# CHAPITRE 5

# DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET FORMULES DE TAYLOR

## 5.1. Développements limités et formule de Taylor-Young

***Définition et proposition 5.1.*** — *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I$, soit $a \in I$ et soit $n \in \mathbb{N}$.*

(i) *On dit que $f$ admet en $a$ un* développement limité à l'ordre $n$ *(en abrégé* $\mathrm{DL}_n$*) s'il existe des réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et nulle en $0$, tels que, pour tout $x \in I$ on ait :*

$$(*_n) \qquad f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x-a).$$

*Ce développement est alors* unique*, donc on pourra parler* du $\mathrm{DL}_n$ *de $f$ en $a$.*

(ii) *Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on a alors*

$$f(x) = c_0 + \cdots + c_k(x-a)^k + (x-a)^k \Big( \underbrace{c_{k+1}(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^{n-k} + (x-a)^{n-k}\varepsilon(x-a)}_{=\varphi_k(x-a)} \Big)$$

*et la fonction $\varphi_k$ est continue et nulle en $0$. Donc, pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $f$ admet en $a$ un* $\mathrm{DL}_k$ *qui s'obtient en tronquant le* $\mathrm{DL}_n$ *à l'ordre $k$.*

*Démonstration de l'unicité.* — D'abord, en faisant $x = a$ on obtient $c_0 = f(a)$. Notons aussi que $(*_n)$ entraîne que $\lim_{x \to a} f(x) = c_0 = f(a)$. Ceci montre, au passage, que si $f$ admet en $a$ un $\mathrm{DL}_n$ alors $f$ est continue en $a$. Puis, supposant $n \geq 1$, on a pour $x \neq a$ l'égalité :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c_1 + c_2(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-1}\varepsilon(x-a).$$

Comme la limite en $a$ du terme de droite est $c_1$, ceci montre que si $f$ admet en $a$ un $\mathrm{DL}_n$ avec $n \geq 1$ alors $f$ est dérivable en $a$ et $c_1 = f'(a)$.

Puis, supposant $n \geq 2$, on a pour $x \neq a$ l'égalité :

$$\frac{f(x) - c_0 - c_1(x-a)}{(x-a)^2} = c_2 + c_3(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^{n-2} + (x-a)^{n-2}\varepsilon(x-a)$$

et comme la limite en $a$ du terme de droite est $c_2$, ceci montre que $c_2$ est déterminé par l'égalité

$$(\dagger_2) \qquad c_2 = \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x) - c_0 - c_1(x-a)}{(x-a)^2}.$$

Puis, pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, supposons que $c_0, c_1, \dots, c_k$ soient déterminés par des égalités analogues à la précédente. Alors pour $x \neq a$ on a l'égalité

$$\frac{f(x) - \sum_{i=0}^{k} c_i(x-a)^i}{(x-a)^{k+1}} = c_{k+1} + c_{k+2}(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^{n-k-1} + (x-a)^{n-k-1}\varepsilon(x-a)$$

et comme la limite en $a$ du terme de droite est $c_{k+1}$, alors $c_{k+1}$ est déterminé par l'égalité

$$(\dagger_{k+1}) \qquad c_{k+1} = \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x) - \sum_{i=0}^{k} c_i(x-a)^i}{(x-a)^{k+1}}.$$

Ceci prouve, par récurrence sur $k$, l'unicité de $c_0, \dots, c_n$. $\square$

***Remarques 5.2***. — (1) En posant $h = x - a$, la condition $(*_n)$ se récrit :

$$(*_n) \qquad f(a+h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n + h^n \varepsilon(h),$$

avec $\varepsilon$ continue et nulle en 0.

(2) Il est d'usage de désigner par $\varepsilon(h)$ une quelconque fonction continue et nulle en 0. Par exemple, revenant au point (ii) de 5.1 on écrira simplement :

$$f(x) = c_0 + \cdots + c_k(x-a)^k + (x-a)^k \varepsilon(x-a),$$

bien que la fonction $\varepsilon$ ci-dessus, notée $\varphi_k(x-a)$ dans 5.1 (ii), ne soit pas la même que la fonction $\varepsilon$ de $(*_n)$.

(3) Les développements limités servent à calculer des limites au point $a$ considéré. Mais attention, l'écriture $(*_n)$ ne donne *aucun* renseignement sur le comportement de $f$ en un point de $I$ autre que $a$ : elle dit simplement que, pour un choix approprié de $c_0, \dots, c_n$ (cf. la preuve de 5.1) la fonction $\varepsilon$ définie pour $h \neq 0$ par :

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{h^n}\big(f(a+h) - c_0 - c_1 h - \cdots - c_n h^n\big)$$

tend vers 0 en 0. Et pour $h_0 \neq 0$, on ne sait rien sur le comportement de $\varepsilon$ (resp. $f$) au point $h_0$ (resp. $a + h_0$).

***Remarque 5.3***. — Si $f$ est continue en $a$, alors la fonction $\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a)$ est continue et nulle en 0 et l'on a le $\mathrm{DL}_0$ : $f(a+h) = f(a) + \varepsilon(h)$. De même, si $f$ est dérivable en $a$, alors la fonction $\varepsilon(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$ est continue et nulle en 0 et l'on a le $\mathrm{DL}_1$ : $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$. D'autre part, on a vu dans la démonstration de 5.1 que les réciproques sont vraies. On a donc :

$$\boxed{f \text{ admet un } \mathrm{DL}_0 \text{ en } a \Leftrightarrow f \text{ est continue en } a}$$

$$\boxed{f \text{ admet un } \mathrm{DL}_1 \text{ en } a \Leftrightarrow f \text{ est dérivable en } a}$$

On pourrait penser que ces équivalences se généralisent pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais attention, ce n'est pas le cas ! On verra plus bas que SI $f$ est $n$ fois dérivable en $a$ ALORS elle admet un $\mathrm{DL}_n$ en $a$ : ceci est le théorème de Taylor-Young. Mais la réciproque est fausse (voir l'exemple qui suit).

