Université Pierre et Marie Curie — Analyse et algèbre pour les sciences, 1M001
Licence de sciences et technologies, L1 — Année universitaire 2013-2014

Premier partiel

Questions de cours

1. Donner la définition de la borne supérieure d'un ensemble majoré non vide de $\mathbb{R}$.
2. Donner le tableau de variation de la fonction arctangente. On précisera son ensemble de définition, sa dérivée, les limites aux bornes. On donnera la valeur de la fonction en 3 points.

Exercice **1.**

1. Donner les domaines de définition les plus grands possible, $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$ des fonctions
$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x}} \quad \textit{et} \quad g(x) = \frac{1+\sin(x)}{1+\ln(1-x)}.$$
2. On pose
$$h(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x < 0 \\ f(x) \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$
Le fonction h est-elle continue en 0 ?

Exercice **2.**

Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \sqrt{1-x^2} - \arcsin(x)$$

1. Donner son ensemble de définition.
2. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
3. Donner l'image J de l'ensemble de définition de f par f. Est-ce un intervalle ?
4. Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur J.
5. Calculer $g'(1)$.

Exercice **3.**

Soient a et b deux réels, $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Notons $f([a,b])$ l'image de l'intervalle $[a,b]$ par f. Pour chacune des assertions suivantes, donner une preuve si elle est vraie ou un contre-exemple si elle est fausse.

- Assertion 1 : Si f est continue sur $]a,b[$ et $f(a) < f(b)$ alors $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.
- Assertion 2 : Si f est continue sur $]a,b[$ et $f(a) < f(b)$, alors
  il existe $c \in]a,b[$ tel que f est dérivable en c et $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- Assertion 3 : Si f est continue en $c \in]a,b[$, alors
  $$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0,\ |x-c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$
- Assertion 4 : Réciproquement, si
  $$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0,\ |x-c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon,$$
  alors f est continue en c.