Université Pierre et Marie Curie 2013–2014
1M001, Examen du 12 nov. 2013 (2h), sections MIPI 12 & 15

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte **4** exercices et est noté sur **25**.

Exercice 1 (4,5 pts)**.** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2\mathrm{Arctan}(x) + \dfrac{1}{x}$.

1. (1 pt) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et déterminer l'unique $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(a) = 0$.
2. (0,5 pt) Pour quelle valeur x_0 de x dans $[-\pi/2, \pi/2]$ a-t-on $\sin(x_0) = \cos(x_0)$, c.-à.-d. $\tan(x_0) = 1$?
3. (2 pts) Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. Préciser si f admet un minimum ou un maximum, et exprimer $f(a)$ en fonction de x_0.
4. (1 pt) Tracer de façon approximative le graphe de f, en prenant approximativement 1 cm comme unité de longeur sur chacun des axes.

Exercice 2 (5,5 pts)**.** 1. (1 pt) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, que vaut $\mathrm{Arctan}'(x)$?

2. (1 pt) Donner le DL_4 en 0 de $\mathrm{Arctan}'(x)$.
3. (1 pt) En le justifiant brièvement, donner le DL_5 en 0 de $\mathrm{Arctan}(x)$.
4. (1 pt) Donner le DL_5 en 0 de $\sin(x)$.
5. (1,5 pt) Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{\sin(x) - x + (x^3/6)}{\mathrm{Arctan}(x) - x + (x^3/3)}$.

Exercice 3 (6 pts)**.** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$.

1. (1,5 pt) Déterminer l'application g définie par $g(x) = \ln(f(x))$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. (1 pt) Calculer $g''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et montrer que g' est strictement monotone.
3. (1 pt) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g'(x)$. En déduire que g' est de signe constant et que g est strictement monotone.
4. (1,5 pt) En utilisant le DL_1 en 0 de $h \mapsto \ln(1+h)$, déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x)$. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
5. (1 pt) Montrer que f est strictement monotone.

Exercice 4 (9 pts)**.** 1. (0,5 pt) Montrer que, pour tout $\alpha \in]0,1[$ la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_n = 1 + \alpha + \cdots + \alpha^n$ est croissante et converge vers $\ell = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_0(x) = 1$ et $u_n(x) = x^n/n!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et l'on considère la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x)$. Pour $x = 0$, on a $S_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour les questions 2 à 7, on fixe un réel $a \neq 0$ et on écrit u_n au lieu de $u_n(a)$ et S_n au lieu de $S_n(a)$.

2. (1 pt) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 0$. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n+1}| < \dfrac{1}{2}|u_n|$ pour tout $n \geq n_0$.
3. (0,5 pt) Montrer que pour tout entier $N \geq n_0$, on a $|u_{N+k}| < \dfrac{1}{2^k}|u_N|$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On fixe désormais un tel entier **impair** $N \geq n_0$.
4. (0,5 pt) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
5. (1,5 pt) On suppose $a > 0$. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée et convergente. On notera $f(a)$ sa limite.

Pour les deux questions suivantes, on suppose $a < 0$. On définit les suites $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $I_k = S_{N+2k}$ et $P_k = S_{N+2k+1}$.

6. (1 pt) Montrer que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (resp. $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$) est croissante (resp. décroissante). Indication : pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $I_k - I_{k-1}$ (resp. $P_k - P_{k-1}$) en fonction de $|u_{N+2k}|$ et $|u_{N+2k-1}|$ (resp. $|u_{N+2k+1}|$ et $|u_{N+2k}|$) et utiliser que N est impair.

Tourner la page S.V.P.

7. (1 pt) Montrer que les suites $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera $f(a)$ sa limite.

On pose aussi $f(0) = 1$. Désormais, on fixe $a \in \mathbb{R}$ et l'on pose $A = |a| + 1$. On fixe $\varepsilon > 0$.

8. (1 pt) En utilisant la question (5), montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait : $\displaystyle\sum_{n=p}^{p+k} \frac{A^n}{n!} < f(A) - S_{p-1}(A) < \varepsilon$.
9. (1 pt) On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a| < 1$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que
$$\left|\sum_{n=p+1}^{p+k} \frac{u_n(x) - u_n(a)}{x - a}\right| = \left|\sum_{n=p+1}^{p+k} \frac{1}{n!}\,\frac{x^n - a^n}{x - a}\right| \leq \sum_{n=p+1}^{p+k} \frac{A^{n-1}}{(n-1)!}$$
10. (1 pt) Déduire des questions précédentes que si $|x - a| < 1$ alors $\left|\dfrac{f(x) - S_p(x) + S_p(a) - f(a)}{x - a}\right| \leq \varepsilon$.

FIN DE L'EXAMEN.

Questions à faire chez soi (pour les étudiants intéressés).

11. Montrer que $|S_{p+k}(a) - S_{p-1}(a)| \leq \displaystyle\sum_{n=p}^{n+k} \frac{A^n}{n!} < \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis que $|f(a) - S_{p-1}(a)| \leq \varepsilon$.
12. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a - \delta, a + \delta[$, on ait $\left|\dfrac{S_p(x) - S_p(a)}{x - a} - \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} \frac{a^n}{n!}\right| < \varepsilon$.
13. Montrer que f est dérivable en a et déterminer $f'(a)$.
14. Reconnaissez-vous la fonction $x \mapsto f(x)$?