***Exemple 5.4***. — Soit $n$ un entier $\geq 2$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(t) = t^{n+1}\sin(1/t^n)$ pour $t \neq 0$. Comme la fonction $\varepsilon$ définie par $\varepsilon(t) = t\sin(1/t^n)$ pour $t \neq 0$ et $\varepsilon(0) = 0$ est continue et nulle en 0, alors $f$ admet en 0 le $\mathrm{DL}_n$ : $f = t^n\varepsilon(t)$. Donc $f'(0) = 0$. Mais $f$ n'est pas deux fois dérivable en 0 car pour $t \neq 0$ on a $f'(t) = (n+1)t^n\sin(1/t^n) - n\cos(1/t^n)$ et donc le rapport

$$\frac{f'(t) - f'(0)}{t} = (n+1)t^{n-1}\sin(1/t^n) - n\frac{\cos(1/t^n)}{t}$$

n'admet pas de limite quand $t$ tend vers 0.

***Définition 5.5* (Notation $o(f)$)**. — Soit $a \in \mathbb{R}$ et soient $f, g, p$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies sur un intervalle $I$ contenant $a$.

(i) On dit que $g$ est « petit o » de $p$ au voisinage de $a$ et l'on écrit $g = o(p)$ « en $a$ » (1) s'il existe une fonction $\varepsilon$, continue et nulle en 0, telle que $g(x) = p(x)\varepsilon(x-a)$ pour $x \in I$.

(ii) Avec cette nouvelle notation, la définition 5.1 se récrit comme suit : $f$ admet en $a$ un $\mathrm{DL}_n$ s'il existe des réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ tels qu'on ait au voisinage de 0 :

$$(*_n) \qquad f(a+h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n + o(h^n).$$

(1) La plupart du temps, « en $a$ » est sous-entendu ; si on veut le préciser on peut aussi écrire (selon les auteurs) $g =_a o(p)$ ou $g = o_a(p)$.

(iii) Afin d'être complet, on donne aussi la définition suivante (on ne l'utilisera pas dans la suite). On dit que $g$ est « grand O » de $f$ au voisinage de $a$ et l'on écrit $g = O(f)$ « en $a$ » s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ et un voisinage $V$ de $a$ tels que $|g(x)| \leq C\,|f(x)|$ pour tout $x \in V \cap I$.

Le théorème qui va suivre nous permettra de déterminer le $\mathrm{DL}_{n+1}$ en $a$ d'une fonction dérivable $f$ (telle que $\ln(1+x)$ ou $\operatorname{Arctan}(x)$) à partir d'un $\mathrm{DL}_n$ en $a$ connu pour $f'$.

***Définition et remarque 5.6.*** — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle non vide $I$ de $\mathbb{R}$.

(i) S'il existe une fonction dérivable $F : I \to \mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$, on dit que $F$ est une *primitive* de $f$ sur $I$. Si $G$ est une autre primitive de $f$ sur $I$ alors la fonction $G - F$ a une dérivée nulle sur $I$ donc est une constante $c$, d'où $G(x) = c + F(x)$ pour tout $x \in I$. On retient ceci en disant que : « une primitive de $f$ sur $I$, si elle existe, est unique à une constante près ».

(ii) Si $f$ est dérivable sur $I$, alors c'est une primitive de $f'$.

(iii) Fixons un élément $a$ de $I$ et un réel arbitraire $c$. Si $f$ est *continue* sur $I$, vous verrez en 1M002 que l'application

$$F : I \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto F(x) = c + \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de $f$ sur $I$, vérifiant $f(a) = c$. Donc, pour les fonctions continues, on peut construire des primitives par « intégration ». C'est la raison pour laquelle le théorème qui suit s'appelle « intégration d'un DL » au lieu de « primitivation d'un DL ».

(Q) ***Théorème 5.7*** **(Intégration d'un** DL**).** — *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et soient $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si la fonction dérivée $f'$ admet en $a$ le* $\mathrm{DL}_n$ *suivant :*

$$f'(a+h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n + h^n \varepsilon(h)$$

*alors $f$ admet en $a$ le* $\mathrm{DL}_{n+1}$ *suivant :*

$$f(a+h) = f(a) + c_0 h + c_1 \frac{h^2}{2} + \cdots + c_n \frac{h^{n+1}}{n+1} + o(h^{n+1}).$$

*Démonstration.* — Posons $g(h) = f(a+h) - \left(f(a) + c_0 h + \cdots + c_n \dfrac{h^{n+1}}{n+1}\right)$. Alors $g(0) = 0$ et $g$ est dérivable sur un intervalle $J$ contenant $0$ et pour tout $t \in J$ on a :

$$g'(t) = f'(a+t) - (c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n) = t^n \varepsilon(t).$$

Fixons $h \neq 0$ dans $J$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c$ strictement compris entre $0$ et $h$, donc de la forme $c = \theta h$ pour un certain $\theta \in ]0,1[$, tel que

$$g(h) = g(h) - g(0) = hg'(\theta h) = h^{n+1}\theta^n \varepsilon(\theta h).$$

On a $|\theta^n \varepsilon(\theta h)| \leq |\varepsilon(\theta h)|$, et comme $|\theta h| \leq |h|$ alors $\theta h$ et $\varepsilon(\theta h)$ tendent vers 0 quand $h$ tend vers 0. Ceci montre que $g(h) =_0 o(h^{n+1})$. Le théorème est donc démontré. □

On déduit du théorème précédent le théorème suivant.

(Q) ***Théorème 5.8*** **(de Taylor-Young).** — *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $n-1$ fois dérivable sur un intervalle $I$. Soit $a \in I$. Si $f^{(n)}(a)$ existe, alors $f$ admet en $a$ le* $\mathrm{DL}_n$ *suivant :*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n).$$

*Démonstration.* — Donnons deux démonstrations. La 1ère est plus longue à écrire mais montre que l'idée est simple. Soit $J$ l'intervalle $I - a = \{h = x - a \mid x \in I\}$, il contient 0.

