Analyse et Algèbre pour les sciences, 1M001

Sylvie Guerre-Delabrière
Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie

Avant-propos

Ce texte est un plan détaillé du cours de mathématique de L1 du premier semestre, applelé 1M001, destiné aux étudiants de mathématiques, de physique, de mécanique et d'ingénierie. Il présente les notions indispensables d'analyse et d'algèbre pour continuer des études scientifiques.

Dans ce texte, il n'y a ni démontrations, ni exemples, ni motivations. Ces éléments seront fournis par les enseignants pendant les cours magistraux. Certains chapitres pourront être présentés dans un ordre différent.

Ce texte est accéssible à tous, enseignants et étudiants, sur le site internet de la licence, niveau L1. Pour apprendre à travailler, il est souhaitable que tous les étudiants l'impriment, l'apportent en cours et le complètent à la main avec les ajouts de leur enseignant.

Les questions de cours comptant pour la note d'examen seront prises parmi les résultats figurant dans ce cours, qu'il faut donc savoir par cœur.

Paris, le 27 novembre 2013

S. D.

Table des matières

Chapitre 1

$\mathbb{R}$, ordre, intervalles

1.0.1 Rappel. *Définitions, notations et propriétés élémentaires sur :*

i) *Les entiers naturels* $\mathbb{N}$ *et les entiers relatifs* $\mathbb{Z}$*, la division euclidienne.*

ii) *Si* A *est un ensemble de nombres, les notations* A_+, A_-, A^*, A_+^*, A_-^*.

1.1 Le corps $\mathbb{R}$

1.1.1 Définition. *Un nombre* x *est rationnel s'il existe deux entiers* p *et* $q \neq 0$ *tels que* $x = \dfrac{p}{q}$.

1.1.2 Proposition. *Le développement décimal d'un nombre rationnel est périodique à partir d'un certain rang.*

1.1.3 Proposition. *L'ensemble des nombres rationnels, noté* $\mathbb{Q}$*, est un corps commutatif totalement ordonné.*

Remarque. Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels, par exemple un nombre x tel que $x^2 = 2$. On introduit donc les nombres *irrationnels* notés $\mathbb{I}$. On admet que ces nombres sont ceux dont le développement décimal n'est pas périodique.

1.1.4 Définition. *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels est la réunion de* $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{I}$.

1.1.5 Théorème. *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *est un corps totalement ordonné admettant* $\mathbb{Q}$ *comme sous-corps.*

1.2 L'ordre sur $\mathbb{R}$

1.2.1 Proposition. *L'ordre sur* $\mathbb{R}$ *est compatible avec la structure de corps.*

1.2.2 Définition. *La valeur absolue d'un réel* x *est* $|x| = \max(x, -x)$.

1.2.3 Proposition. *Les propriétés de la valeur absolue sont :*

i) $|x| \geq 0$*, et* $|x| = 0 \iff x = 0$

ii) $|xy| = |x||y|$

iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(Inégalité triangulaire)*

1.2.4 Définition. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :*

i) *Le réel M est un majorant de A si tout élément de A est plus petit que M*

ii) *Le réel m est un minorant de A si tout élément de A est plus grand que m*

iii) *L'ensemble A est majoré (ou borné supérieurement) s'il possède un majorant*

iv) *L'ensemble A est minoré (ou borné infreieurement) s'il possède un minorant*

v) *L'ensemble A est borné s'il est majoré et minoré.*

1.2.5 Définition. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

i) *Un réel a est le plus grand élément (ou maximum) de A si a appartient à A et est un majorant de A*

ii) *Un réel b est le plus petit élément (ou minimum) de A si b appartient à A et est un minorant de A.*

Une partie de $\mathbb{R}$, même bornée, n'a pas forcément de plus petit ou plus grand élément. En revanche, on a :

1.2.6 Proposition. *Si une partie A admet un plus grand élément (respectivement plus petit), alors il est unique.*

A défaut d'un plus petit ou d'un plus grand élément, on a une autre définition, qui n'a de sens que grâce à la proposition qui suit et qui est l'une des principales qualités de $\mathbb{R}$:

1.2.7 Définition. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

i) *Un réel a est la borne supérieure de A si a est le plus petit majorant de A*

ii) *Un réel b est la borne inférieure de A si a est le plus grand minorant de A.*

1.2.8 Proposition. *(admise) Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, toute partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure. Exemples.*

1.3 Intervalles

1.3.1 Proposition. *On peut représenter l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par la droite réelle : étant donné une origine, un sens et une unité de longueur, à tout réel x, on associe un et un seul point de la droite. La valeur x représente la distance du point à l'origine si $x > 0$ et son opposé si $x < 0$.*

1.3.2 Définition. *Un intervalle est un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ tel que si x et y sont dans I, alors tout nombre z compris entre x et y est encore dans I. Exemples : intervalles ouverts, fermés, semi-ouverts, bornés, non bornés…*

Chapitre 2

Limites

2.1 Voisinages

Voisinages dans $\mathbb{N}$:

L'ensemble $\mathbb{N}$ est discret donc il n'y a qu'un seul cas de voisinage :

2.1.1 Définition. *Un voisinage de* $+\infty$ *dans* $\mathbb{N}$ *est un ensemble contenant tous les entiers supérieurs à un entier* N*, c'est-à dire un ensemble contenant un ensemble de la forme* $\{n \in \mathbb{N} \mid n > N\}$.

Voisinages dans $\mathbb{R}$:

2.1.2 Définition. *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Un voisinage de* x_0 *dans* $\mathbb{R}$ *est un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *contenant un intervalle* $]x_0 - \eta ; x_0 + \eta[$ *où* η *est un nombre strictement positif. On note* $V(x_0)$ *ou* $W(x_0)$ *un voisinage de* x_0.

2.1.3 Définition. *Un voisinage de* $+\infty$ *(respectivement* $-\infty$*) est un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *contenant un intervalle* $]A; +\infty[$ *où* A *est un nombre réel positif (respectivement* $]-\infty; B[$ *où* B *est un nombre réel négatif. On note* $V(+\infty)$ *ou* $V(-\infty)$ *un voisinage de* $+\infty$ *ou* $-\infty$.

2.2 Limite d'une suite

L'étude détaillée des suites est au programme du deuxième semestre.

