Corrigé de l'examen du 12 novembre 2013

Exercice 1.— *Énoncer les formules d'addition du cosinus, du sinus et de la tangente.*

Quels que soient les nombres réels a et b, on a

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Si a, b et $a+b$ n'appartiennent pas à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$, on a

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}\cdot$$

Exercice 2.— *Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a < b < c$. Considérons la fonction $x \mapsto f(x) = x - \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c}\cdot$*

a) Quel est le domaine de définition D *de f ? Quelle est la dérivée de f ?*

On a $\mathrm{D} = \mathbf{R} - \{a, b, c\}$. La fonction f est dérivable sur D et sa dérivée est

$$1 + \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x-b)^2} + \frac{1}{(x-c)^2}\,\cdot$$

b) Établir le tableau de variations de f, avec les limites éventuelles aux bornes.

La dérivée de f est strictement positive en tout point de D. La fonction f est donc strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, a[$, $]a, b[$, $]b, c[$, $]c, +\infty[$. Dans chacun d'eux, $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers la borne gauche et $+\infty$ lorsque x tend vers la borne droite de l'intervalle. Le tableau de variations de f est donc :

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
f	$-\infty \nearrow +\infty$ ‖	$-\infty \nearrow +\infty$ ‖	$-\infty \nearrow +\infty$ ‖	$-\infty \nearrow +\infty$	

c) La fonction f est-elle croissante sur D *?*

Non, bien qu'elle soit croissante sur chacun des quatre intervalles qui constituent D, elle n'est pas croissante sur D. Il existe en effet $x_1 \in]-\infty, a[$ tel que $f(x_1) > 0$ et $x_2 \in]a, b[$ tel que $f(x_2) < 0$: on a $x_1 < x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$.

d) En combien de points de D *s'annule-t-elle ? Préciser le théorème utilisé.*

Soit I l'un des intervalles $]-\infty, a[$, $]a, b[$, $]b, c[$, $]c, +\infty[$. Sur I, la fonction f est continue et prend des valeurs négatives et des valeurs positives, donc s'annule en un point (théorème des valeurs intermédiaires) ; celui-ci est unique, puisque f est strictement croissante sur I. Au total, f s'annule donc en 4 points de D, un dans chaque intervalle.

e) Encadrer à 10^{-1} *près le plus grand de ces points lorsque* $a=-6$, $b=0$, $c=10$.

On a

$$\begin{aligned} f(10,1) &= 10,1 - \frac{1}{16,1} - \frac{1}{10,1} - \frac{1}{0,1} < 10,1 - \frac{1}{20} - \frac{1}{20} - 10 = 0, \\ f(10,2) &= 10,2 - \frac{1}{16,2} - \frac{1}{10,2} - \frac{1}{0,2} > 10,2 - \frac{1}{10} - \frac{1}{10} - 5 = 5, \end{aligned}$$

donc le plus grand des points de D où f s'annule est compris entre $10,1$ et $10,2$.

Exercice 3.— *Dire si les énoncés suivants sur les suites de nombres réels sont vrais ou faux. Donner une démonstration dans le premier cas, un contre-exemple dans le second.*

a) Toute suite non majorée tend vers $+\infty$.

Faux : La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où $u_n=0$ lorsque n est pair et $u_n=n$ lorsque n est impair, est non majorée et ne tend pas vers $+\infty$.

b) Toute suite qui tend vers $+\infty$ *est non majorée.*

Vrai : Soit a un nombre réel. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe un entier n tel que $u_n \geqslant a+1$. La suite n'est donc pas majorée par a.

c) Toute suite qui tend vers $+\infty$ *est croissante.*

Faux : la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où $u_n=n$ lorsque n est impair et $u_n=n+2$ lorsque n est pair, tend vers $+\infty$ et n'est pas croissante (même à partir d'un certain rang) puisque $u_{2n+1}-u_{2n}=(2n+1)-(2n+2)=-1$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.

d) Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

Vrai : C'est un théorème du cours. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante non majorée. Soit a un nombre réel. Comme (u_n) n'est pas majorée par a, il existe $n_0\in\mathbf{N}$ tel que $u_{n_0}>a$. Comme (u_n) est croissante, on a $u_n \geqslant u_{n_0} > a$ pour tout $n\geqslant n_0$. Donc (u_n) tend vers $+\infty$.

e) Toute suite qui tend vers $+\infty$ *est minorée.*

Vrai : Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe $n_0\in\mathbf{N}$ tel que $u_n\geqslant 0$ pour $n\geqslant n_0$. Posons $a=\inf(u_0,u_1,\ldots,u_{n_0-1},0)$. La suite (u_n) est minorée par a.

f) Toute suite croissante est minorée.

Vrai : Elle est minorée par son premier terme.

g) Toute suite non majorée est minorée.

Faux : La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où $u_n = (-1)^n n$, n'est ni majorée ni minorée.