*Première démonstration.* Par hypothèse, pour $h \in J$ on a le $\mathrm{DL}_1$ :

$$f^{(n-1)}(a+h) = f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)h + o(h)$$

et en l'intégrant on obtient le $\mathrm{DL}_2$ puis le $\mathrm{DL}_3$ suivants :

$$f^{(n-2)}(a+h) = f^{(n-2)}(a) + f^{(n-1)}(a)h + f^{(n)}(a)\frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

$$f^{(n-3)}(a+h) = f^{(n-3)}(a) + f^{(n-2)}(a)h + f^{(n-1)}(a)\frac{h^2}{2} + f^{(n)}(a)\frac{h^3}{3!} + o(h^3).$$

En continuant ainsi, on arrive bien au $\mathrm{DL}_n$ annoncé. De façon détaillée, supposons avoir obtenu, pour un entier positif $k < n$, le $\mathrm{DL}_k$ suivant :

$$(\dagger_k) \qquad f^{(n-k)}(a+h) = \sum_{i=0}^{k} f^{(n-k+i)}(a)\frac{h^i}{i!} + o(h^k),$$

alors en l'intégrant on obtient le $\mathrm{DL}_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} f^{(n-k-1)}(a+h) = f^{(n-k-1)}(a) + \sum_{i=0}^{k} f^{(n-k-1+i+1)}(a)\frac{h^{i+1}}{(i+1)!} + o(h^{k+1}) \\ = \sum_{j=0}^{k+1} f^{(n-k-1+j)}(a)\frac{h^j}{j!} + o(h^{k+1}) \end{aligned}$$

ce qui montre que la formule $(\dagger_{k+1})$ est également vraie. Par récurrence sur $k$ on obtient ainsi la formule $(\dagger_n)$, qui était la formule à démontrer.

*Deuxième démonstration.* On procède par récurrence sur $n$. Pour $n = 1$, on a déjà vu que si $f$ est dérivable en $a$, elle admet un $\mathrm{DL}_1$ en $a$. On peut donc supposer $n \geq 2$ et le théorème démontré pour $n - 1$ et pour toute fonction $g$ qui est $n - 1$ fois dérivable en $a$. Appliquant cette hypothèse de récurrence à $g = f'$, on obtient le $\mathrm{DL}_{n-1}$ :

$$f'(a+h) = f'(a) + f''(a)h + f^{(3)}(a)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + o(h^{n-1})$$

et en l'intégrant on obtient le $\mathrm{DL}_n$ :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!} + o(h^n)$$

ce qui prouve le théorème. □

## 5.2. Développements limités de certaines fonctions usuelles

***Lemme 5.9.*** — *Si $f$ admet en 0 un $\mathrm{DL}_n$ :*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

*et si $f$ est une fonction* paire *(resp.* impaire*) alors $c_k = 0$ pour $k$ impair (resp. pair).*

*Démonstration.* — Remplaçant $x$ par $-x$, on a

$$f(-x) = c_0 - c_1 x + \cdots + (-1)^n c_n x^n + o(x^n).$$

Alors le résultat découle de l'égalité $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) et de l'unicité du $\mathrm{DL}_n$. □

***Corollaire 5.9.1***. — *Soit $f$ une fonction de classe $C^\infty$ sur un intervalle ouvert $]-r,r[$, avec $r>0$.*

(i) *Si $f$ est paire alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f$ admet en $0$ les* $\mathrm{DL}_{2n}$ *et* $\mathrm{DL}_{2n+1}$ *suivants :*

$$(\dagger_0)\qquad \begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_2x^2 + \cdots + c_{2n}x^{2n} + o(x^{2n})\\ &= c_0 + c_2x^2 + \cdots + c_{2n}x^{2n} + o(x^{2n+1}).\end{aligned}$$

(ii) *Si $f$ est impaire alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f$ admet en $0$ les* $\mathrm{DL}_{2n+1}$ *et* $\mathrm{DL}_{2n+2}$ *suivants :*

$$(\dagger_1)\qquad \begin{aligned} f(x) &= c_1x + c_3x^3 + \cdots + c_{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})\\ &= c_1x + c_3x^3 + \cdots + c_{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}).\end{aligned}$$

*Démonstration*. — (i) Supposons $f$ paire. D'après le lemme précédent, le $\mathrm{DL}_{2n}$ de $f$ en $0$ est de la forme donnée par la première ligne de $(\dagger_0)$, i.e. tous les coefficients $c_k$ avec $k$ impair sont nuls. Mais ceci vaut aussi pour le coefficient $c_{2n+1}$ puisque, $f$ étant $C^\infty$ elle admet aussi un $\mathrm{DL}_{2n+1}$, et par parité $c_{2n+1}=0$, d'où la seconde ligne de $(\dagger_0)$. La démonstration de (ii) est analogue. □

(Q) [2] Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a en $0$ les $\mathrm{DL}_n$ suivants :

$$(5.2.1)\qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(5.2.2)\qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Le premier résulte de l'égalité $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ et du fait que la fonction $x\mapsto x/(1-x)$ est continue et nulle en $0$. Le second s'obtient en changeant $x$ en $-x$.

Alors, changeant $x$ en $x^2$ et tenant compte de 5.9.1, on obtient les DL en $0$ suivants :

$$(5.2.3)\qquad \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

$$(5.2.4)\qquad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

Comme les fonctions $-\ln(1-x)$, $\ln(1+x)$, $\mathrm{Argth}(x)$ et $\mathrm{Arctan}(x)$ sont des primitives des fonctions précédentes sur un intervalle contenant $0$ (par exemple l'intervalle $]-1,1[$), on en déduit les DL en $0$ suivants :

$$(5.2.5)\qquad -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

$$(5.2.6)\qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

$$(5.2.7)\qquad \mathrm{Argth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

$$(5.2.8)\qquad \mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

D'autre part, en utilisant le théorème de Taylor-Young on obtient les DL en $0$ suivants :

$$(5.2.9)\qquad \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

[2] Il faut connaître tous les DL donnés dans cette section, ou en tout cas savoir les retrouver.

puisque $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ pour tout $k$.

