Analyse et Algèbre - 1^{er} semestre - 2013
1^{er} **Examen**

Exercice 1 (Question de cours)**.**

1. Enoncer le théorème de Rolle.
2. Enoncer le théorème des accroissements finis et le démontrer à partir du théorème de Rolle.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $|x+3| \leq 5$
2. $|x+2| > 7$

Exercice 3. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leurs bornes supérieures et inférieures.

1. $\left\{ a + \frac{b}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$
2. $\left\{ (-1)^n a + \frac{b}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Exercice 4. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f.
2. Montrer que f est continue sur D_f.
3. Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer sa dérivée.
4. Etudier les variations de f ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
5. Tracer la courbe représentative $\mathcal{G}_f$ de f.
6. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur un intervalle $[a, b]$ que l'on déterminera. On note f^{-1} la bijection réciproque de f.
7. Vérifier que f^{-1} est dérivable sur $]a, b[$. Est-elle dérivable en a ? en b ?

Exercice 6. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$\arccos x = \arcsin 2x.$$