Exercice 4.— *a) Quel est le domaine de définition* D *de la fonction* $\operatorname{Arg\,th}$ *?*

Ce domaine de définition est $]-1,1[$.

b) Démontrer que l'on a $\operatorname{Arg\,th} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$ *pour tout* $x \in \mathrm{D}$.

Soit $x \in]-1,1[$. Posons $y = \operatorname{Arg\,th} x$. On a $x = \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$, d'où $x(e^{2y}+1) = e^{2y}-1$, $x+1 = e^{2y}(1-x)$, $e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$ et $y = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$.

c) Donner de même une expression élémentaire de $\operatorname{Arg\,sh} x$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. Posons $y = \operatorname{Arg\,sh} x$. On a $\operatorname{sh} y = x$, $\operatorname{ch} y = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{1+x^2}$, d'où $e^y = \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} y = x + \sqrt{1+x^2}$ et finalement $\operatorname{Arg\,sh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Exercice 5.— *Soit* a *un nombre réel. On pose* $u_n = \cos(an)$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}$.

a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *possède une sous-suite convergente.*

On a $|u_n| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc bornée. Or toute suite bornée possède une sous-suite convergente, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.

b) On suppose désormais que la suite (u_n) *converge, et on note* ℓ *sa limite. En étudiant les suites* $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ *et* $(u_{3n})_{n\in\mathbf{N}}$, *démontrer que* $\ell = 2\ell^2 - 1$ *et* $\ell = 4\ell^3 - 3\ell$.

Comme la suite (u_n) converge vers ℓ, ses sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent aussi vers ℓ. Mais des relations $\cos(2an) = 2\cos^2(an) - 1$ et $\cos(3an) = 4\cos^3(an) - 3\cos(an)$, on déduit qu'elles convergent respectivement vers $2\ell^2-1$ et $4\ell^3-3\ell$. En vertu de l'unicité de la limite, on a donc $\ell = 2\ell^2-1$ et $\ell = 4\ell^3-3\ell$.

c) En déduire que $\ell = 1$.

La relation $\ell = 4\ell^3 - 3\ell$ implique que ℓ est égal à 0, 1 ou -1. Comme $\ell = 2\ell^2-1$, on a $\ell = 1$.

d) Quelle est la limite de $\sin(an)$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *?*

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\sin^2(an) = 1 - \cos^2(an)$ tend vers 0, donc $|\sin(an)| = \sqrt{\sin^2(an)}$ tend vers 0 et $\sin(an)$ tend vers 0.

e) Calculer de deux manières différentes la limite de la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$, *et en déduire que* a *appartient à* $2\pi\mathbf{Z}$.

La suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers la même limite que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, c'est-à-dire vers 1. Mais comme $u_{n+1} = \cos a \cos(an) - \sin a \sin(an)$, elle converge aussi vers $\cos a$. On a donc $\cos a = 1$, d'où $a \in 2\pi\mathbf{Z}$.

Exercice 6.— *Effectuer les calculs suivants :*

a) Dérivée de $\mathrm{arctg}\,(e^x)$ *sur* $\mathbf{R}$. *En déduire une primitive de* $\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}$ *sur* $\mathbf{R}$.

La dérivée de $\mathrm{arctg}\,(e^x)$ est $\frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{1}{e^x+e^{-x}} = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,x}$. Une primitive de $\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}$ est donc $2\mathrm{arctg}\,(e^x)$.

b) Abscisses et ordonnées des maxima locaux de la fonction f *définie sur* $[-3,3]$ *par* $f(x) = x^3 - 3x + 5$. *Préciser le ou les maxima absolus.*

On a $f'(x) = 3(x^2-1)$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[-3,-1]$, strictement décroissante sur $[-1,1]$, strictement croissante sur $[1,3]$. Elle a deux maxima locaux dans $[-3,3]$: celui d'abscisse -1 et d'ordonnée 7, et celui d'abscisse 3 et d'ordonnée 23. Le second est un maximum absolu.

c) Limites éventuelles de $(1+\frac{1}{n})^n$, $(1+\frac{1}{n^2})^n$, $(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

La dérivée en 0 de $\ln(1+x)$ est 1, d'où $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\ln(1+\frac{1}{n}) = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2\ln(1+\frac{1}{n^2}) = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n^2}) = 0,$$

et par exponentiation

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e, \qquad \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2} = +\infty.$$

d) Limites éventuelles de $\ln(x)\sin(x)$ *lorsque* $x\in]0,+\infty[$ *tend vers* 0 *et vers* $+\infty$.

Lorsque $x\in]0,+\infty[$ tend vers 0, $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 et $x\ln x$ vers 0, donc leur produit $\ln(x)\sin(x)$ tend vers 0.

La fonction $\ln(x)\sin(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$, parce qu'elle prend la valeur 0 en $n\pi$ et $\ln(\frac{\pi}{2}+2\pi n)$ en $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ pour tout $n\in\mathbf{N}$, et que $\ln(\frac{\pi}{2}+2\pi n)$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.