Analyse et Algèbre - 1^{er} semestre - 2013
Examen du 12 novembre 2013
Indications de correction

Exercice 1 (Question de cours)

1. *Enoncer le théorème de Rolle.*
2. *Enoncer le théorème des accroissements finis et le démontrer à partir du théorème de Rolle.*

Solution de l'exercice 1

1. Le théorème de Rolle s'énonce : "Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$".
2. Le théorème des accroissements finis s'énonce : "Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$". Il se démontre à partir du théorème de Rolle de la façon suivante. Définissons la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ par

$$g(t) = f(t) - f(a) - (t - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

La fonction g est une somme de fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ et donc est également continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. En outre, $g(a) = 0$ et $g(b) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$ et ainsi les hypothèses du théorème de Rolle sont satisfaite par g : il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Mais la dérivée de g vaut

$$g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Comme $g'(c) = 0$ on voit donc que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Exercice 2 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes :*

1. $|x + 3| \leq 5$
2. $|x + 2| > 7$

Solution de l'exercice 2

1. L'inégalité se récrit de façon équivalente $-5 \leq x+3 \leq 5$, ou encore $-8 \leq x \leq 2$. L'ensemble des solutions est donc l'intervalle $[-8, 2]$.
2. La seconde inégalité est équivalente à

$$\begin{cases} x+2 & > 7 \\ \text{ou} & \\ -x-2 & > 7 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x & > 7-2 \\ \text{ou} & \\ -2-7 & > x \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions est donc $]-\infty, -9[\cup]5, \infty[$.

Exercice 3 *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leurs bornes supérieures, inférieures.*

1. $\left\{a + \dfrac{b}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$

2. $\left\{(-1)^n a + \dfrac{b}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Solution de l'exercice 3

1. Notons $A = \left\{a + \dfrac{b}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 < \dfrac{1}{n} \leq 1$ et puisque $a > 0, b > 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a < a + \dfrac{b}{n} \leq a + b$. Par conséquent A est minoré par a et majoré par $a+b$.
   On constate que $a+b$ est un majorant de A qui appartient à A (prendre $n = 1$). Donc $a+b$ est le plus petit de tous les majorants possible de A (puisque tout majorant de A est supérieur ou égal à $a+b$) et est donc égal à la borne supérieure de A ; ainsi $\sup A = a + b$.
   Calculons à présent $\inf A$. Puisque a est un minorant de A et comme par définition $\inf A$ est le plus grand des minorants de A, on a $a \leq \inf A$. Si on avait $a < \inf A$, alors il existerait $\epsilon > 0$ tel que $a < a + \epsilon < \inf A$. Mais on constate que $\lim_{n\to\infty} a + \dfrac{b}{n} = a$. Comme conséquence de la définition de la limite d'une suite, il existe un $N \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $a + \dfrac{b}{N} < a + \epsilon < \inf A$, ce qui contredit le fait que $\inf A$ est un minorant de A. Par conséquent $a = \inf A$.
   Conclusion : $\inf A = a$, $\sup A = a + b$.

2. Notons $B = \left\{(-1)^n a + \frac{b}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$. On constate que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-a \leq -a+\frac{b}{n} \leq (-1)^n a+\frac{b}{n}$. Par conséquent $-a$ est un minorant de B et donc $-a \leq \inf B$. Démontrons que $-a = \inf B$. On constate que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(-1)^{2k+1} = -1$ et $\lim_{k\to\infty}(-1)^{2k+1}a + \frac{b}{2k+1} = -a$. Pour tout $\epsilon > 0$ on peut donc trouver $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $(-1)^{2k+1}a + \frac{b}{2k+1} < -a + \epsilon$. Ainsi, tout minorant de B est strictement inférieur à $-a + \epsilon$. En particulier $\inf B < -a + \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. Par conséquent $\inf B \leq -a$. On a donc $-a \leq \inf B \leq -a$ et ainsi $\inf B = -a$.
D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}^*$ impair $(-1)^n a + \frac{b}{n} = -a + \frac{b}{n} \leq -a + b$ et pour n pair $(-1)^n a + \frac{b}{n} = a + \frac{b}{n} \leq a + \frac{b}{2}$ (le plus petit nombre pair strictement positif est 2). Le nombre $\max(-a+b, a+\frac{b}{2})$ est un majorant de B qui en plus appartient à B. On a donc $\sup B = \max(-a+b, a+\frac{b}{2})$.
Conclusion : B est majoré et minoré et $\inf B = -a$, $\sup B = \max(-a+b, a+\frac{b}{2})$.

