CHAPITRE 2

LIMITES ET CONTINUITÉ

Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a vu au chap. 1 la notion de continuité : f est continue en un point $a \in \mathbb{R}$ si elle est définie en ce point et si « $f(x)$ se rapproche de $f(a)$ autant qu'on veut si on prend x suffisamment proche de a ». Dans ce chapitre, on étudie la notion de limite, qui s'applique dans un cadre plus général : même si f n'est pas définie en a, il se peut que « $f(x)$ se rapproche autant qu'on veut d'une certaine valeur $\ell \in \mathbb{R}$ si on prend x suffisamment proche de a » ; alors ℓ est unique et s'appelle la limite de f quand x tend vers a.

2.1. Notion de limite : définition via les suites et unicité

Remarque 2.1. — On peut considérer une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme une *application* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u(n) = u_n$. Ceci est commode pour la raison suivante : si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, la condition : « $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$ on ait $u_n \in I$ » peut se récrire de façon plus courte : « $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u(\mathbb{N} \cap]n_0, +\infty[) \subset I$ ».

Définition 2.2. — On rappelle qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* une limite $\ell \in \mathbb{R}$ (resp. vers $+\infty$, resp. vers $-\infty$) si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } u(\mathbb{N}\cap]n_0, +\infty[) \subset]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

$$\text{resp.}\quad \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } u(\mathbb{N}\cap]n_0, +\infty[) \subset]A, +\infty[.$$

$$\text{resp.}\quad \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } u(\mathbb{N}\cap]n_0, +\infty[) \subset]-\infty, A[.$$

Terminologie 2.3. — On dit aussi que « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ ». Par contre, on ne dit pas que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ « converge » vers $+\infty$ ou $-\infty$.

***Définition 2.4* (Limite finie ou infinie d'une fonction en un point $a \in \mathbb{R}$)**
Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $D = D_f$ son domaine de définition, et soit $a \in \mathbb{R}$ (*on n'impose pas que $a \in D$*). On dit que f tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ (resp. vers $+\infty$, resp. vers $-\infty$) quand « x tend vers a en restant dans D » si :

(0) Il existe au moins une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D qui tend vers a.

(1) Pour *toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D qui tend vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ (resp. vers $+\infty$, resp. vers $-\infty$).

Dans ce cas, on dit aussi que f admet en a la limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

***Définition 2.5* (Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$)**
Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $D = D_f$ son domaine de définition. On dit que f tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ (resp. vers $+\infty$, resp. vers $-\infty$) quand « x tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) en restant dans D » si :

(0) Il existe au moins une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

(1) Pour *toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ (resp. vers $+\infty$, resp. vers $-\infty$).

Dans ce cas, on dit aussi que f admet en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) la limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$.

Bien sûr, les deux définitions précédentes sont analogues, et on peut formuler les deux ensemble sous la forme suivante :

***Définition 2.6* (Limite d'une fonction en un point $a \in \mathbb{R}$ ou en $+\infty$ ou $-\infty$)**
Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $D = D_f$ son domaine de définition, et soit a un élément de l'ensemble $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. On dit que f tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ quand « x tend vers a en restant dans D » si :

(0) Il existe au moins une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D qui tend vers a.

(1) Pour *toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D qui tend vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

Dans ce cas, on dit aussi que f admet en a la limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$.

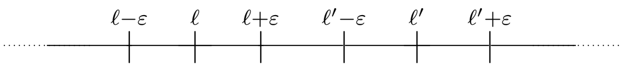
***Théorème 2.7* (Unicité de la limite).** — *Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit D son domaine de définition, et soit $a \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. Si f admet en a une limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$, alors celle-ci est unique.*

Démonstration. — Par l'absurde : supposons qu'il y ait deux limites $\ell \neq \ell'$, alors on est dans l'un des quatre cas suivants :

(1) $\ell, \ell' \in \mathbb{R},\ \ell < \ell'$ (2) $\ell \in \mathbb{R},\ \ell' = +\infty$ (3) $\ell \in \mathbb{R},\ \ell' = -\infty$ (4) $\ell = -\infty,\ \ell' = +\infty$.

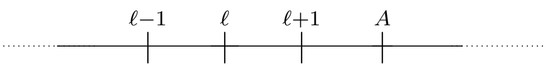
Alors la contradiction vient du fait qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D qui tend vers a et que les termes de la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ doivent tous appartenir, à partir d'un certain rang, aux intervalles ouverts ci-dessous, qui sont *disjoints* :

Cas (1)



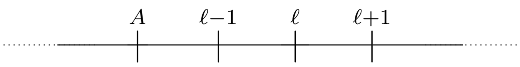
où ε est choisi tel que $\ell + \varepsilon \leq \ell' - \varepsilon$, c.-à-d., $\varepsilon \leq (\ell' - \ell)/2$.