2.2.1 Définition. *Une suite réelle est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$*, qui à tout entier* n *associe un nombre réel* u_n*. Une suite est donc définie par l'ensemble ordonné de ses valeurs que l'on note* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.2.2 Définition. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $a \in \mathbb{R}$ *(ou vers* $+\infty$ *ou vers* $-\infty$*) si quelque soit le voisinage* $V(a)$ *(ou* $V(+\infty)$ *ou* $V(-\infty)$*), il existe un entier* N *tel que si* $n > N$*, alors* $u_n \in V(a)$ *(ou* $V(+\infty)$ *ou* $V(-\infty)$*).*
Dans le cas où la suite tend vers $a \in \mathbb{R}$*, on dit que* a *est la limite de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et on note* $a = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2.3 Limite d'une fonction

2.3.1 Définition. *Une fonction réelle* f *est une application d'un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, qui à tout réel* $x \in I$ *associe un nombre réel* $f(x)$.

2.3.2 Définition. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point adhérent à I si tout voisinage de x_0 a une intersection non vide avec I.*

2.3.3 Définition. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à I. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ tend vers $a \in \mathbb{R}$ (ou vers $+\infty$ ou vers $-\infty$) lorsque x tend vers x_0 (ou vers $+\infty$ ou vers $-\infty$) si quelque soit le voisinage $V(a)$ (ou $V(+\infty)$ ou $V(-\infty)$), il existe un voisinage $W(x_0)$ de x_0 (ou $W(+\infty)$ ou $W(-\infty)$), tel que si $x \in W(x_0) \cap I$ (ou $W(+\infty) \cap I$ ou $W(-\infty) \cap I$) , alors $f(x) \in V(a)$ (ou $V(+\infty)$ ou $V(-\infty)$). Dans le cas où la fonction tend vers $a \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x_0, on dit que a est la limite de $f(x)$ lorsque $x \to x_0$ et on note $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Idem lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.*

2.3.4 Extension. *On peut aussi définir la limite à droite et la limite à gauche d'une fonctions f lorsque $x \to x_0$. Si les limites à droite et à gauche sont les mêmes lorsque $x \to x_0$, alors la limite existe et leur est égale (mais n'est pas forcément égale à $f(x_0)$ au cas où x_0 est dans le domaine de définition de f).*

2.4 Propriété des limites

Ces propriétés se déclinent pour les suites comme pour les fonctions.

2.4.1 Théorème. *Si une suite ou une fonction admet une limite, celle-ci est unique.*

2.4.2 Théorème. *Le passage à la limite respecte les inégalités larges.*

2.4.3 Théorème. *Théorème des gendarmes.*

i) Si trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers une même limite finie l, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers l.

ii) Si trois fonctions f, g et h, définies sur un intervalle I vérifient $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in I$ et si les fonctions f et h tendent vers une même limite finie l quand x tend vers x_0 (ou $+\infty$ ou $-\infty$), alors g tend vers la même limite l.

2.4.4 Extension. *On peut ennoncer des résultats du même genre pour les limites infinies.*

2.5 Opérations sur les limites

2.5.1 Rappel. *Définitions des somme, produit et quotient de suites ou de fonctions.*

2.5.2 Théorème. *Lorsque les limites sont finies (et non nulles dans le cas du quotient) :*

i) La limite d'une somme de suites ou de fonctions est la sommes de limites.
ii) La limite d'un produit de suites ou de fonctions est le produit des limites.
iii) La limite d'un quotient de suites ou de fonctions est le quotient des limites.

Remarque. Il existe des résultats pour les somme, produit et quotient de limites infinies ou nulles dans le cas des quotients mais ces opérations peuvent également aboutir à des formes indéterminées. Exemples.

2.5.3 Notations. *Notation de Landau*
Au voisinage d'un point, on introduit :

i) La domination d'une fonction g par une fonction f et la notation $g = O(f)$
ii) L'équivalence de deux fonctions f et g et la notation $f \sim g$
iii) La négligeabilité d'une fonction g par rapport à une fonction f et la notation $g = o(f)$.

Chapitre 3

Continuité

3.0 Rappel. *Rappeler les définitions suivantes pour des fonctions $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

i) *domaine de définition, image, antécédent, image réciproque,*

ii) *fonction majorée, minorée, bornée, monotone, paire et impaire, périodique.*

iii) *composition, restriction, recollement des fonctions.*

3.1 Continuité d'une fonction en un point

3.1.1 Définition. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. La fonction f est continue en x_0 si la fonction f tend vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0.*

3.1.2 Extension. *Comme pour les limites, on peut définir la continuité à droite ou à gauche.*

3.1.3 Théorème. *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *f est continue en x_0*

ii) *Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans I et tendant vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(x_0)$.*

3.1.4 Proposition. *Soit $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.*

i) *Si f et g sont continues en x_0, $f+g$ et fg sont continues en x_0*

ii) *Si f et g sont continues en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.*

3.1.5 Proposition. *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, $g : J \to \mathbb{R}$ et $f(x_0) \in J$.*
Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0

3.1.6 Extension. *Recollement par continuité.*

3.2 Fonctions continues sur un intervalle

3.2.1 Définition. *Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur I si elle est continue en tout point de I.*

3.2.2 Proposition. *Les somme, produit, quotient, composition de fonctions continues sur I sont continues sur I.*

3.2.3 Théorème. *Théorème des valeurs intermédiaires.*
Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, continue sur* I *et soient* a *et* b *deux réels de* I*. Alors tout réel compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$ *admet au moins un antécédent dans* I*. Donc* $f(I)$ *est un intervalle.*

3.2.4 Théorème. *Théorème de Weierstrass.*
Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, continue sur* I*. Alors* f *est bornée et atteint ses bornes dans* I*.*

3.2.5 Corollaire. $f([a;b]) = [m;M]$.

3.2.6 Extension. *Continuité par morceaux.*

Chapitre 4

Dérivabilité

4.1 Dérivabilité d'une fonction en un point

4.1.1 Définition. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. La fonction f est dérivable en x_0 si la fonction taux d'accroissement τ, définie sur $I \setminus x_0$ par $\tau(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, admet une limite lorsque $x \to x_0$. Dans ce cas, la limite s'appelle la dérivée de f en x_0 et se note $f'(x_0)$.*

4.1.2 Application. *Interprétation graphique, tangente au graphe de la fonction.*

4.1.3 Proposition. *La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un réel λ tel que*

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0).$$

La dérivée de f en x_0 est alors égale à λ.

