nombres complexes $z_0e^{ik\pi/3}$ pour $k = 0, 1, \ldots, 5$ c'est-à-dire le produit de z_0 par chacune des racines 6-ièmes de 1.

4. (1 pt) Chercher sous la forme $a+ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, les deux racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $D = 1+i2\sqrt{2}$.

Solution : On cherche $z = a+ib$ tel que $z^2 = D$. On aura alors :

$$a^2 - b^2 = 1, \qquad 2ab = 2\sqrt{2}, \qquad a^2 + b^2 = |z|^2 = |z^2| = |D| = 3.$$

Ceci donne $a^2 = (1+3)/2 = 2$, $b^2 = (3-1)/2 = 1$ et $ab = \sqrt{2} > 0$ donc a et b de même signe. On trouve donc les deux solutions $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$, ou bien $a = -\sqrt{2}$ et $b = -1$ et donc les deux racines carrées de D (évidemment opposées !) sont : $\alpha = \sqrt{2} + i$ et $-\alpha = -\sqrt{2} - i$.

5. (1 pt) Déterminer sous la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, les deux racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P = X^2 - 2X - i2\sqrt{2}$.

Solution : Le discriminant de P est $4 + i8\sqrt{2} = 4D$, donc ses deux racines carrées sont 2α et -2α. Donc les deux racines de P sont :

$$z_1 = \frac{2 + 2\alpha}{2} = 1 + \alpha = 1 + \sqrt{2} + i, \qquad z_2 = \frac{2 - 2\alpha}{2} = 1 - \alpha = 1 - \sqrt{2} - i.$$

Exercice 3 (3 pts)**.** On munit le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on notera $M(\alpha, \beta)$ le point M de $\mathcal{P}$ ayant pour coordonnées (α, β) dans le repère $\mathcal{R}$. On considère les points : $A(1, 1)$ et $B = (2, 3)$.

1. (0,5 pt) Déterminer les coordonnées (a, b) du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Solution : Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $x_B - x_A = 1$ et $y_B - y_A = 2$, i.e. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. (1 pt) Donner une équation de la droite affine $\mathcal{D}$ passant par A et B.

Solution : Soit $M(x, y)$ un point de $\mathcal{D}$. Alors le vecteur $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}$ est multiple du vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc on a : $y - 1 = 2(x - 1)$ d'où $y = 2x - 1$.

On pouvait aussi utiliser la méthode vue en Terminale : Comme $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, le coefficient directeur de cette droite est 2 donc son équation est de la forme $y = 2x + c$. Elle passe par $A(1, 1)$ ce qui donne $1 = 2 + c$ d'où $c = -1$.

3. (1,5 pt) Donner un vecteur non nul $\overrightarrow{v}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ puis une équation de la droite affine $\mathcal{D}'$ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

Solution : Un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$: en effet, si on cherche $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on obtient l'équation $0 = (\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{v}) = x + 2y$, d'où $x = -2y$.

Alors un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{D}'$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}$ est multiple du vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc on a : $x - 1 = -2(y - 1)$ d'où $x = -2y + 3$ soit $x + 2y = 3$.