Exercice 4 *Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Solution de l'exercice 4

Vérifions déjà à quelle condition la fonction f est continue. Elle est continue sur $[0, 1[$ et continue sur $]1, \infty[$. Elle est continue en 1 si et seulement si $\lim_{x\to1,x<1} f(x) = \lim_{x\to1,x>1} f(x) = f(1)$ c'est-à-dire $1 = a + b + 1$ ou encore $a + b = 0$.

De la même manière f est dérivable sur $[0, 1[$ et $]1, \infty[$. Elle est dérivable en 1 si et seulement si les limites à droite et à gauche en 1 de $\frac{f(x) - 1}{x - 1}$ sont finies et égales. On a pour $0 \leq x < 1$

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-1}{x-1} &= \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{x\to 1, x<1} \frac{f(x)-1}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

Pour $x > 1$,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-1}{x-1} &= \frac{a(x^2-1)+b(x-1)}{x-1} \\ &= a(x+1)+b\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{x\to 1, x>1} \frac{f(x)-1}{x-1} = 2a+b.$$

Ainsi f est continue et dérivable en 1 si et seulement sit

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=0 \\ 2a+b=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

système d'équation dont la solution est $a = 1/2$, $b = -1/2$.

Exercice 5 *On considère la fonction* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition* D_f.
2. *Montrer que* f *est continue sur* D_f.
3. *Montrer que* f *est dérivable sur* D_f *et calculer sa dérivée.*
4. *Etudier les variations de* f *ainsi que ses limites en* $-\infty$ *et* $+\infty$.
5. *Tracer la courbe représentative* $\mathcal{G}_f$ *de* f.
6. *Montrer que* f *réalise une bijection de* $[-1,1]$ *sur un intervalle* $[a,b]$ *que l'on déterminera.*
7. *Vérifier que* f^{-1} *est dérivable sur* $]a;b[$. *Est-elle dérivable en* a *? en* b *?*

Solution de l'exercice 5

1. La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + x + 1 \neq 0$. Le discriminant de l'équation quadratique $x^2 + x + 1 = 0$ égale $1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$ et donc est strictement négatif. Par conséquent cette équation n'admet pas de solutions (réelles). Ainsi $D_f = \mathbb{R}$.
2. La fonction f est le quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, la fonction qui est au dénominateur ne s'annulant jamais : elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.
3. De la même façon, la fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ la fonction qui est au dénominateur ne s'annulant jamais : elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. On trouve

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (x^2 + x + 1) - x \times (2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2}. \end{aligned}$$

4. La dérivée de f est donc nulle en 1 et en -1, strictement positive sur l'intervalle $]-1, 1[$ et strictement négative ailleurs. Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$, strictement croissante sur $[-1, 1]$ et strictement décroissante sur $]1, \infty[$.
   Calculons ses limites en $\pm\infty$. On écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} \\ &= \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

   On a $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$. Ainsi,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \times 1 = 0.$$

   On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

   La fonction f admet un minimum local en -1 et un maximum local en 1.