4.1.4 Proposition. *Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0 et la réciproque est fausse.Exemples : $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$, f affine par morceaux.*

4.1.5 Proposition. *Soit $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.*

i) *Si f et g sont dérivables en x_0, alors $f + g$ et fg sont dérivables en x_0, avec*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \text{ et } (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

ii) *Si f et g sont dérivables en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 avec*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

4.1.6 Proposition. *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, $g : J \to \mathbb{R}$ et $f(x_0) \in J$.*
Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0, avec

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

4.1.7 Extension. *Comme pour les limites et la continuité, on peut définir la dérivabilité à droite ou à gauche en un point x_0.*

4.2 Fonctions dérivables sur un intervalle

4.2.1 Définition. *Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.*

4.2.2 Proposition. *Les somme, produit, quotient, composition de fonctions dérivables sur I sont dérivables sur I.*

4.2.3 Proposition. *Toute fonction dérivable sur I est continue sur I. La réciproque est fausse.*

4.3 Dérivées successives

4.3.1 Définition. *Lorsque qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I et que sa dérivée f' est aussi dérivable sur I, la dérivée de f' est notée f'' et est appelée dérivée seconde de f sur I.*

4.3.2 Définition. *En itérant ce processus, on obtient les dérivées successives de f : si la dérivée d'ordre $n-1$ de f, $f^{(n-1)}$, est dérivable sur I, sa dérivée est notée $f^{(n)}$ et est appelée dérivée d'ordre n de f sur I. Noter que $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$.*

4.3.3 Définition. *Lorsque qu'une fonction f admet des dérivées jusquà l'ordre n sur I, on dit qu'elle est n fois dérivable. Si de plus, sa dérivée n-ième est continue (et donc aussi toutes les précédentes), on dit que f est de classe C^n.*

4.3.4 Définition. *Lorsque qu'une fonction f admet des dérivées d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur I, on dit qu'elle est indéfiniment dérivable ou de classe C^∞.*

4.4 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

4.4.1 Théorème. *Théorème de Rolle*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

4.4.2 Théorème. *Théorème des accroissements finis*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

4.4.3 Application. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$. S'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leq M$, alors : $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.*

4.5 Sens de variation

4.5.1 Proposition. *Si la dérivée d'une fonction dérivable $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est positive ou nulle (respectivement négative ou nulle), la fonction f est croissante (respectivement décroissante).*

4.5.2 Définition. *Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un maximum (respectivement minimum) local en un point x_0 s'il existe un voisinage $V(x_0)$ tel que pour tout $x \in V(x_0)$, on ait $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \geq f(x_0)$). Ce maximum (respectivement minimum) est global si ces inégalités sont vraies sur tout l'intervalle I.*

4.5.3 Proposition. *Si x_0 est un extremum (maximum ou minimum) local d'une fonction dérivable $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors sa dérivée s'annule en x_0. La réciproque est fausse. Exemples : $f(x) = x^3$ en $x_0 = 0$*

4.5.4 Application. *Tableau de variation*

4.5.5 Exemple. Fonctions convexes

Chapitre 5

Fonctions usuelles

5.1 Fonctions puissances entières

5.1.1 Définition. *Soit k un entier relatif. La fonction qui à tout réel x associe le réel x^k est appelée fonction puissance k-ième. Si $k < 0$, cette fonction n'est pas définie en 0 et pour $x \neq 0$, $x^k = \dfrac{1}{x^{-k}}$. Convention : x^0 est la fonction constante égale à 1.*

5.1.2 Proposition. *Si k est pair, la fonction puissance telle que $f(x) = x^k$ sur son domaine de définition est paire et si k est impair, elle est impaire.*

5.1.3 Proposition. *Etant donné un réel $x \neq 0$ et deux entiers relatifs k_1 et k_2, on a :*

$$x^{k_1+k_2} = x^{k_1}x^{k_2} \text{ et } x^{k_1k_2} = \left(x^{k_1}\right)^{k_2}$$

5.1.4 Proposition. *i) Les fonctions puissances sont dérivables sur $\mathbb{R}$ si k est positif et sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ si k est négatif, avec pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(x^k)' = kx^{k-1}$.*

ii) Les fonctions puissances sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ si k est positif et, si k est négatif, sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

5.1.5 Proposition. *Sens de variation*
Soit n un entier naturel non nul.

i) Si n est impair, la fonction puissance définie par $f(x) = x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}$

ii) Si n est pair, la fonction puissance définie par $f(x) = x^n$ est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$

iii) Si n est impair, la fonction puissance définie par $f(x) = x^{-n}$ est décroissante sur $]-\infty,0[$ et décroissante sur $]0,+\infty[$

iv) Si n est pair, la fonction puissance définie par $f(x) = x^{-n}$ est croissante sur $]-\infty,0[$ et décroissante sur $]0,+\infty[$

5.1.6 Proposition. *Limites*
Soit n un entier naturel non nul.

i) Si n est impair, la fonction puissance définie par $f(x) = x^n$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$

ii) Si n est pair, la fonction puissance définie par $f(x) = x^n$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$

iii) Si n est impair, la fonction puissance définie par $f(x) = x^{-n}$ tend vers 0^+ en $+\infty$ et vers 0^- en $-\infty$. Elle tend vers $+\infty$ en 0^+ et vers $-\infty$ en 0^-.

iv) Si n est pair, la fonction puissance définie par $f(x) = x^{-n}$ tend vers 0^+ en $+\infty$ et vers 0^+ en $-\infty$. Elle tend vers $+\infty$ en 0^+ et vers $+\infty$ en 0^-.

5.2 Fonction Logarithme népérien

5.2.1 Définition. *Le logarithme népérien est la fonction, notée* $\ln$*, définie sur* $]0,+\infty[$ *qui vérifie la relation* $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *pour tous* $x, y > 0$ *et qui prend la valeur 1 lorsque* $x = e = 2,71828\ldots$*. En particulier* $\ln(1) = 0$

Remarque. Pour tout $x, y > 0$, on a : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

5.2.2 Proposition. *Pour tout réel* $a > 0$ *et tout entier naturel non nul n, on a :*

$$\ln(a^n) = n \ln a \text{ et } \ln(a^{-n}) = -n \ln a$$

5.2.3 Théorème. *La fonction logarithme est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et sa dérivée vaut* $\frac{1}{x}$.