Cas (2)



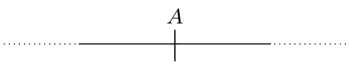
où $A \geq \ell + 1$.

Cas (3)



où $A \leq \ell - 1$.

Cas (4)



pour n'importe quel $A \in \mathbb{R}$. □

2.2. Opérations algébriques sur les limites

Pour commencer, rappelons et *démontrons* le théorème ci-dessous, admis en Terminale.

***Théorème 2.8* (Opérations sur les limites de suites).** — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, tendant respectivement vers des limites $\ell, \ell' \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$.*

(i) *La suite $(u_n + v_n)$ tend vers $\ell + \ell'$ si $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Elle tend vers $+\infty$ si $\ell = +\infty$ et si $\ell' \neq -\infty$; de même, elle tend vers $-\infty$ si $\ell = -\infty$ et si $\ell' \neq +\infty$.*

(ii) *La suite* (u_nv_n) *tend vers* $\ell\ell'$ *si* $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. *Elle tend vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) si l'une au moins des limites est infinie et si les deux limites sont de même signe (resp. de signe contraire).*

(iii) *Si* $\ell \in \mathbb{R}^*$ *(resp. si* $\ell = \pm\infty$*), il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_n \neq 0$ *pour tout* $n \geq n_0$*, et la suite* $(1/u_n)$*, définie pour* $n \geq n_0$*, converge vers* $1/\ell$ *(resp. vers* 0*).*

Remarque 2.9. — Dans certains cas on ne peut pas conclure directement en utilisant ce théorème ; ce sont les cas dits « indéterminés » : $+\infty - \infty$, $0 \times \pm\infty$ (ou $\pm\infty / \pm\infty$). Ces cas nécessitent une étude particulière.

Démonstration. — (a) Supposons d'abord $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

(i) Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$ on ait :

$$(1) \quad |\ell - u_n| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad (2) \quad |\ell' - v_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(Explicitement, on trouve un p_0 (resp. q_0) tel que (1) (resp. (2)) soit vérifié, alors $n_0 = \max(p_0, q_0)$ convient.) Alors, d'après l'inégalité triangulaire, on a pour tout $n > n_0$:

$$|(\ell + \ell') - (u_n + v_n)| = |\ell - u_n + \ell' - v_n| \leq |\ell - u_n| + |\ell' - v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci prouve que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ell'$.

(ii) Comme $\ell\ell' - u_nv_n = (\ell - u_n)\ell' + u_n(\ell' - v_n)$, on a :

$$|\ell\ell' - u_nv_n| \leq |(\ell - u_n)\ell'| + |u_n(\ell' - v_n)| = |(\ell - u_n)|\,|\ell'| + |u_n|\,|(\ell' - v_n)|.$$

On va montrer que le terme de droite est « aussi petit qu'on veut » si on prend n suffisamment grand. D'abord, prenant $\varepsilon = 1$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > p_0$, on ait $|u_n - \ell| < 1$, d'où $|u_n| = |u_n - \ell + \ell| < 1 + |\ell|$. Posons alors $M = \sup(|\ell'|, 1 + |\ell|)$.

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ arbitraire. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, qu'on peut prendre $> p_0$, tel que pour tout $n > n_0$, on ait :

$$|\ell - u_n| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{et} \quad |\ell' - v_n| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \text{d'où} \quad |\ell\ell' - u_nv_n| < \frac{\varepsilon}{2M}M + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\ell'$.

(iii) Supposons $\ell > 0$. (Le cas où $\ell < 0$ se traite de façon analogue). Prenons d'abord $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\varepsilon_1 < \ell$, par exemple $\varepsilon_1 = \ell/2$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$0 < \frac{\ell}{2} = \ell - \varepsilon_1 < u_n < \ell + \varepsilon_1 = \frac{3\ell}{2}.$$

Donc la suite $(1/u_n)$ est définie pour $n \geq n_0$. Montrons maintenant qu'elle converge vers $1/\ell$. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$|\frac{1}{\ell} - \frac{1}{u_n}| = \frac{|u_n - \ell|}{|\ell u_n|} < \frac{2}{\ell^2}|g(x_0) - g(x)|,$$

où l'inégalité provient du fait que, pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n > \ell/2$ d'où $1/u_n < 2/\ell$ et donc $1/\ell u_n < 2/\ell^2$. Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ arbitraire. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$, qu'on peut prendre $\geq n_0$, tel que pour tout $n > p_0$ on ait

$$|\ell - u_n| < \frac{\ell^2}{2}\varepsilon \qquad \text{et donc} \qquad |\frac{1}{\ell} - \frac{1}{u_n}| < \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite $(1/u_n)$, définie pour $n \geq n_0$, converge vers $1/\ell$.

