Université Pierre et Marie Curie 2013–2014
1M001, Examen du 17 déc. 2013 (2h), sections MIPI 11 à 16

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte **5** exercices.

Exercice 1. On rappelle que $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions $\mathrm{sh}(x)$, $\sin(x)$, $\mathrm{ch}(x)$ et $\cos(x)$, puis en déduire ceux de $\mathrm{sh}(x) - \sin(x)$ et de $\mathrm{ch}(x) - \cos(x)$.
2. Montrer que $\mathrm{ch}(x) - \cos(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x) - \sin(x)}{x(\mathrm{ch}(x) - \cos(x))}$. Sur son domaine de définition $\mathbb{R}^*$, f est-elle continue ?
4. f a-t-elle une limite en 0 ? Si oui, laquelle ?

Exercice 2.

1. Soit $x \mapsto a(x)$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit A une primitive de a sur I. Rappeler quelles sont les solutions sur I de l'équation différentielle $y'(x) = a(x)y(x)$.
2. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = (1 + \sin(x))y(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis déterminer celle qui prend en 0 la valeur 1.

Pour les questions suivantes, on considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'(x) = 3y(x) + \cos(x)$.

3. Déterminer une solution particulière y_0 de la forme $y_0(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$.
4. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle, puis déterminer celle qui prend en 0 la valeur 1.

Exercice 3.

1. Exprimer sous la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, puis sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, les nombres complexes $z_1 = \dfrac{3+i}{2-i}$ et $z_2 = (1+i)^4$.
2. Écrire $Z = 4(-1 + i\sqrt{3})$ sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, puis déterminer, sous la même forme, ses racines 3-ièmes dans $\mathbb{C}$.
3. Déterminer les deux racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P = X^2 - 2X + 1 - 2i$.

Exercice 4.

1. Montrer que le polynôme $R = X^2 - X - 2$ a deux racines dans $\mathbb{R}$, que l'on déterminera.
2. Quelles sont les racines du polynôme $Q = X^4 - X^2 - 2$ dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$?
3. Factoriser Q dans $\mathbb{C}[X]$ comme produit de polynômes de degré 1.
4. Factoriser Q dans $\mathbb{R}[X]$ comme produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 sans racines réelles.
5. On considère le polynôme $P = X^6 - 2X^5 + 2X^3 - 3X^2 + 4X - 2$. Montrer que 1 est racine double de P mais pas racine triple.
6. Faire la division euclidienne de P par $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$, puis factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ comme produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 sans racines réelles.

Tourner la page S.V.P.

Exercice 5. Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$, on note $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v})$ leur produit scalaire (aussi noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$) et l'on note $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u})}$ la norme euclidienne de $\overrightarrow{u}$. On dit que $\overrightarrow{u}$ est unitaire si $\|\overrightarrow{u}\| = 1$. On note O le point $(0,0)$.

1. Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2$ en fonction de $\|\overrightarrow{u}\|$, $\|\overrightarrow{v}\|$ et de $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v})$.
2. Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs unitaires tels que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ soit unitaire. Déterminer $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v})$.
3. Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^2$ trois vecteurs unitaires tels que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = 0$. Déterminer les produits scalaires $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w})$ et $(\overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{u})$.
4. Soient A, B, C trois points du cercle de centre O et de rayon 1, tels que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$. Montrer que les points A, B, C forment un triangle équilatéral. Indication : calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$ et $\|\overrightarrow{CA}\|$.