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \tag{5.2.10}$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \tag{5.2.11}$$

puisque, d'une part, $\operatorname{ch}^{(2k)}(0) = \operatorname{ch}(0) = 1$ et $\operatorname{ch}^{(2k+1)}(0) = \operatorname{sh}(0) = 0$, et, d'autre part, $\operatorname{sh}^{(2k)}(0) = \operatorname{sh}(0) = 0$ et $\operatorname{sh}^{(2k+1)}(0) = \operatorname{ch}(0) = 1$.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \tag{5.2.12}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \tag{5.2.13}$$

puisque, d'une part, $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$ et $\cos^{(2k+1)}(0) = (-1)^{k+1}\sin(0) = 0$, et, d'autre part, $\sin^{(2k)}(0) = (-1)^k \sin(0) = 0$ et $\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$.

***Notation 5.10***. — Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\binom{x}{p}$ le polynôme $\dfrac{x(x-1)\cdots(x-p+1)}{p!}$. [3]

***Proposition 5.11***. — *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est $n$ fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée $n$-ième est la fonction $x \mapsto \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} = n!\binom{\alpha}{n}x^{\alpha-n}$.*

(ii) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a en 0 le $\mathrm{DL}_n$ suivant :*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n). \tag{5.2.14}$$

*Démonstration*. — Montrons (i) par récurrence sur $n$. C'est vrai pour $n = 1$ car on vu au chap. 3 que $p_\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. On voit alors que $p'_\alpha$ est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $p''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. Par récurrence sur $k$, on obtient ainsi que

$$p_\alpha^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Notant $f(x) = (1+x)^\alpha = p_\alpha(1+x)$, on montre par récurrence sur $k$ que $f^{(k)}(x) = p_\alpha^{(k)}(1+x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in ]-1, +\infty[$, d'où $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{p_\alpha^{(k)}(1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de Taylor-Young on obtient donc le $\mathrm{DL}_n$ en 0 suivant :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n).$$

□

Pour $\alpha = \dfrac{-1}{2}$ on a $\dbinom{-1/2}{p} = \dfrac{1}{p!}\dfrac{-1}{2}\dfrac{-3}{2}\cdots\dfrac{1-2p}{2} = (-1)^p\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-1)}{2^p p!}$, d'où le $\mathrm{DL}_n$ en 0 suivant :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2^2 2!}x^2 - \cdots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n). \tag{5.2.15}$$

---

[3] La valeur prise par ce polynôme en un entier $n \in \mathbb{N}$ est le coefficient binomial $\binom{n}{p} = C_n^p$ (qui vaut 0 si $0 \le n < p$).

Changeant $x$ en $x^2$ ou $-x^2$ et tenant compte du corollaire 5.9.1, on obtient les DL en 0 suivants :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2^2 2!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n} + o(x^{2n+1}). \tag{5.2.16}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2^2 2!}x^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n} + o(x^{2n+1}). \tag{5.2.17}$$

Puis, comme Argsh$(x)$ et Arcsin$(x)$ sont des primitives des fonctions précédentes sur un intervalle contenant 0 (par exemple l'intervalle $]-1,1[$), on en déduit les DL en 0 suivants :

$$\operatorname{Argsh}(x) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}). \tag{5.2.18}$$

$$\operatorname{Arcsin}(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}). \tag{5.2.19}$$

## 5.3. Opérations algébriques sur les développements limités

Afin d'énoncer commodément les résultats sur la somme, le produit, le quotient ou la composition de deux développements limités, il est utile d'introduire quelques notions sur les polynômes.

***Définitions 5.12.*** — Si $n$ est un entier $\geq 0$, un *polynôme de degré* $\leq n$ est une expression de la forme $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels fixés.

(1) Le coefficient $a_0$ s'appelle le *terme constant* de $P$. Il est égal à $P(0)$.

(2) On dit que $P$ est de degré $n$ et l'on note $\deg(P) = n$ si $a_n \neq 0$. [(4)] Ainsi, un polynôme de degré 0 est un constante *non nulle* $a_0 \in \mathbb{R}^*$. Il est commode de dire que le polynôme nul 0 est de degré $-\infty$.

(3) Si $P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ est non nul, on définit sa *valuation* val$(P)$ comme étant le plus petit entier $k \geq 0$ tel que $a_k \neq 0$. On a alors val$(P) \leq \deg(P)$. Par exemple, val$(2 + x + x^3) = 0$ et val$(x^2 + x^5) = 2$. Enfin, il est commode de poser val$(0) = +\infty$.

(4) Fixant $d \in \mathbb{N}$, on définit $T^{\leq d}(P)$, *le tronqué de $P$ en degrés* $\leq d$, en ne gardant dans $P$ que les monômes de degré $\leq d$. Donc si $P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ et si $d \leq n$ alors $T^{\leq d}(P) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$. (Et bien sûr $T^{\leq d}(P) = P$ si $d \geq n$.)

Rappelons aussi que le produit de deux polynômes $P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ et $Q = b_0 + b_1 x + \cdots + b_q x^q$ est donné par la formule :

$$PQ = \sum_{n=0}^{p+q} c_n x^n \qquad \text{où} \quad c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j. \tag{$*$}$$

Par exemple, $c_0 = a_0 + b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$, et $c_{p+q} = a_p b_q$, $c_{p+q-1} = a_{p-1} b_q + a_p b_{q-1}$, etc. La formule $(*)$ s'obtient en écrivant :

$$PQ = \Big(\sum_{i=0}^{p} a_i x^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{q} b_j x^j\Big) = \sum_{i,j} a_i b_j x^{i+j} = \sum_{n=0}^{p+q} \big(\sum_{i+j=n} a_i b_j\big) x^n.$$

[(4)] Dans ce cas, on dit que $a_n$ est le *coefficient dominant* de $P$, et l'on dit que $P$ est un polynôme *unitaire* si son coefficient dominant est égal à 1.