(b) Supposons maintenant que l'une des limites soit infinie. Quitte à échanger les rôles de (u_n) et (v_n), on peut supposer que c'est ℓ. Supposons par exemple $\ell = +\infty$. (Le cas où $\ell = -\infty$ se traite de façon analogue et est laissé au lecteur comme exercice.)

(i) On suppose $\ell' \neq -\infty$. Fixons, une fois pour toutes, un réel $A_1 < \ell'$. Comme (v_n) tend vers ℓ', il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > p_0$ on ait $v_n > A_1$.

Soit maintenant A un réel arbitraire. Comme (u_n) tend vers $+\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, qu'on peut prendre $> p_0$, tel que pour tout $n > n_0$ on ait $u_n > A - A_1$. Alors, pour tout $n > n_0$ on a $u_n + v_n > A$. Ceci montre que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

(ii) Supposons par exemple que $\ell' \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et montrons qu'alors $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$.

Fixons, une fois pour toutes, $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r < \ell'$. Comme (v_n) tend vers ℓ', il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > p_0$ on ait $v_n > r$. Soit maintenant $A \in \mathbb{R}_+^*$ arbitraire. Comme (u_n) tend vers $+\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, qu'on peut prendre $> p_0$, tel que pour tout $n > n_0$ on ait $u_n > A/r > 0$ et $v_n > r > 0$. Alors, pour tout $n > n_0$ on a $u_n v_n > (A/r)v_n > (A/r)r = A$. Ceci montre que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

On montre de la même façon que si $\ell' \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$, alors la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

(iii) Supposons $\ell = +\infty$. (Le cas où $\ell = -\infty$ se traite de façon analogue). Prenant d'abord $A_1 = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n > 0$. Donc la suite $(1/u_n)$ est définie pour $n \geq n_0$. Montrons maintenant qu'elle converge vers 0. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > p_0$ on ait :

$$u_n > \frac{1}{\varepsilon} > 0 \qquad \text{et donc } 0 < \frac{1}{u_n} < \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite $(1/u_n)$, définie pour $n \geq n_0$, converge vers 0 « par valeurs supérieures », i.e. que les termes $1/u_n$ tendent vers 0 en restant > 0.

□

D'après la définition des limites de fonctions donnée en 2.6, le théorème suivant découle immédiatement du précédent. Donnons d'abord un point de terminologie, qui sera utile dans l'énoncé du théorème.

***Terminologie 2.10* (Voisinages de $+\infty$ ou $-\infty$).** — On dit qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est un *voisinage de* $+\infty$ (resp. de $-\infty$) s'il contient un intervalle $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$), pour un certain $A \in \mathbb{R}$.

***Théorème 2.11* (Opérations sur les limites de fonctions)**

Soient f, g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. On suppose que f et g admettent en a des limites respectives $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

(i) *La fonction $f + g$ tend en a vers $\ell + \ell'$ si $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Elle tend en a vers $+\infty$ si $\ell = +\infty$ et si $\ell' \neq -\infty$; de même, elle tend en a vers $-\infty$ si $\ell = -\infty$ et si $\ell' \neq +\infty$.*

(ii) *La fonction fg tend en a vers $\ell\ell'$ si $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Elle tend en a vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si l'une au moins des limites est infinie et si les deux limites sont de même signe (resp. de signe contraire).*

(iii) *Si $\ell \in \mathbb{R}^*$ (resp. si $\ell = \pm\infty$), il existe un voisinage V de a tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in V \cap D_f$, et la fonction $1/f$ tend en a vers $1/\ell$ (resp. vers 0).*

2.3. Limites et inégalités larges

(Q) ***Théorème 2.12* (Limites et inégalités larges).** — *Soient f, g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. On suppose que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in D = D_f \cap D_g$ et que f et g tendent respectivement vers des limites $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ quand x tend vers a en restant dans D. Alors $\ell \leq \ell'$.*

Démonstration. — Il n'y a rien à montrer si $\ell = -\infty$ ou $\ell' = +\infty$. Et si $\ell = +\infty$, on voit facilement que $g(x)$ tend vers $+\infty$, d'où $\ell' = +\infty$. De même, si $\ell' = -\infty$, on voit facilement que $f(x)$ tend vers $-\infty$, d'où $\ell = -\infty$. Reste à traiter le cas où $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.[1]