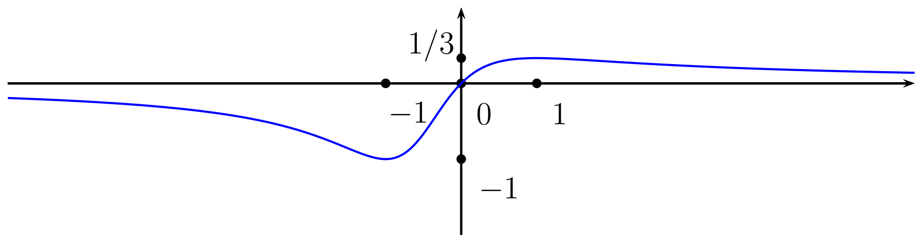

FIGURE 1 – Graphe de f

5. Le graphe de f est ci-dessus.
6. L'application f est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$ et $f(-1) = -1$, $f(1) = 1/3$. Donc f est une bijection (bicontinue) de $[-1, 1]$ sur $[-1, 1/3]$.
7. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x)$ n'est jamais nulle. Donc, comme la fonction f est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[-1, 1/3]$ et est dérivable sur $]-1, 1[$, la fonction f^{-1} est dérivable sur $]-1, 1/3[$ de dérivée égale à

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

La fonction f^{-1} n'est pas dérivable en -1 et $1/3$. En effet, si c'était le cas, on devrait avoir, en appliquant la formule de dérivation des fonctions composée à l'identité $f^{-1} \circ f(x) = x$, la relation $(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$ pour tout x dans $[-1, 1]$, en particulier pour $x = -1$ et 1 ; mais en ces points f' s'annule ce qui donnerait l'égalité $0 = 1$: c'est impossible.

Exercice 6 *Résoudre l'équations suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,*

$$\arccos x = \arcsin 2x.$$

Solution de l'exercice 6

Par définition arccos prend ses valeurs dans $[0, \pi]$ tandis que arcsin prend ses valeurs dans $[-\pi/2, \pi/2]$. Par conséquent, si l'égalité que l'on cherche à résoudre est satisfaite, $\arcsin 2x = \arccos x$ est dans l'intervalle $[0, \pi/2]$. On doit donc avoir $2x \in [0, 1]$ (car sin est une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur$[-1, 1]$ et envoie $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$). D'autre part, comme $\cos(\arccos x) = x$, on doit avoir

$$x = \cos(\arccos x) = \cos(\arcsin 2x)$$

et donc, comme $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et $\sin(\arcsin(2x)) = 2x$,

$$1 - x^2 = (\sin(\arcsin 2x))^2 = (2x)^2.$$

On doit donc avoir $1 = 5x^2$ c'est-à-dire $x = \pm 1/\sqrt{5}$. Comme x doit être positif, cela entraîne $x = 1/\sqrt{5}$.

Réciproquement, si $x = 1/\sqrt{5}$, le calcul précédent montre que $1 - x^2 = (2x)^2$ c'est-à-dire $x^2 = 1 - (2x)^2$. Comme $0 < 1/\sqrt{5} < 1/2$, les quantités x et $2x$ sont dans $[0, 1]$ et donc $\arccos x$ et $\arcsin 2x$ sont bien définies et sont dans l'intervalle $[0, \pi/2]$. Comme de plus $\cos(\arccos x) = x$, $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et $\sin(\arcsin 2x) = 2x$ on a

$$(\cos(\arccos x))^2 = (\cos(\arcsin 2x))^2. \tag{1}$$

On a vu que $\arccos x$ et $\arcsin 2x$ étaient dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ ce qui entraîne que $\cos(\arccos x)$ et $\cos(\arcsin 2x)$ sont positives ou nulles. L'égalité (1) montre donc que

$$\cos(\arccos x) = \cos(\arcsin 2x).$$

Comme cos est bijective, et donc injective, de $[0, \pi/2]$ dans $[0, 1]$ et comme on a vu que $\arccos x$ et $\arcsin 2x$ étaient dans $[0, \pi/2]$ on en déduit que pour $x = 1/\sqrt{5}$,

$$\arccos x = \arcsin 2x.$$

La seule solution réelle de l'équation considérée est donc $x = 1/\sqrt{5}$.