***Théorème 5.13* (Division suivant les puissances croissantes)**
*Soit $B = b_0 + b_1x + \cdots + b_dx^d$ un polynôme tel que $b_0 \neq 0$. Alors, pour tout polynôme $A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique poynôme $Q_n$ de degré $\leq n$ tel que le polynôme $A - BQ_n$ soit de valuation $\geq n+1$. On dit que $Q_n$ est le* quotient *de la division de $A$ par $B$ « suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre $n$ ».* [5]

*Démonstration.* — La condition équivaut à ce que $\dfrac{A - BQ_n}{b_0} = \dfrac{A}{b_0} - \dfrac{B}{b_0}Q_n$ soit de valuation $\geq n+1$, donc en remplaçant $B$ par $\dfrac{B}{b_0}$ on se ramène au cas où $b_0 = 1$.

Soit $a_0$ le terme constant de $A$. Alors $A - Ba_0 = A_1$ est sans terme constant, i.e. de valuation $\geq 1$. Notons $\alpha_1$ le coefficient de $x$ dans $A_1$ et posons $A_2 = A_1 - Ba_1x = A - B(a_0 + \alpha_1x)$, alors $A_2$ est de valuation $\geq 2$. Et l'on continue ainsi : notons $\alpha_2$ le coefficient de $x$ dans $A_2$ et posons $A_3 = A_2 - B\alpha_2x^2 = A - B(a_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2)$, alors $A_3$ est de valuation $\geq 3$, etc. Ceci prouve l'existence (et fournit un algorithme de construction) d'un polynôme $Q_n$ de degré $\leq n$ tel que $A - BQ_n$ soit de valuation $\geq n+1$. (Voir l'exemple traité ci-dessous.)

Montrons l'unicité. Soit $P_n$ un autre polynôme de degré $\leq n$ tel que $A - BP_n$ soit de valuation $\geq n+1$. Alors $B(P_n - Q_n) = A - BQ_n - (A - BP_n)$ est aussi de valuation $\geq n+1$. Si $P_n - Q_n$ était non nul, il serait de valuation $k \leq \deg(P_n - Q_n) \leq n$ et, puisque $b_0 = 1$ alors $B(P_n - Q_n)$ serait aussi de valuation $k \leq n$, contredisant le fait qu'il est de valuation $\geq n+1$. Cette contradiction montre que $P_n - Q_n = 0$, i.e. $P_n = Q_n$. Le théorème est démontré. □

Illustrons l'algorithme par l'exemple suivant, pour $A = x - x^3/6 + x^5/5! - x^7/7!$ et $B = 1 - x^2/2 + x^4/4! - x^6/6!$ et $n = 7$ :

$$
\begin{array}{r|l}
x - x^3/6 + x^5/5! - x^7/7! \qquad\qquad\qquad\qquad & 1 - x^2/2 + x^4/4! - x^6/6! \\ \cline{2-2}
-x + x^3/2 - x^5/4! + x^7/6! \qquad\qquad\qquad\qquad & x + x^3/3 + 2x^5/15 + 17x^7/315 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
x^3/3 - x^5/30 + x^7/5!\cdot 7 \qquad\qquad\qquad & \\
-\,x^3/3 + x^5/6 \;-\; x^7/72 \;+\; x^9/3\cdot 6! \qquad\qquad & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
2x^5/15 - 4x^7/315 + x^9/3\cdot 6! \qquad\quad & \\
-\,2x^5/15 \;+\; x^7/15 \;-\; x^9/180 + x^{11}/5400 \quad & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
17x^7/315 - 11x^9/3\cdot 6! + x^{11}/5400 & \\
-\,17x^7/315 + 17x^9/630 \;-\; \cdots \qquad & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{array}
$$

On obtient ainsi que $Q_7 = x + x^3/3 + 2x^5/15 + 17x^7/315$ est l'unique polynôme de degré $\leq 7$ tel que $A - BQ_7$ soit de valuation $\geq 8$ (il est même de valuation $\geq 9$, mais peu importe). D'après le théorème qui suit, ceci donne le $\mathrm{DL}_7$ de tan en 0 :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7).$$

(Q) ***Théorème 5.14***. — *Soient $f(a+h) = A(h) + o(h^n)$ et $g(a+h) = B(h) + o(h^n)$ deux $\mathrm{DL}_n$ en un point $a$, où $A, B$ sont deux polynômes de degré $\leq n$. Alors on a les $\mathrm{DL}_n$ en $a$ suivants :*

(1) $\boxed{(f+g)(a+h) = (A+B)(h) + o(h^n).}$

(2) $\boxed{(fg)(a+h) = T^{\leq n}(AB)(h) + o(h^n).}$

---

[5] Et le polynôme $R_n = A - BQ_n$ est appelé le *reste* de cette division.

(3) *Si* $g(a) = B(0) \neq 0$ *alors* $\boxed{\dfrac{f}{g}(a+h) = Q_n(h) + o(h^n)}$ *où* $Q_n$ *est le quotient de la division de* $A$ *par* $B$ *suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre* $n$.

*Démonstration.* — On a $f(a+h) = A(h)+h^n\varepsilon_1(h)$ et $g(a+h) = B(h)+h^n\varepsilon_2(h)$, où $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ sont deux fonctions continues et nulles en 0. Alors $(f+g)(h) = (A+B)(h)+h^n(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(h)$, et $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ est continue et nulle en 0, d'où le point (1). D'autre part, $(fg)(a+h)$ est égal à

$$(AB)(h) + h^n \underbrace{\big(\varepsilon_1(h)g(a+h) + A(h)\varepsilon_2(h)\big)}_{=\varphi(h)}$$

et $\varphi(h)$ est continue et nulle en 0. De plus, on a $(AB)(h) = T^{\leq n}(AB)(h) + h^n R(h)$, pour un certain polynôme $R$ sans terme constant, i.e. nul en 0. On a donc $(fg)(a+h) = T^{\leq n}(AB)(h) + o(h^n)$, d'où le point (2).