5.2.4 Corollaire. *La fonction logarithme est croissante sur* $]0,+\infty[$ *, elle tend vers*$-\infty$ *lorsque* $x \to 0$ *et vers* $+\infty$ *lorsque* $x \to +\infty$.

5.3 Fonction exponentielle

5.3.1 Définition. *La fonction, notée* $\exp$*, définie sur* $\mathbb{R}$ *est la fonction inverse du logarithme népérien. Elle vérifie la relation* $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$ *et prend la valeur e lorsque* $x = 1$*. On la note aussi :* $\exp x = e^x$

Remarque. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $e^{x+y} = e^x e^y$.

5.3.2 Proposition. *Pour tout réel a et tout entier naturel non nul n, on a :*

$$(e^a)^n = e^{na} \text{ et } (e^a)^{-n} = \frac{1}{e^{na}}$$

5.3.3 Théorème. *La fonction exponentielle est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et sa dérivée lui est égale.*

5.3.4 Corollaire. *La fonction exponentielle est croissante sur* $\mathbb{R}$ *, elle tend vers* 0 *lorsque* $x \to -\infty$ *et vers* $+\infty$ *lorsque* $x \to +\infty$.

5.4 Fonction puissance quelconque

Grâce à la fonction exp, on peut définir les puissances quelconques des réels positifs :

5.4.1 Définition. *Etant donné un réel strictement positif x et un réel b quelconque, on peut définir la puissance b-ième de x par :* $x^b = e^{b \ln x}$.

5.4.2 Proposition. *Etant donné un réel* $x > 0$ *et deux réels* b_1 *et* b_2*, on a :*

$$x^{b_1+b_2} = x^{b_1} x^{b_2} \text{ et } x^{b_1 b_2} = \left(x^{b_1}\right)^{b_2}$$

5.4.3 Proposition. *Etant donné deux réels* $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ *et un réel quelconque b, on a :*

$$(x_1 x_2)^b = x_1^b x_2^b$$

5.4.4 Cas particulier. *Racine n-ième.*
Etant donné un réel strictement positif x et un entier naturel $n > 0$, la racine n-ième de x est définie par :

$$x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln x}$$

5.4.5 Proposition. *Les fonctions puissances sont de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, de dérivée $\left(x^b\right)' = bx^{b-1}$. Si b est un réel strictement positif, alors $\lim\limits_{x\to 0^+} x^b = 0^+$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^b = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-b} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-b} = 0^+$.*

5.4.6 Proposition. *Croissance comparée*
Si a et b sont deux réels strictement positifs, on a :

$$\lim_{x\to 0^+} x^a\,|\ln x|^b = 0\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a} = +\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty\ ,\ \lim_{x\to-\infty}|x|^a e^x = 0$$

5.5 Fonctions trigonométriques

Les fonctions cosinus (cos) et sinus (sin) sont définies à partir des mesures des côtés d'un triangle rectangle. Pour le cos, c'est la mesure du côté adjacent divisée par la mesure de l'hypothénuse et pour le sin c'est la mesure du côté opposé divisée par la mesure de l'hypothénuse. On obtient ainsi deux fonctions qui vérifient les propriétés suivantes :

5.5.1 Proposition. *Les fonctions* cos *et* sin *sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*
Elles sont périodiques de période 2π.
La fonction cos *est paire et la fonction* sin *est impaire.*
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos' x = -\sin x$ et $\sin' x = \cos x$.
Ces fonctions vérifient l'identité suivante, vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

On étudie le sens de variation de ces fonctions sur $[0,\pi]$ et on complète par parité ou imparité pour obtenir le sens de variation sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$, de longueur 2π.

5.5.2 Théorème. *Sens de variation*

i) *La fonction* cos *est décroissante de 1 à -1 sur $[0,\pi]$ et prend la valeur 0 en $\dfrac{\pi}{2}$.*

ii) *La fonction* sin *est croissante de 0 à 1 sur $[0,\dfrac{\pi}{2}]$, prend la valeur 1 en $\dfrac{\pi}{2}$ et est décroissante de 1 à 0 sur $[\dfrac{\pi}{2},\pi]$.*

5.5.3 Définition. *Fonction tangente*
Pour $x \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$, on définit la fonction tangente (tan) *par :*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

On peut étendre cette définition à tous les intervalles $]\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+(k+1)\pi[$, où $k \in \mathbb{Z}$.

5.5.4 Proposition. *Pour $k \in \mathbb{Z}$, la fonction* tan *est de classe C^∞ sur* $]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi[$
Elle est périodique de période 2π.
La fonction tan *est impaire.*
Pour tout $x \in]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi[$, on a :

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

5.5.5 Théorème. *Sens de variation*
La fonction tan *est croissante sur les intervalles* $]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi[$ *et*

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^-} \tan x = +\infty\ , \quad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+} \tan x = -\infty$$

5.5.6 Annexe. *Formulaire de trigonométrie*

5.6 Fonctions hyperboliques

5.6.1 Définition. *Cosinus hyperbolique*
Etant donné un réel x, on appelle cosinus hyperbolique de x le réel, noté $\operatorname{ch} x$*, tel que*

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

5.6.2 Proposition. *Sens de variation*
La fonction ch*, définie sur $\mathbb{R}$, est paire. Elle est croissante sur $[0, +\infty[$. Elle vaut 1 en $x = 0$ et vérifie* $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$.

5.6.3 Définition. *Sinus hyperbolique*
Etant donné un réel x, on appelle sinus hyperbolique de x le réel, noté $\operatorname{sh} x$*, tel que*

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

5.6.4 Proposition. *Sens de variation*
La fonction sh*, définie sur $\mathbb{R}$, est impaire. Elle est croissante sur $[0, +\infty[$ et vaut 0 en $x = 0$ et vérifie* $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$.

5.6.5 Propriété. *Quelque soit $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

5.6.6 Définition. *Tangente hyperbolique*
Etant donné un réel x, on appelle tangente hyperbolique de x le réel, noté $\operatorname{th} x$*, tel que*

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

5.6.7 Proposition. *La fonction* th *est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$$

5.6.8 Proposition. *Sens de variation*
La fonction th*, définie sur $\mathbb{R}$, est impaire, elle est croissante sur $[0, +\infty[$ et vaut 0 en $x = 0$ et vérifie* $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1$.

