TD 3S 1 – Évaluation du 29/11/2013

Aucun document ou appareil électronique autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Pour avoir la note maximale: Résoudre complètement un exercice, et répondre à toutes les sous-questions numérotées sans (*) .

La question de cours est notée sur 2, le reste est noté sur 13.

Question de cours. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in I$

a) Que signifient les phrases "f est dérivable en x_0", et "f est dérivable sur I"?

b) Montrer que si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Exercice 1. Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l' équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + iz^2 - z = 0$$

2. À quelle condition le produit de deux nombres complexes est-il réel?

3. **(*)** Soit n un entier plus grand que 2. Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ (prononcer zeta) une racine n^{eme} de 1 différente de 1.

a. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = 1 + \zeta + \cdots + \zeta^{n-1} = 0$$

b. Montrer que $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est un exemple de racine n^{eme} de 1 différente de 1. Donner toutes les autres racines n^{emes} de 1.

c. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Exercice 2. Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit f définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

a. Donner les développement limités à l'ordre 2 de f en 0 et en 1.

b. En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de

$$g : x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$$

c. En déduire $g(0), g'(0)$, et $g''(0)$.

2. **(*)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a. Donner sans les démontrer les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions $\sin, \cos, \cosh, \sinh$, et vérifier que le développement limité à l'ordre n en 0 de $\sin^n$ est $x^n + o(x^n)$.

b. En déduire la limite, quand x tend vers 0, de

$$f_n : x \mapsto \frac{\sin(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cos(x)}{\sin(x)^n.}$$

`N.B. Il faudra sûrement distinguer les cas` $n < 3, n > 3, n = 3$.

Exercice 3. Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$.

$$y'(x) + xy(x) = x^2 + x + 1$$

2. **(*)** On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$.

$$(E) \qquad y'(x) - y(x)\arctan x = \frac{e^{x \arctan x}}{x^2 + 1}$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, donner la solution générale de l'équation homogène.

b. Résoudre l'équation (E).