Enfin, d'après le théorème précédent, on a $A = BQ_n + h^n R$, pour un certain polynôme $R$ nul en 0. On a donc :

$$f(a+h)-h^n\varepsilon_1(h) = A(h) = B(h)Q_n(h)+h^nR(h) = g(a+h)Q_n(h)+h^n(-\varepsilon_2(h)Q_n(h)+R(h))$$

d'où

$$\frac{f}{g}(a+h) = Q_n(h) + h^n \underbrace{\frac{\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h)Q_n(h) + R(h)}{g(a+h)}}_{=\psi(h)}$$

avec $\psi(h)$ continue et nulle en 0. Ceci prouve le point (3). □

(Q) ***Théorème 5.15.*** — *Soit* $f(a+h) = b + P(h) + o(h^n)$ *un* $\mathrm{DL}_n$ *en un point* $a$, *où* $P$ *est un polynôme de degré* $\leq n$ *nul en* 0, *et soit* $g(b+x) = c + Q(x) + o(x^n)$ *un* $\mathrm{DL}_n$ *au point* $b = f(a)$, *où* $Q$ *est un polynôme de degré* $\leq n$ *nul en* 0. *Notons* $Q \circ P$ *le polynôme* $h \mapsto Q(P(h))$ *et* $T^{\leq n}(Q\circ P)$ *son tronqué en degrés* $\leq n$. *Alors* $g \circ f$ *admet en* $a$ *le* $\mathrm{DL}_n$ *suivant :*

$$(g\circ f)(a+h) = c + T^{\leq n}(Q\circ P)(h) + o(h^n).$$

*Démonstration.* — Écrivons $f(a+h) = b + P(h) + h^n\varepsilon(h)$, où $\varepsilon$ est continue et nulle en 0. Comme par hypothèse le terme constant de $P$ est nul, on a $P(h) = hR(h)$ pour un certain polynôme $R$, et donc $P(h)^k = h^kR(h)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Écrivons aussi :

(1) $$g(b+x) = c + \underbrace{c_1x + \cdots + c_nx^n}_{Q(x)} + x^n\alpha(x)$$

avec $\alpha$ continue et nulle en 0. D'une part, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a, d'après la formule du binôme,

(2) $$\big(P(h) + h^n\varepsilon(h)\big)^k = P(h)^k + h^n\varphi_k(h),$$

où $\varphi_k(h)$ est une fonction continue et nulle en 0 (égale à $\varepsilon(h)\sum_{i=1}^n P(h)^{n-i}(h^n\varepsilon(h))^{i-1}$).

D'autre part, la fonction composée $\beta : h \mapsto \alpha(P(h))$ est continue et nulle en 0. Par conséquent, remplaçant $x$ par $P(h)+h^n\varepsilon(h)$ dans (1) puis tenant compte de (2), on obtient :

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) &= c + c_1P(h) + \cdots + c_nP(h)^n + h^n \underbrace{\Big(\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(h) + R(h)^n\beta(h)\Big)}_{\gamma(h)} \\ &= c + Q(P(h)) + h^n\gamma(h), \end{aligned}$$

où la fonction $h \mapsto \gamma(h)$ est continue et nulle en 0.

De plus on a $Q(P(h)) = T^{\leq n}(Q \circ P)(h) + h^{n+1}S(h)$ pour un certain polynôme $S$, d'où $g(f(a+h)) = c + T^{\leq n}(Q \circ P)(h) + h^n(\gamma(h) + hS(h))$, et comme $h \mapsto \gamma(h) + hS(h)$ est continue et nulle en 0, ceci prouve le théorème. □

***Remarque 5.16***. — Gardons les notations précédentes et notons $p$ la valuation de $P$ (qui est $\geq 1$ par hypothèse). Alors $P(h) = h^p\, T(h)$ pour un certain polynôme $T$ et donc le terme $P(h)^k = h^{pk}\, T(h)^k$ est $o(h^n)$ si $pk > n$. Ceci montre qu'il suffit de ne garder dans $Q$ que les monômes $c_k x^k$ avec $pk \leq n$, c.-à-d. avec $k \leq m = E(n/p)$,[6] c.-à-d. il suffit de prendre le $\mathrm{DL}_m$ en $b$ de $g$.

***Exemple 5.17***. — Calculons le $\mathrm{DL}_6$ en $a = 0$ de $\exp(\cos(h))$. On a le $\mathrm{DL}_6$ en 0 :

$$\cos(h) = 1 + P(h) + o(h^6), \qquad \text{où} \qquad P(h) = -\frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!}.$$

Comme $\mathrm{val}(P) = 2$ (i.e. $P(h)$ « commence » en degré 2) il suffit, d'après la remarque précédente, de prendre le $\mathrm{DL}_3$ en $b = \cos(0) = 1$ de exp. On a

$$\exp(1+x) = \exp(1)\exp(x) = e\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right).$$

Dans ce $\mathrm{DL}_3$, remplaçons $x$ par $P(h)$. Dans $\left(-\frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!}\right)^2$, les seuls termes de degré $\leq 6$ sont $\frac{h^4}{4}$ et le double produit $-2\frac{h^2}{2}\frac{h^4}{4!} = -\frac{h^6}{4!}$. Et dans $\left(-\frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!}\right)^3$, le seul terme de degré $\leq 6$ est $-\frac{h^6}{8}$. On obtient donc que $\exp(P(h))$ égale :

$$\begin{aligned}
1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!} + \frac{1}{2}\Big(\frac{h^4}{4} - \frac{h^6}{4!}\Big) - \frac{1}{6}\frac{h^6}{8} + o(h^6)& \\
= 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{4!}(1+3) - \frac{h^6}{6!}(1+15+15) + o(h^6) = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{6} - \frac{31}{6!}h^6 + o(h^6)&.
\end{aligned}$$