5.6.9 Annexe. *Formulaire hyperbolique*

Chapitre 6

Fonctions réciproques

6.1 Injectivité, surjectivité, bijectivité

6.1.1 Définition. *Soient X et Y deux ensembles. Une fonction $f : X \to Y$ est injective si pour tout couple d'éléments x, x' de X :*

$$f(x) = f(x') \implies x = x'$$

6.1.2 Définition. *Soient X et Y deux ensembles. Une fonction $f : X \to Y$ est surjective si pour tout $y \in Y$, il existe un $x \in X$ tel que*

$$y = f(x)$$

6.1.3 Définition. *Soient X et Y deux ensembles. Une fonction $f : X \to Y$ est bijective si elle est à la fois injective et surjective, ce qui se traduit par : pour tout $y \in Y$, il existe un unique $x \in X$ tel que*

$$y = f(x)$$

6.1.4 Définition. *Soient X et Y deux ensembles et soit $f : X \to Y$ une fonction bijective. Pour chaque $y \in Y$, l'unique élément $x \in X$ tel que $y = f(x)$ est noté $f^{-1}(y)$. La fonction $f^{-1} : Y \to X$ est appelée fonction réciproque de f*

6.1.5 Proposition. *Soient X et Y deux ensembles et soit $f : X \to Y$ une fonction bijective et $f^{-1} : Y \to X$ sa fonction réciproque. Alors : $f \circ f^{-1} = Id_Y$, $f^{-1} \circ f = Id_X$.*

6.2 Fonctions continues, fonctions monotones

6.2.1 Théorème. *Soient I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $f : I_1 \to I_2$ une fonction bijective. Si de plus, f est continue en un point $a \in I_1$, alors f^{-1} est continue en $b = f(a)$. De même pour la continuité globale sur I_1 et I_2.*

6.2.2 Théorème. *Soient I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $f : I_1 \to I_2$ une fonction bijective. Si de plus, f est croissante (respectivement décroissante) sur I_1, alors f^{-1} est croissante (respectivement décroissante) sur I_2.*

6.2.3 Théorème. *Soient I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $f : I_1 \to I_2$ une fonction bijective. Si de plus, f est dérivable en un point $a \in I_1$ et $f(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

6.2.4 Application. Graphes des fonctions inverses

6.3 Réciproques des fonctions usuelles

6.3.1 Définition. *Fonction Arcsinus*
La restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *est strictement croissante donc bijective de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *dans* $[-1,+1]$. *Sa fonction réciproque est appelée fonction arcsinus (*arcsin*).*
La fonction arcsin *est dérivable sur* $]-1,+1[$*, elle est impaire et croissante et pour tout* $x \in]-1,+1[$ *:*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La fonction arcsin *est donc de classe* C^∞ *sur* $]-1,+1[$.

6.3.2 Définition. *Fonction Arccosinus*
La restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0,\pi]$ *est strictement décroissante donc bijective de* $[0,\pi]$ *dans* $[-1,+1]$. *Sa fonction réciproque est appelée fonction arccosinus (*arccos*).*
La fonction arccos *est dérivable sur* $]-1,+1[$*, elle est impaire et décroissante et pour tout* $x \in]-1,+1[$ *:*

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La fonction arccos *est donc de classe* C^∞ *sur* $]-1,+1[$.

6.3.3 Définition. *Fonction Arctangente*
La restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *est strictement croissante donc bijective de* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *dans* $]-\infty,+\infty[$. *Sa fonction réciproque est appelée fonction arctangente (*arctan*).*
La fonction arctan *est dérivable sur* $]-\infty,+\infty[$*, elle est impaire et croissante et pour tout* $x \in]-\infty,+\infty[$ *:*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

La fonction arctan *est donc de classe* C^∞ *sur* $]-\infty,+\infty[$.

6.3.4 Extension. *On peut définir également les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques et on obtient :*

i) *La fonction argument sinus hyperbolique,* argsh*, est la réciproque de la fonction* sh. *C'est une fonction dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
Elle est croissante et $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{argsh} x = +\infty$.
Sa dérivée vaut $\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
C'est donc une fonction de classe C^∞ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

ii) *La fonction argument cosinus hyperbolique,* argch *est la réciproque de la restriction de la fonction* ch *à l'intervalle* $[0,+\infty[$. *C'est une fonction dérivable de* $]1,+\infty[$ *dans* $[0,+\infty[$. *Elle est décroissante et* $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{argch} x = +\infty$.
Sa dérivée vaut $\operatorname{argch}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

C'est donc une fonction de classe C^∞ *de* $]1,+\infty[$ *dans* $[0,+\infty[$.

iii) La fonction argument tangente hyperbolique, argth, *est la réciproque de la fonction* th. *C'est une fonction dérivable de* $]-1,+1[$ *dans* $\mathbb{R}$. *Elle est impaire, croissante et* $\lim\limits_{x\to+1} \operatorname{argth} x = +\infty$. *Sa dérivée vaut* $\operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
C'est donc une fonction de classe C^∞ *de* $]-1,+1[$ *dans* $\mathbb{R}$.

Chapitre 7

Théorèmes de Rolle, des accroissements finis, formules de Taylor

7.1 Formules de Taylor

7.1.1 Théorème. *Formule de Taylor-Lagrange*
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f^{(n)}$ soit continue sur $[a,b]$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots$$

$$+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Remarque. Dans le cas $n = 0$, on retrouve le théorème des accroissements finis.

7.1.2 Théorème. *Formule de Taylor-Young*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, n fois dérivable dans un voisinage de x_0. Alors, il existe une fonction ε, qui tend vers 0 en 0 et telle que pour x dans un voisinage de x_0 on ait :

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots$$

$$+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0)$$

Remarque. Sous les hypothèses de la formule de Taylor-Lagrange, on peut prendre

$$\varepsilon(x-x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Remarque. La fonction $x \mapsto (x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0)$ est négligeable devant $(x-x_0)^n$ lorsque $x-x_0$ tend vers 0. C'est donc un $o\left((x-x_0)^n\right)$.