(Q) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D tendant vers a. (Une telle suite existe par hypothèse.) Soit $\varepsilon > 0$. Comme la limite en a de f (resp. g) est ℓ (resp. ℓ'), il existe p_0 et q_0 dans $\mathbb{N}$ tels que pour tout $n > p_0$ (resp. $n > q_0$) on ait $\ell - \varepsilon < f(u_n)$ et $g(u_n) < \ell' + \varepsilon$. Posant $n_0 = \max(p_0, q_0)$ et tenant compte de l'hypothèse $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in D$, on obtient :

$$\forall n > n_0, \qquad \ell - \varepsilon < f(u_n) \leq g(u_n) < \ell' + \varepsilon$$

d'où $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \ell - \ell' < 2\varepsilon,}$ et ceci entraîne que $\ell - \ell' \leq 0$, car si $\ell - \ell'$ était un réel $r > 0$ alors l'inégalité ci-dessus ne serait pas vraie pour $\varepsilon = r/2$. Ceci prouve que $\ell \leq \ell'$ et achève la démonstration du théorème. □

Remarque 2.13. — Attention, le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes, mais les transforme en inégalités larges. Par exemple, pour tout $x \neq 0$ on a $1 - x^2 < 1 + x^2$, mais $\lim_{x\to 0} 1 - x^2 = 1 = \lim_{x\to 0} 1 + x^2$.

2.4. Critères d'existence de limites

Avant d'énoncer le théorème des gendarmes pour les fonctions, introduisons la terminologie suivante, qui sera utile dans l'énoncé du théorème (et aussi dans les sections suivantes).

Terminologie 2.14. — Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

(i) On dit qu'un réel a est *adhérent* à D lorsque la condition 2.4 (0) est vérifiée. Ceci équivaut d'ailleurs à la condition suivante :

(2.4.0′) pour tout voisinage V de a, l'intersection $V \cap D$ est non vide.

(ii) Rappelant la notion de voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$) introduite en 2.10, on voit aussi que la condition 2.5 (0) équivaut à la condition :

(2.5.0′) pour tout voisinage V de $+\infty$ (resp. de $-\infty$), l'intersection $V \cap D$ est non vide.

Par abus de langage, nous dirons (attention, ce n'est pas une terminologie usuelle) que $+\infty$ (resp. $-\infty$) est *adhérent* à D si cette condition est satisfaite.

(Q) ***Théorème 2.15* (des gendarmes pour les suites et les fonctions)**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$.

(i) *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$), alors il en est de même de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(ii) *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors il en est de même de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Soient f, g, h trois fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x appartenant à $D = D_f \cap D_g \cap D_h$. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, adhérent à D.

(iii) *Si f tend en a vers $+\infty$ (resp. si h tend en a vers $-\infty$), il en est de même de g.*

(iv) *Si f et h tendent en a vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors il en est de même de g.*

[1] La question de cours inclut la démonstration dans le cas où $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

(Q) *Démonstration.* — [2] Démontrons le point (ii). (Le point (i) est plus facile et est laissé au lecteur.) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$ on ait $\ell - \varepsilon < u_n$ et $w_n < \ell + \varepsilon$. Pour tout $n > n_0$ on a donc :

$$\ell - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \ell + \varepsilon, \qquad \text{d'où} \qquad \ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon.$$

Ceci montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démontrons le point (iv). (Le point (iii) est plus facile et est laissé au lecteur.) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D qui tend vers a. (Une telle suite existe d'après l'hypothèse que a est adhérent à D.) Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$. D'autre part, comme f et h tendent en a vers ℓ, les suites $(f(x_n))$ et $(h(x_n))$ convergent vers ℓ. Donc, d'après (ii), la suite $(g(x_n))$ converge aussi vers ℓ. D'après la définition 2.4, ceci montre que g tend en a vers ℓ. □

2.5. Lien entre limites et continuité

Avant d'énoncer le théorème qui exprime la continuité en termes de limites, commençons par la remarque suivante.

Remarque 2.16. — (1) Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admette une limite ℓ en un point $a \in D_f$. Alors nécessairement $\boxed{\ell = f(a).}$ En effet, la suite constante $u_n = a$ est formée d'éléments de D_f et converge vers a, donc la suite $f(u_n)$, qui est constante de valeur $f(a)$, converge vers ℓ, d'où $\ell = f(a)$.

(2) Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $a \in D = D_f$. SI f est continue en a, ALORS f admet $f(a)$ comme limite en a.

En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D convergeant vers a. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en a, il existe $\delta > 0$ tel que $f(D \cap]a-\delta, a+\delta[) \subset]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$. Puis, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$ on ait $u_n \in D \cap]a-\delta, a+\delta[$, d'où $f(u_n) \in]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$. Ceci montre que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$. D'après la définition 2.4, ceci montre que f admet en a la limite $f(a)$.

On peut maintenant énoncer et démontrer le théorème qui montre que la définition de la continuité donnée au chap. 1 coïncide avec celle peut-être vue en Terminale.