Donc finalement le $\mathrm{DL}_6$ en 0 de $\exp(\cos(h))$ est :

$$\exp(\cos(h)) = e\left(1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{6} - \frac{31}{6!}h^6\right) + o(h^6).$$

## 5.4. Applications des DL

Les développements limités servent, d'une part, à calculer des limites (voir les feuilles d'exercices). Ils servent aussi à comparer deux fonctions $f$ et $g$ au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$, sous l'hypothèse que $D = f - g$ admette en $a$ un développement limité :

$$D(a+h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n + o(h^n)$$

avec les $c_i$ non tous nuls. Sous cette hypothèse, notons $k$ le plus petit entier dans $\{0, 1, \ldots, n\}$ tel que $c_k \neq 0$ (i.e. $k = \min\{i \mid c_i \neq 0\}$), de sorte qu'on a

$$D(a+h) = c_k h^k + \cdots + c_n h^n + o(h^n) = c_k h^k + o(h^k), \qquad \text{avec } c_k \neq 0.$$

Alors le signe de $D$ est donné par le théorème suivant, qui est très important aussi bien d'un point de vue pratique que théorique.[7]

[6] $E(n/p)$ désigne la *partie entière* de $n/p$.

[7] Ce résultat est l'un des trois ingrédients d'une preuve qu'on donnera plus tard du « théorème fondamental de l'algèbre » : tout polynôme $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ de degré $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

(Q) ***Théorème 5.18***. — *Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $D : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant au voisinage d'un point $a \in I$ un développement limité à l'ordre $k$ de la forme :*

$$D(a+h) = c_k h^k + o(h^k), \qquad \text{avec } c_k \neq 0.$$

*Alors pour $h$ suffisamment petit, $D(a+h)$ est du signe de $c_k h^k$.*

*Démonstration.* — Écrivons $D(a+h) = c_k h^k + h^k \varepsilon(k)$, où $\varepsilon$ est continue et nulle en 0. Alors il existe un intervalle ouvert $J$ centré en 0 tel que pour tout $h \in J$ on ait $|\varepsilon(h)| < |c_k|/2$ et dans ce cas $c_k + \varepsilon(h)$ est compris entre $c_k/2$ et $3c_k/2$, donc du même signe que $c_k$, et par suite $D(a+h) = h^k(c_k + \varepsilon(h))$ est du signe de $c_k h^k$. □

Revenons maintenant au cas d'une fonction $f$ admettant au voisinage de $a$ un $\mathrm{DL}_n$ :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + c_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$$

avec $n \geq 2$ et les $c_i$ non tous nuls. Soit $k \in \{2, \ldots, n\}$ le plus petit entier tel que $c_k \neq 0$. Alors, d'après le théorème précédent, pour $h$ assez petit, la différence

$$(\star) \qquad D(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h = c_k h^k + \cdots + a_n h^n + o(h^n) = c_k h^k + o(h^k)$$

est du signe de $c_k h^k$. Or l'équation de la tangente au graphe $\Gamma_f$ de $f$ en $a$ est $y - f(a) = f'(a)(x-a) = f'(a)h$, c.-à-d. $y = f(a) + f'(a)h$. Donc $D(h)$ mesure la différence entre les valeurs en $x = a+h$ de la fonction $f$ et de la fonction affine $A(h) = f(a) + f'(a)h$ donnée par la tangente en $a$. En langage géométrique, on dit que ceci donne, au voisinage de $a$, « la position du graphe par rapport à la tangente » en $a$.

En particulier, si sous les conditions précédentes on a de plus $f'(a) = 0$, alors on voit que $f'$ admet en $a$ un extremum local si et seulement si le terme $c_k h^k$ ne change pas de signe en $h = 0$, i.e. si $k$ est *pair*. Dans ce cas, on a un maximum (resp. minimum) local si $c_k < 0$ (resp. si $c_k > 0$). Revenant à la formule $(\star)$ dans le cas général (i.e. sans supposer $f'(a) = 0$), la position du graphe par rapport à la tangente en $a$ est donnée par le tableau suivant (le lecteur est invité à faire les dessins correspondants), où $\Gamma$ désigne le graphe de $f$ et $T$ la tangente en $a$ :

| | $c_k < 0$ | $c_k > 0$ |
|---|---|---|
| $k$ pair | $\Gamma$ partout en-dessous de $T$ | $\Gamma$ partout au-dessus de $T$ |
| $k$ impair | $\Gamma$ au-dessus de $T$ pour $h \leq 0$ et en-dessous pour $h \geq 0$ | $\Gamma$ en-dessous de $T$ pour $h \leq 0$ et au-dessus pour $h \geq 0$ |

## 5.5. Formule de Taylor-Lagrange

(Q) ***Théorème 5.19* (de Taylor-Lagrange)**. — *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction de classe $C^n$ sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

***Remarque 5.19.1***. — Ce théorème est un énoncé « global » (à la différence de Taylor-Young qui n'était qu'un énoncé « local » en $a$), car il relie la valeur de $f$ en $b$ aux valeurs en $a$ de $f$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n$, ainsi qu'à la valeur de $f^{(n+1)}$ en un certain point $c$ de $]a,b[$. Certes, on ne connaît pas $c$ explicitement, mais si on dispose d'une formule donnant $f^{(n+1)}(x)$ pour $x \in ]a,b[$, alors l'encadrement $a < c < b$ permet souvent de contrôler le « terme d'erreur » $\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$. On en verra un exemple après la démonstration du théorème.