7.2 Développements limités

7.2.1 Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe des nombres réels $c_0, c_1, \cdots, c_n$ et une fonction ε, qui tend vers 0 en 0, tels que pour tout x dans un voisinage de x_0 on ait :*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + c_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0)$$

Remarque. Le développement limité d'ordre n d'une fonction f au voisinage de x_0 s'écrit aussi :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + c_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

7.2.2 Définition. *Le polynôme $c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + c_n(x-x_0)^n$ s'appelle la partie principale du développement limité.*

7.2.3 Théorème. *Le développement limité d'une fonction f à l'ordre n au voisinage d'un point donné s'il existe est unique.*

7.2.4 Théorème. *Les fonctions qui vérifient les hypothèses de la formule de Taylor-Young admettent un développement limité à l'ordre n.*

7.2.5 Proposition. *Intégration des développements limités*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 de la forme :

$$f'(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + c_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

alors f admet le développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de x_0 défini par :

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + c_0(x-x_0) + c_1\frac{(x-x_0)^2}{2} + c_2\frac{(x-x_0)^3}{3} + \cdots \\ + c_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + o\left((x-x_0)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

7.3 Développements limités des fonctions usuelles

Les développements limités qui suivent sont tous au voisinage de 0.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^{n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$$

Et d'autres si on a le temps !

Chapitre 8

Equations différentielles linéaires du 1er ordre

8.1 Equations homogènes

8.1.1 Définition. *Soit a une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre est une équation de la forme :*

$$y'(x) = a(x)y(x), \text{ ou plus simplement } y' = a(x)y$$

où y est une fonction inconnue.

8.1.2 Théorème. *Soit a une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y' = a(x)y$ sont données par :*

$$y(x) = ke^{A(x)},\ k \in \mathbb{R}$$

où la fonction A est une primitive de la fonction a, c'est-à dire qui vérifie $A' = a$. L'ensemble des solutions forme donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

8.1.3 Définition. *Soit a une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$ est une équation de la forme :*

$$y'(x) = a(x)y(x), \text{ et } y(x_0) = y_0$$

8.1.4 Théorème. *Soit a une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. La solution de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre avec condition initiale $y' = a(x)y,$ et $y(x_0) = y_0$ est donnée par :*

$$y(x) = y_0 e^{-A(x_0)} e^{A(x)}$$

où la fonction A est une primitive de la fonction a, c'est-à dire qui vérifie $A' = a$.

8.2 Equation avec second membre

8.2.1 Définition. *Soient a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre avec second membre est une équation de la forme :*

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x), \text{ ou plus simplement } y' = a(x)y + b(x)$$

où y est une fonction inconnue.
L'équation $y' = a(x)y$ est appelée l'équation homogène associée.

8.2.2 Théorème. *Soient a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = a(x)y + b(x)$, alors $y_1 - y_2$ est solution de l'équation homogène associée.*

8.2.3 Corollaire. *Soient a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. La solution générale de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = a(x)y + b(x)$, est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.*

8.2.4 Cas particulier. *i) Equations à coefficients constants : lorsque a est une fonction constante*
ii) Etude des solutions lorsque le deuxième membre est de la forme :

$$P(x)e^x, (\cos x)e^x, (\sin x)e^x, \cdots$$

8.2.5 Proposition. *Méthode de variation de la constante*
Soient a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$, sous la forme $y = \lambda(x)e^{A(x)}$, où la fonction A vérifie $A' = a$. Toute fonction λ qui vérifie $\lambda'(x) = b(x)e^{-A(x)}$ convient.

Chapitre 9

Le corps $\mathbb{C}$ et l'exponentielle complexe

9.1 Définition de $\mathbb{C}$

9.1.1 Définition. *On introduit un nombre imaginaire i tel que $i^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{C}$ est défini par :*

$$\mathbb{C} = \{x + iy, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

i) x est appelé partie réelle de z et noté $x = Rez$.
i) y est appelé partie imaginaire de z et noté $y = Imz$.
iii) Si $x = 0$, le nombre complexe $z = iy$ est appelé imaginaire pur.
iv) Le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$ est appelé le conjugué de $z = x + iy$.

9.1.2 Proposition. *Règles de calcul*
Pour $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on a :
i) $z + z' = (x + x') + i(y + y')$
ii) $zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$
Muni de ces deux opérations , $\mathbb{C}$ est un corps commutatif.
iii) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$
iv) $z\overline{z} = x^2 + y^2$

9.1.3 Proposition. *L'ensemble des nombres complexes s'identifie au plan euclidien $\mathbb{R}^2$. L'addition des nombres complexes correspond à l'addition des vecteurs. La multiplication par i correspond à la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. La multiplication par $i^2 = -1$ correspond à la rotation d'angle π. Le complexe conjugué $\overline{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des x.*

9.1.4 Définition. *Forme polaire*
i) On appelle module ou norme du nombre complexe $z = x + iy$ le nombre

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

Ce nombre positif représente la distance du point de coordonnées (x,y) à l'origine dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$.
ii) On appelle argument du nombre complexe $z = x + iy \neq 0$ et on note $\theta = \mathrm{Arg} z$, une mesure en radians dans le plan $\mathbb{R}^2$ de l'angle entre l'axe des x et le vecteur de coordonnés (x,y). L'argument d'un nombre complexe est défini modulo 2π.
iii) Le nombre complexe $z = x + iy \neq 0$ s'écrit alors de façon unique :

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

9.2 Exponentielle complexe

9.2.1 Définition. *Exponentielle complexe*

i) *Pour tout nombre réel θ, on pose :*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ii) *Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on pose :*

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy}$$

où e^x est l'exponentielle réelle classique et e^{iy} est définie au (i).

Remarque. *i)* Puisque les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$$

ii) $|e^z| = e^x$ et $\mathrm{Arg}(e^z) = y, \mod 2\pi$

9.2.2 Corollaire. *i)* *Pour tous nombres complexes z et z', on a :*

$$e^{z+z'} = e^{z}e^{z'}$$

ii) *Pour tout nombre complexe z et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$e^{nz} = (e^z)^n$$

iii) *Pour tout nombre complexe z, on a $e^z \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.*

Remarque. *i)* $e^{2i\pi} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\pi/2} = i$

ii) La multiplication par $e^{i\theta}$ dans $\mathbb{C}$ correspond à la rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$.