(Q) ***Théorème 2.17* (Continuité et limite en un point a).** — *Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $D = D_f$ son domaine de définition, et soit $a \in D$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est continue en a au sens du chapitre* 1 (déf. 1.13).

(ii) *f admet $f(a)$ comme limite en a.*

(iii) *Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D convergeant vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

(Q) *Démonstration.* — L'équivalence de (ii) et (iii) est la définition même de limite (Déf. 2.4), et l'on a vu dans la remarque 2.16 (2) que (i) implique (ii). Il reste donc à montrer que si (iii) est vérifié, alors (i) l'est aussi. Pour cela on va montrer que si (i) est faux, alors (iii) est faux aussi. Il faut d'abord faire un peu de logique pour comprendre comment exprimer que (i) est faux.[3]

[2] La question de cours inclut l'énoncé du théorème plus la démonstration dans les cas (i) et (ii).

[3] La question de cours sera la *démonstration* que si (i) est faux alors (iii) l'est aussi.

(1) Fixons un réel $\varepsilon > 0$ et considérons l'assertion $P(\varepsilon)$ suivante : « il existe $\delta > 0$ tel que $f(D\cap]a-\delta, a+\delta[) \subset]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$ ». Alors, dire que $P(\varepsilon)$ est fausse signifie que :

$$\text{pour tout } \delta > 0 \text{ il existe } x \in D\cap]a-\delta, a+\delta[\text{ tel que } f(x) \notin]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[.$$

(2) Or, l'assertion (i) « f est continue en a » est : « pour tout $\varepsilon > 0$, $P(\varepsilon)$ est vraie ». Supposer que (i) est fausse signifie donc : « il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $P(\varepsilon_0)$ est fausse ».

Donc, mettant les choses bout-à-bout, on obtient que dire que (i) est fausse, i.e. que f *n'est pas continue* en a s'exprime ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{il existe } \varepsilon_0 > 0 \text{ tel que, } \textit{pour tout } \delta > 0, \text{ il existe } x \in D\cap]a-\delta, a+\delta[\\ \text{tel que } f(x) \notin]f(a)-\varepsilon_0, f(a)+\varepsilon_0[.\end{array}}$$

Mais alors, en prenant $\delta = 1/2^n$ pour n variant dans $\mathbb{N}$, on obtient un élément $u_n \in D$ tel que $|a-u_n| < 1/2^n$ mais $|f(a)-f(u_n)| > \varepsilon_0$. On obtient ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D qui converge vers a, mais telle que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(a)$. Ceci prouve que si (i) est fausse alors (iii) l'est aussi. Ceci montre donc que si (iii) est vérifiée, alors (i) l'est aussi. Ceci achève la démonstration du théorème 2.17. □

2.6. Limites à gauche ou à droite, prolongement par continuité

Définitions 2.18. — Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que son domaine de définition $D = D_f$ est *une réunion finie d'intervalles*.[4] Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ adhérent à D (cf. 2.14). Supposons que f admette en a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. On voit alors que huit cas sont possibles :

$a \in D$

(1) D contient un intervalle ouvert $]a-r, a+r[$ pour un certain $r > 0$.

(2) D contient un intervalle $]a-r, a]$ pour un certain $r > 0$ mais ne contient aucun intervalle $[a, a+r'[$ avec $r' > 0$.

(3) D contient un intervalle $[a, a+r[$ pour un certain $r > 0$ mais ne contient aucun intervalle $]a-r', a]$ avec $r' > 0$.

$a \in \mathbb{R} \setminus D$

(4) D contient un « intervalle ouvert épointé » $]a-r, a+r[\setminus\{a\} =]a-r, a[\cup]a, a+r[$ pour un certain $r > 0$.

(5) D contient un intervalle ouvert $]a-r, a[$ pour un certain $r > 0$ mais ne contient aucun intervalle ouvert $]a, a+r'[$ avec $r' > 0$.

(6) D contient un intervalle ouvert $]a, a+r[$ pour un certain $r > 0$ mais ne contient aucun intervalle ouvert $]a-r', a[$ avec $r' > 0$.

$a = +\infty$ ou $-\infty$

(7) $a = +\infty$ et D contient un intervalle $]A, +\infty[$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$.

(8) $a = -\infty$ et D contient un intervalle $]-\infty, A[$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$.

[4] Par exemple, $D = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, ou $D =]-2, 0[\cup[1, +\infty[$, etc.

