Examen du 12 novembre 2013

Durée : 2h00.

Les documents, calculatrices, téléphones portables, etc, sont interdits. Il sera particulièrement tenu compte de la rédaction.

Exercice 1.— Énoncer les formules d'addition du cosinus, du sinus et de la tangente.

Exercice 2.— Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a < b < c$. Considérons la fonction $x \mapsto f(x) = x - \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c}$.

a) Quel est le domaine de définition D de f ? Quelle est la dérivée de f ?

b) Établir le tableau de variations de f, avec les limites éventuelles aux bornes.

c) La fonction f est-elle croissante sur D ?

d) En combien de points de D s'annule-t-elle ? Préciser le théorème utilisé.

e) Encadrer à 10^{-1} près le plus grand de ces points lorsque $a = -6$, $b = 0$, $c = 10$.

Exercice 3.— Dire si les énoncés suivants sur les suites de nombres réels sont vrais ou faux. Donner une démonstration dans le premier cas, un contre-exemple dans le second.

a) Toute suite non majorée tend vers $+\infty$.

b) Toute suite qui tend vers $+\infty$ est non majorée.

c) Toute suite qui tend vers $+\infty$ est croissante.

d) Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

e) Toute suite qui tend vers $+\infty$ est minorée.

f) Toute suite croissante est minorée.

g) Toute suite non majorée est minorée.

Exercice 4.— *a*) Quel est le domaine de définition D de la fonction $\operatorname{Arg\,th}$?

b) Démontrer que l'on a $\operatorname{Arg\,th} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$ pour tout $x \in \mathrm{D}$.

c) Donner de même une expression élémentaire de $\operatorname{Arg\,sh} x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 5.— Soit a un nombre réel. On pose $u_n = \cos(an)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède une sous-suite convergente.

b) On suppose désormais que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, et on note ℓ sa limite. En étudiant les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbf{N}}$, démontrer que $\ell = 2\ell^2 - 1$ et $\ell = 4\ell^3 - 3\ell$.

c) En déduire que $\ell = 1$.

d) Quelle est la limite de $\sin(an)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

e) Calculer de deux manières différentes la limite de la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$, et en déduire que a appartient à $2\pi\mathbf{Z}$.

Exercice 6.— Effectuer les calculs suivants :

a) Dérivée de $\operatorname{arctg}(e^x)$ sur $\mathbf{R}$. En déduire une primitive de $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ sur $\mathbf{R}$.

b) Abscisses et ordonnées des maxima locaux de la fonction f définie sur $[-3, 3]$ par $f(x) = x^3 - 3x + 5$. Préciser le ou les maxima absolus.

c) Limites éventuelles de $(1 + \frac{1}{n})^n$, $(1 + \frac{1}{n^2})^n$, $(1 + \frac{1}{n})^{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Limites éventuelles de $\ln(x)\sin(x)$ lorsque $x \in]0, +\infty[$ tend vers 0 et vers $+\infty$.