9.3 Racines *n*-ièmes de l'unité

9.3.1 Définition. *On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.*

En utilisant la forme polaire $z = re^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\theta = \mathrm{Arg}\, z \mod 2\pi$, l'équation $z^n = 1$ s'écrit $r^n e^{in\theta} = 1$. Les solutions sont données par : $r = 1$, $n\theta = 0 \mod 2\pi$, soit :

9.3.2 Proposition. *L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est :*

$$\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

Chapitre 10

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, produit scalaire et produit vectoriel

10.1 Vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

10.1.1 Définition. *Un vecteur de $\mathbb{R}^2$, respectivement de $\mathbb{R}^3$, est un couple, respectivement un triplet de réels, notés, $\vec{u} = (x, y)$ ou encore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, respectivement $\vec{u} = (x, y, z)$ ou encore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.*
x, y, et z sont appelés les composantes du vecteur $\vec{u}$.

10.1.2 Propriété. *i) Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils sont les mêmes composantes*
ii) Le vecteur dont toutes les composantes sont nulles est appelé le vecteur nul
iii) La somme de deux vecteurs est le vecteur dont chaque composante est la somme des composantes des vecteurs de départ
iv) Le produit d'un vecteur par un réel est le vecteur dont chaque composante est le produit de celle du vecteur de départ par ce réel.

10.1.3 Définition. *i) Une combinaison linéaire de n vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ est une expression de la forme $a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots a_n\vec{u}_n$ où les $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels.*
ii) Une famille de vecteurs est liée s'il existe une combinaison à coefficients non tous nuls de ces vecteurs qui soit égale au vecteur nul.
iii) Une famille de vecteurs est libre si elle n'est pas liée.

Remarque. Deux vecteurs liés sont proportionnels. En revanche, trois vecteurs liés ne sont pas nécessairement proportionnels. Exemples.

10.1.4 Définition. *Repères*
i) Un repère de $\mathbb{R}^2$ est un ensemble $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$, où O est un point de $\mathbb{R}^2$ et $\vec{i}, \vec{j}$ sont deux vecteurs libres.
ii) Un repère de $\mathbb{R}^3$ est un ensemble $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, où O est un point de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont trois vecteurs libres.

10.1.5 Proposition. *i) Tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$*
ii) Tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

10.2 Droites et plans

10.2.1 Définition. *Droites dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$*

i) *On appelle droite vectorielle engendrée par un vecteur $\vec{u} \neq 0$, l'ensemble défini par : $D = \mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.*

ii) *On appelle droite affine passant par un point A et engendrée par un vecteur $\vec{u} \neq 0$, l'ensemble : $D = A + \mathbb{R}\vec{u} = A + \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.*

10.2.2 Définition. *Plans dans $\mathbb{R}^3$*

i) *On appelle plan vectoriel engendré par deux vecteur libres $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$, l'ensemble : $P = \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.*

ii) *On appelle plan affine passant par un point A et engendrée par deux vecteurs libres $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$, l'ensemble : $P = A + \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} = A + \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.*

10.3 Produit scalaire, produit vectoriel

10.3.1 Définition. *Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$*

i) *Le produit scalaire de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $\vec{u}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{u}_2 = (x_2, y_2)$ est le réel $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$.*

ii) *Le produit scalaire de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ est le réel $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.*

10.3.2 Propriété. *i)* *Le produit scalaire de 2 vecteurs est nul si et seulement si les 2 vecteurs sont orthogonaux.*

ii) *Le produit scalaire est linéaire par rapport à chacun des vecteurs.*

iii) *Le produit scalaire est symétrique ($\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1$).*

iv) *Le produit scalaire est défini positif ($\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, et $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \implies \vec{u} = 0$).*

v) *L'application $\vec{u} \to ||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.*

10.3.3 Théorème. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$, respectivement $\mathbb{R}^3$, on a :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}||||\vec{v}||$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés.

10.3.4 Définition. *Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ Le produit vectoriel de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ est le vecteur suivant :*

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

10.3.5 Propriété. *i)* *Le produit vectoriel de 2 vecteurs est nul si et seulement si les 2 vecteurs sont liés*

ii) *Le produit vectoriel est linéaire par rapport à chacun des vecteurs.*

iii) *Le produit vectoriel est anti-symétrique ($\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = -\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1$).*

Chapitre 11

Polynômes, racines

11.1 Polynômes

11.1.1 Définition. *Un polynôme sur le corps* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ *est une expression de la forme :*

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où les a_k sont des éléments de $\mathbb{K}$, appelés coefficients du polynôme P.
Si $a_n \neq 0$, le degré du polynôme P est $\deg P = n$.

11.1.2 Notations. *L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$ est dénoté $\mathbb{K}[X]$.*
L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$, de degré inférieur à n est dénoté $\mathbb{K}_n[X]$.

11.1.3 Proposition. *Opérations sur $\mathbb{K}[X]$*
Soient $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ deux polynômes sur $\mathbb{K}$.
Quitte à introduire des coefficients nuls, on peut supposer que $m = n$.

i) La somme de P et Q est le polynôme défini par :

$$(P+Q)(X) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k$$

ii) Le produit de P et Q est le polynôme défini par :

$$(PQ)(X) = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{k} (a_j b_{k-j}) X^k$$

Muni de ces deux opérations, $\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif intègre.

11.1.4 Définition. *Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ un polynôme. La dérivée de P est le polynôme $P'(X) = \sum_{k=0}^{m} k a_k X^{k-1}$.*
On définit de la même manière les dérivées successives de P, notées $P^{(m)}$, pour $m \in \mathbb{N}$.

Remarque. Si P est de degré n, alors $P^{(n+1)}$ est le polynôme nul.