Compte tenu du théorème 2.17 et de la terminologie introduite à la fin du paragraphe 1.13 (chap. 1), on voit que les cas (1), (2) et (3) correspondent aux cas où f est continue en a, resp. continue à gauche en a, resp. continue à droite en a. On introduit de plus la terminologie suivante :

Cas (4) : on dit que ℓ est la limite de f lorsque x tend vers a (sous-entendu : « en restant $\neq a$ ») et l'on note

$$\ell = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \ell = \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x).$$

Cas (5) : on dit que ℓ est la limite de f lorsque x tend vers a *par valeurs inférieures*, ou que ℓ est la *limite à gauche* de f en a, et l'on note

$$\ell = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \ell = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Cas (6) : on dit que ℓ est la limite de f lorsque x tend vers a *par valeurs supérieures*, ou que ℓ est la *limite à droite* de f en a, et l'on note

$$\ell = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \ell = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Plus généralement, même si f est définie sur un intervalle ouvert épointé $]a-r, a+r[\,\setminus\{a\}$ (ou même un intervalle ouvert $]a-r, a+r[$) pour un certain $r > 0$, il est utile d'introduire la définition suivante.

***Définition 2.19* (Limites à gauche et à droite).** — Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine de définition *contient* un intervalle ouvert $]a-r, a[$ (resp. $]a, a+r[$) pour un certain $r > 0$. On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en a (resp. ℓ' pour limite à droite en a) et l'on note

$$\ell = \lim_{x \to a^-} f(x) \qquad \text{resp.} \qquad \ell' = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

si pour toute suite (u_n) d'éléments de $]a-r, a[$ (resp. $]a, a+r[$) convergeant vers a, la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ (resp. ℓ'). Ces deux limites, si elles existent, ne sont pas nécessairement égales.

Exemples 2.20. — $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. D'autre part, si $E(x)$ désigne la fonction « partie entière » de x, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $\displaystyle\lim_{x \to n^-} = n - 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to n^+} = n$. Toutefois on a la proposition suivante.

Proposition 2.21. — *Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle ouvert épointé $]a-r, a+r[\,\setminus\{a\}$ pour un certain $r > 0$. Les deux conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(i) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x)$ *existe.*

(ii) $\lim_{x \to a^-} f(x)$ *et* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *existent et sont égales.*

Démonstration. — Il résulte des définitions que si (i) est vérifié alors (ii) l'est aussi. Réciproquement, supposons (ii) vérifié et notons ℓ cette limite commune. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]a-r, a+r[\,\setminus\{a\}$ convergeant vers a. Soit V un voisinage de ℓ. D'après l'hypothèse (ii), il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ (resp. $q_0 \in \mathbb{N}$) tel que pour tout $n \geq p_0$ tel que $u_n < a$ (resp. tout $n \geq q_0$ tel que $u_n > a$) on ait $u_n \in V$. Alors pour tout $n \geq n_0 = \max(p_0, q_0)$ on a $u_n \in V$. Ceci montre que $\ell = \displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x)$. □

Définitions 2.22 **(Prolongement par continuité et recollement)**
Soit $a \in \mathbb{R}$.

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine de définition D_f ne contient pas a mais contient un intervalle ouvert épointé $]a-r, a+r[\setminus\{a\}$ pour un certain $r > 0$. Si $\lim_{x \underset{\neq}{\to} a} f(x)$ existe et est un réel ℓ, alors la fonction g définie sur $D_f \cup \{a\}$ par : $g(x) = f(x)$ si $f(x) \neq a$ et $g(a) = \ell$ est continue, d'après le théorème 2.17. On dit alors que g est le *prolongement par continuité* de f au point a.

(2) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que, par exemple, $D_f \subset [a, +\infty[$ et f est continue à droite en a, et $D_g \subset]-\infty, a[$ et g possède une limite à gauche ℓ en a. Si $\ell = f(a)$, alors la fonction h définie sur $D_f \cup D_g$ par : $h(x) = f(x)$ si $x \in D_f$ et $h(x) = g(x)$ si $x \in D_g$ est continue en a d'après la proposition 2.21 combinée au théorème 2.17, car $\lim_{x\to a^+} h(x) = \ell$ égale $\lim_{x\to a^-} h(x)$ et cette limite égale $h(a)$. On dit alors que h est obtenue par prolongement par continuité (de g en une fonction $\widetilde{g}$ continue à droite en a) et *recollement* (de $\widetilde{g}$ et de f).

Exemples 2.23. — Les fonctions définies ci-dessous sont continues sur $\mathbb{R}$:

(1) $f(x) = x\sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

(2) $f(x) = x\sin(1/x)$ pour $x > 0$ et $f(x) = x$ pour $x \leq 0$.

(3) $f(x) = |x|$ pour $|x| \leq 1$ et $f(x) = x^2$ pour $|x| \geq 1$.

2.7. Composition de limites ou de fonctions continues

Définition 2.24 **(Composée de deux fonctions)**. — Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit D_f son domaine de définition. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une seconde fonction. *On suppose que le domaine de définition D_g de g contient $f(x)$, pour tout $x \in D_f$.*

Sous cette hypothèse, l'application composée $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ est définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$, pour tout $x \in D_f$. En d'autres termes, la « fonction » $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a encore D_f comme domaine de définition.

