Université Pierre et Marie Curie 2013–2014
1M001, groupe MIPI 12-4 : devoir no.2 du 3 déc. 2013 (1h) + question de cours no.11 (10 mn)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Question de cours (2 pts). Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant.

1. (1 pt) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Donner la définition de : « a est racine de P d'ordre k » et en donner la caractérisation en termes de P et de ses polynômes dérivés.
2. (1 pt) Soit $P = X^3 - 6X^2 + 9X - 4$. Calculez le polynôme dérivé P' puis ses deux racines dans $\mathbb{R}$, puis déterminez, en le justifiant, si P admet une racine multiple ou non.

Exercice 1 (4 pts). Déterminer sur l'intervalle I donné les solutions des équations différentielles :

1. (2 pts) $y'(x) = 2x\,y(x) + e^{x^2+\sin(x)}\cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. (2 pts) $y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}y(x) + e^{\sqrt{x}}(1+\tan(x)^2)$ sur $I =]0, \pi/2[$.

Exercice 2 (6 pts).

1. (1 pt) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $z = \dfrac{2+3i}{2+i}$.
2. (1,5 pt) Déterminer le module et l'argument des nombres complexes $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.
3. (1,5 pt) Écrire $Z = 4(-1 + i\sqrt{3})$ sous la forme $re^{i\theta}$ puis déterminer ses racines 6-ièmes dans $\mathbb{C}$.
4. (1 pt) Chercher sous la forme $a+ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, les deux racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $D = 1 + i2\sqrt{2}$.
5. (1 pt) Déterminer sous la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, les deux racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P = X^2 - 2X - i2\sqrt{2}$.

Exercice 3 (3 pts). On munit le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on notera $M(\alpha, \beta)$ le point M de $\mathcal{P}$ ayant pour coordonnées (α, β) dans le repère $\mathcal{R}$. On considère les points : $A(1, 1)$ et $B = (2, 3)$.

1. (0,5 pt) Déterminer les coordonnées (a, b) du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
2. (1 pt) Donner une équation de la droite affine $\mathcal{D}$ passant par A et B.
3. (1,5 pt) Donner un vecteur non nul $\overrightarrow{v}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ puis une équation de la droite affine $\mathcal{D}'$ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.