11.2 Division euclidienne

11.2.1 Proposition. *Etant donné 2 polynômes P et Q, à coeffcients dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, Q n'étant pas le polynôme nul, il existe deux polynômes D et S, où le degré de S est strictement inférieur au degré de Q tels que*

$$P(X) = D(X)Q(X) + S(X)$$

11.2.2 Définition. *Le polynôme D s'appelle le quotient et le polynôme S le reste de la division euclidienne de P par Q.*

11.3 Racines dans $\mathbb{C}$

11.3.1 Définition. *On appelle racine d'un polynôme P sur $\mathbb{C}$, un nombre complexe z_0 tel que $P(z_0) = 0$.*

11.3.2 Théorème. *Soit P un polynôme non nul sur $\mathbb{C}$ et soit z_0 une racine de P. Alors, il existe un polynôme Q tel que* $\deg Q = \deg P - 1$ *et vérifiant :*

$$P(X) = (X - z_0)Q(X)$$

11.3.3 Définition. *i) On dit que z_0 est une racine simple d'un polynôme P sur $\mathbb{C}$, si $P(X) = (X - z_0)Q(X)$ et $Q(z_0) \neq 0$.*

ii) Plus généralement, on dit que z_0 est une racine d'ordre $k \in \mathbb{N}$ d'un polynôme P sur $\mathbb{C}$, si $P(X) = (X - z_0)^k Q(X)$ et $Q(z_0) \neq 0$.

11.3.4 Proposition. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, z_0 est une racine d'ordre $k \in \mathbb{N}$ d'un polynôme P sur $\mathbb{C}$ si et seulement si $P(z_0) = 0, P'(z_0) = 0, \cdots P^{(k-1)}(z_0) = 0$ et $P^{(k)}(z_0) \neq 0$.*

11.3.5 Théorème. *Théorème de d'Alembert-Gauss (admis)*
Tout polynôme non constant sur $\mathbb{C}$ admet au moins une racine.

11.3.6 Corollaire. *Tout polynôme P non constant sur $\mathbb{C}$ de degré n, se factorise sous la forme :*

$$P(X) = a_n(X - z_1)\cdots(X - z_{n-1})(X - z_n)$$

où les z_k, $k = 1, \cdots, n-1, n$ sont les racines (distinctes ou non) de P.

11.3.7 Application. *Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.*

11.4 Racines dans $\mathbb{R}$

Le théorème de d'Alembert-Gauss ne permet pas d'affirmer que les racines d'un polynôme à coefficients réels sont réelles, ce qui est faux. Voici ce que l'on peut dire dans le cas réel :

11.4.1 Proposition. *Soit P un polynôme non nul sur $\mathbb{R}$ et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une racine de P. Alors $\overline{z_0}$ est aussi racine de P.*

11.4.2 Corollaire. *Tout polynôme P non constant sur $\mathbb{R}$ de degré n, se factorise sous la forme :*

$$P(X) = a_n \Pi_{i=1}^{k} (X - x_i) \Pi_{j=1}^{l} \left(X^2 - (z_j + \overline{z}_j) X + z_j \overline{z}_j \right)$$

avec $k + 2l = n$ et où les x_i, $i = 1, \cdots, k$ sont les racines réelles (distinctes ou non) de P et où les z_j, $j = 1, \cdots, l$ sont les racines complexes non réelles (distinctes ou non) de P considéré comme polynôme complexe.

Chapitre 12

Fractions rationnelles

12.1 Fractions rationnelles

12.1.1 Définition. *Une fraction rationnelle est une expression de la forme :*

$$R(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

où P et Q sont des polynômes, Q n'étant pas le polynôme nul.
L'ensemble des fractions rationnelles sur $\mathbb{C}$ est noté $\mathbb{C}(X)$ et sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}(X)$.

Remarque. L'expression $R(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ n'est pas unique.

12.1.2 Proposition. *Forme irréductible*
Toute fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$ peut s'écrire $R(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$, où les polynômes P et Q sont premiers entre eux c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de facteur commun ou encore qu'il n'existe pas de polynôme non constant divisant à la fois P et Q.

12.1.3 Définition. *On appelle pôle d'une fraction rationnelle $R(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ sur $\mathbb{C}$, sous forme irréductible, tout nombre complexe z_0 tel que $Q(z_0) = 0$. On dit que le pôle z_0 est d'ordre de multiplicité p si $Q(z) = (z - z_0)^p \tilde{Q}(z)$ avec $\tilde{Q}(z_0) \neq 0$*

12.1.4 Proposition. *Toute fraction rationnelle irréductible peut s'écrire sous la forme :*

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = D(X) + \frac{S(X)}{Q(X)}$$

où le degré de S est strictement inférieur au degré de Q. Le polynôme D s'appelle la partie entière de la fraction rationnelle.

12.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

12.2.1 Définition. *On appelle éléments simples sur $\mathbb{C}$, les fractions rationnelles du type :*

$$\frac{\alpha}{(X-z)^n}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

12.2.2 Théorème. *Soit* $R(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ *une fraction rationnelle irréductible.*
Soient $z_1, \ldots, z_k$ *ses pôles d'ordre de multiplicité respectifs* $n_1, \ldots, n_k$, $k \in \mathbb{N}$.
Alors il existe des nombres complexes $\alpha_{i,j}, i = 1, \ldots k$, $j = 1, \ldots n_i$ *tels que* R *se décompose en somme d'éléments simples :*

$$R(X) = D(X) + \frac{S(X)}{Q(X)} = D(X) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X - z_i)^j}$$

Remarque. Si la fraction rationnelle est à coefficients réels et si les pôles sont réels, alors cette décomposition en éléments simples est à valeurs réelles.

12.3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

12.3.1 Définition. *On appelle éléments simples sur* $\mathbb{R}$, *les fractions rationnelles du type :*

$$\frac{\alpha}{(X - x)^n} \text{ et } \frac{aX + b}{(X^2 + \lambda X + \mu)^m}$$

où $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $\lambda, \mu \in R$ *et* $\lambda^2 - 4\mu < 0$.

12.3.2 Théorème. *Soit* $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ *une fraction rationnelle irréductible où* Q *est unitaire. Le polynôme* Q *se factorise en :* $Q(X) = \Pi_{i=1}^{k}(X - x_i)^{n_i}\Pi_{p=1}^{l}(X^2 + \lambda_p X + \mu_p)^{m_p}$ *et* R *se décompose en éléments simples sous la forme :*

$$R(X) = D(X) + \frac{S(X)}{Q(X)} = D(X) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X - x_i)^j} + \sum_{p=1}^{l} \sum_{q=1}^{m_p} \frac{a_{p,q}X + b_{p,q}}{(X^2 + \lambda_p X + \mu_p)^q}$$

où tous les coefficients sont dans $\mathbb{R}$.