Théorème 2.25. — *Soient f, g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telles que $f(x) \in D_g$ pour tout $x \in D_f$.*

(i) *Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, adhérent à D_f. On suppose que :*

(1) *f tend vers une limite $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ quand x tend vers a « en restant dans D_f ».*[5]

(2) *g admet en b une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.*

Alors l'application composée $g \circ f$ tend vers la limite ℓ quand x tend vers a « en restant dans D_f ».

(ii) *Si f est continue en un point $a \in D_f$ et si g est continue au point $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.*

Démonstration. — (i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D_f tendant vers a. (Une telle suite existe puisque a est adhérent à D_f.) L'hypothèse (1) entraîne que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de D_g tendant vers b, et l'hypothèse (2) entraîne alors que $(g \circ f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ. Ceci montre que $g \circ f$ tend vers la limite ℓ quand x tend vers a en restant dans D_f.

(ii) résulte de (i) et de la caractérisation de la continuité en termes de limites (Th. 2.17). En effet, f admet en a la limite $b = f(a)$ et g admet en b la limite $\ell = g(b) = g \circ f(a)$, donc

[5] On insiste ici sur « en restant dans D_f » en vue de la remarque 2.26.

d'après le point (i), $g \circ f$ admet en a la limite $g \circ f(a)$, et ceci montre que $g \circ f$ est continue en a. — On peut aussi déduire directement le point (ii) de la définition de la continuité, voir 1.24 dans le chap. 1. □

Remarque 2.26. — Sous les hypothèses de 2.25 (i), on obtient en particulier que si f admet une limite à gauche (resp. à droite) b en a et si g admet une limite ℓ en b (quand x tend vers b « en restant dans D_g »), alors $g \circ f$ admet ℓ comme limite à gauche (resp. à droite) en a. On a des énoncés analogues pour la continuité. Par exemple :

(1) La fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue à droite en 0. La fonction $f : x \mapsto x^2 + x^4$ vérifie $f(\mathbb{R}) \subset D_g$ et $f(0) = 0$, et est continue en 0. La fonction $g \circ f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x^4}$ est continue en 0.

(2) La fonction $g : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est définie sur $[-1, 1]$ et continue à gauche en 1. La fonction $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - \sqrt{x}$ vérifie $f([0, 4]) \subset D_g$ et $f(0) = 1$, et est continue à droite en 0. La fonction $g \circ f : x \mapsto \sqrt{2\sqrt{x} - x}$ est continue à droite en 0.

2.8. Définition équivalente des limites via les voisinages

Théorème 2.27. — *Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $D = D_f$ son domaine de définition, soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$* adhérent *à D et soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f admet en a la limite ℓ, au sens de la définition* 2.6.

(ii) *Pour tout voisinage W de ℓ, il existe un voisinage V de a tel que $f(D \cap V) \subset W$.*

Démonstration. — La démonstration est analogue à celle du théorème 2.17. Ici, le sens « facile » est l'implication (ii) ⇒ (i). En effet, supposons (ii) vérifié et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D tendant vers a. Soit W un voisinage de ℓ de la forme $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ si $\ell \in \mathbb{R}$, et de la forme $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$) si $\ell = +\infty$ (resp. $-\infty$). D'après la condition (ii), il existe un voisinage V de a tel que $f(D \cap V) \subset W$, et on peut prendre V de la forme $]a - \delta, a + \delta[$ si $a \in \mathbb{R}$, et de la forme $]A', +\infty[$ (resp. $]-\infty, A'[$) si $a = +\infty$ (resp. $-\infty$). Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers a, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$ on ait $u_n \in D \cap V$, d'où $f(u_n) \in W$. Ceci montre que la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ, et donc (i) est vérifié.

Supposons maintenant que (ii) ne soit pas vérifié. Alors il existe un intervalle $I_0 =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ si $\ell \in \mathbb{R}$, ou bien $I_0 =]A, +\infty[$ (resp. $I_0 =]-\infty, A[$) si $\ell = +\infty$ (resp. $-\infty$) tel que tout voisinage V de a contienne au moins un élément x de D tel que $f(x) \notin I_0$. Si $a \in \mathbb{R}$, en considérant des voisinages V_n de la forme $]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$ on construit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de D qui tend vers a mais telle que la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers ℓ. Et si $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) on obtient une suite ayant les mêmes propriétés en considérant les voisinages $]n, +\infty[$ (resp. $]-\infty, -n[$). Ceci achève la démonstration du théorème. □

Il n'est pas nécessaire d'apprendre la démonstration du théorème ci-dessus, mais il faut connaître la définition des limites en termes de voisinages, qui pourra être posée comme *question de cours* :

(Q) ***Définition 2.28* (des limites via les voisinages)**. — Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $D = D_f$ son domaine de définition, et soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *adhérent* à D. Alors f tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ quand x tend vers a (en restant dans D) si et seulement si : pour tout voisinage W de ℓ, il existe un voisinage V de a tel que $f(D \cap V) \subset W$.

2.9. Suites de Cauchy

Définition 2.29. — [6] On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite *de Cauchy* si « $|u_p - u_q|$ devient arbitrairement petit quand p et q sont tous les deux suffisamment

[6] Ce paragraphe sera traité en cours ultérieurement, pour construire la fonction exponentielle.

grands », c.-à-d. si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que si } p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0 \text{ alors } |u_p - u_q| < \varepsilon.}$$

Remarque 2.30. — Il est facile de voir que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors elle est de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq n_0$ on ait $|u_p - \ell| < \varepsilon/2$, alors pour $p, q \geq n_0$ on a :

$$|u_p - u_q| = |u_p - \ell + \ell u_q| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| < \varepsilon.$$

Exemple 2.31. — Fixons un réel x. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

est de Cauchy. C'est clair si $x = 0$, donc on peut supposer $x \neq 0$. Soit alors N la partie entière de $|x|$, alors $a = \dfrac{|x|}{N+1}$ appartient à $]0,1[$ et donc $\lim_{p\to+\infty} a^p = 0$ et la suite croissante de terme général

$$1 + a + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

converge vers sa borne supérieure $\dfrac{1}{1-a}$. Pour tout entier $i \geq 1$, on a $\dfrac{|x|}{N+i} \leq a$ et donc, pour tout entier $k \geq 1$ on a :

$$\frac{|x^{N+k}|}{(N+k)!} = \frac{|x|^N}{N!}\,\frac{|x|}{N+1}\cdots\frac{|x|}{N+k} \leq \frac{|x^N|}{N!}\,a^k.$$

Donc, si $q > p \geq 1$, on a :

$$|u_{N+q} - u_{N+p}| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \frac{|x^{N+k}|}{(N+k)!} \leq \frac{|x|^N}{N!}\,a^{p+1}(1 + a + \cdots + a^{q-p-1}) \leq \frac{|x|^N}{N!}\,\frac{a^{p+1}}{1-a}.$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{p\to+\infty} a^p = 0$, il existe un entier p_0 tel que pour tout $p \geq p_0$ on ait $|x|^N a^{p+1} < N!(1-a)\varepsilon$. Alors, pour tous $q \geq p \geq p_0$ on a $|u_{N+q} - u_{N+p}| < \varepsilon$ et ceci montre que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Théorème 2.32. — *Toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est de Cauchy est convergente.*

Démonstration. — *1ère étape*. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Prenant $\varepsilon_1 = 1$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq n_1$ on ait $|u_p - u_q| < 1$. Donc, pour tout $p \geq n_1$ on a

$$|u_p| = |u_p - u_{n_1} + u_{n_1}| \leq 1 + |u_{n_1}|.$$

Donc, posant $M = \max(|u_0|, \ldots, |u_{n_1-1}|, 1 + |u_{n_1}|)$, on a $|u_p| \leq M$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2ème étape. Comme la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A_n = \{u_p \mid p \geq n\}$ est minoré et majoré, donc admet une borne inférieure a_n et une borne supérieure b_n et l'on a

$$(*) \qquad a_n \leq u_n \leq b_n.$$

De plus, comme $A_{n+1} \subset A_n$, on a $b_{n+1} \leq b_n$ et $a_{n+1} \geq a_n$, i.e. la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3ème étape. Montrons que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Il s'agit de montrer que $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq n_0$ on ait $|u_p - u_q| < \varepsilon$.

Fixant provisoirement $q \geq n_0$, on a donc $u_p < u_q + \varepsilon$ pour tout $p \geq n_0$, d'où $b_{n_0} \leq u_q + \varepsilon$. Donc, pour tout $q \geq n_0$, on a $u_q \geq b_{n_0} - \varepsilon$ et donc $a_{n_0} \geq b_{n_0} - \varepsilon$, d'où : $b_{n_0} - a_{n_0} \leq \varepsilon$. Et comme la suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et à termes ≥ 0, on obtient :

$$\forall n \geq n_0, \qquad 0 \leq b_n - a_n \leq b_{n_0} - a_{n_0} \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Donc, d'après le théorème des suites adjacentes, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ.

4ème étape : conclusion. D'après $(*)$ et le théorème des gendarmes, on conclut que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. □

Définition 2.33 **(Fonction exponentielle)**. — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\exp(x)$ la limite de la suite de Cauchy $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie en 2.31. On étudiera en détail cette fonction dans un chapitre ultérieur.