*Démonstration.* — On considère la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = -f(b) + f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

où la constante $A = \dfrac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\Big(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\Big)$ est choisie de sorte que $\varphi(a) = 0$. Alors on a $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$ et d'autre part les hypothèses entraînent que $\varphi$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

D'après les formules pour la dérivée d'un produit et d'une application composée, on a :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) = f'(x) + \Big(-f'(x) + (b-x)f''(x)\Big) + \Big(-2\frac{(b-x)}{2!}f''(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f^{(3)}(x)\Big) + \\ \cdots + \Big(-n\frac{(b-x)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\Big) - (n+1)A\frac{(b-x)^n}{(n+1)!} \\ = \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) - A\frac{(b-x)^n}{n!}.\end{aligned}$$

Alors, comme $c \neq b$ la condition $f'(c) = 0$ entraîne $f^{(n+1)}(c) = A$ et alors la condition $\varphi(a) = 0$ s'écrit

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

ce qui prouve le théorème. □

***Exemple 5.20.*** — Calculons sans calculatrice une valeur approchée de $\sin(\pi/5)$ aussi précise que possible en utilisant le théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 ou 4. Pour commencer, prenons comme valeurs approchées $\pi \simeq 3,14$ et $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \simeq 0,707$.

On a $\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\pi}{4} - b$, où $b = \dfrac{\pi}{20} \simeq 0,157 < \dfrac{1}{6}$. Comme $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 = \sin(\pi/4)$, on a

$$\sin\big(\frac{\pi}{4} - b\big) = \frac{\sqrt{2}}{2}\big(\cos(b) - \sin(b)\big). \tag{1}$$

D'après le théorème de Taylor-Lagrange appliqué à $b$ et $a = 0$ (et à sin à l'ordre 3 et à cos à l'ordre 4), il existe $c_1, c_2 \in ]0,b[$ tels que

$$\cos(b) = 1 - \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{4!}\cos(c_1) \qquad \sin(b) = b - \frac{b^3}{6}\cos(c_2).$$

Commençons par estimer la valeur de $\cos(b)$. Comme $0 < \cos(c_1) < 1$, on a

$$0 < R_4(b) = \frac{b^4}{4!}\cos(c_1) < \frac{b^4}{4!} < \frac{1}{4 \cdot 6^5}.$$

On a $6^3 = 216$ donc $6^4 = 1296 = 1300 - 4$ et $6^5 = 7800 - 24$ et $4 \cdot 6^5 = 31200 - 96 = 31104$ donc le reste $R_4(b)$ est $< (1/3) \cdot 10^{-4}$ et l'on a :

$$1 - \frac{b^2}{2} < \cos(b) < 1 - \frac{b^2}{2} + R_4(b). \tag{2}$$

Donc $1 - b^2/2$ est une valeur approchée par défaut de $\cos(b)$, avec une erreur $< (1/3) \cdot 10^{-4}$. Pour encadrer $1 - b^2/2$, utilisons les encadrements suivants. On a :

$$\pi_0 = 3,1416 > \pi > 3,1415926 = \pi_0 - 74 \cdot 10^{-7}$$

d'où

$$b_0 = \frac{\pi_0}{20} = 0,15708 > b > b_0 - \alpha, \qquad \text{avec } \alpha = 3,7 \cdot 10^{-7} \tag{3}$$

et donc $b^2 > (b_0-\alpha)^2 > b_0^2 - 2b_0\alpha > b_0^2 - (0,32)\cdot 3,7\cdot 10^{-7} > b_0^2 - 1,2\cdot 10^{-7}$, d'où l'encadrement :

$$1-\frac{b_0^2}{2} < 1-\frac{b^2}{2} < 1-\frac{b_0^2}{2} + 0,6\cdot 10^{-7}.$$

Reprenons les majorations $R_4(b) < \dfrac{1}{31104} < \dfrac{1}{3}10^{-4}$ et remarquons que $\dfrac{1}{300}-\dfrac{1}{311} > \dfrac{11}{9\cdot 10^4} > 1,2\cdot 10^{-4}$ donc $(1/3)\cdot 10^{-4} - R_4(b) - 0,6\cdot 10^{-7} > (120-6)\cdot 10^{-8} > 0$, donc on a l'encadrement :

$$1-\frac{b_0^2}{2} < \cos(b) < 1-\frac{b_0^2}{2} + (1/3)\cdot 10^{-4}.$$

Calculons maintenant $b_0^2$. Comme $(7,08)^2 = 49+14\cdot 0,08+0,0064 = 50,1264$, on obtient

$$b_0^2 = 10^{-4}\Big(225+30\cdot(0,708)+(0,708)^2\Big) = 10^{-4}\cdot 246,741264 = 0,0246741264.$$

et donc $b_0^2/2 = 0,0123370632$. D'où l'encadrement $0,01234 > b_0^2/2 > 0,01234 - 3\cdot 10^{-6}$, et comme $3\cdot 10^{-6} + (1/3)\cdot 10^{-4} < 37\cdot 10^{-6}$ on obtient donc :

(4) $$\mathbf{0,9876}6 = 1-0,01234 < \cos(\pi/20) < 0,98766 + 3,7\cdot 10^{-5} = \mathbf{0,9876}97.$$

(Et la calculatrice donne $\cos(\pi/20) = \mathbf{0,9876}88341$.)

On peut maintenant utiliser les encadrements :

$$1 > \cos(c_1), \cos(c_2) > \cos(b) > 0,9876 = 1-0,124$$

pour calculer des valeurs plus précises de $\cos(b)$ et $\sin(b)$. Commençons par $\sin(b)$. D'après (3), on a $b_0-\alpha < b < b_0$, où $\alpha = 3,7\cdot 10^{-7}$. Comme $b^3\cos(c_2) < b_0^3$, on a donc :

(5) $$b_0 - \frac{b_0^3}{6} - \alpha < b - \frac{b_0^3}{6} < b - \frac{b^3}{6}\cos(c_2) = \sin(b) < b_0 - \frac{b^3}{6}\cos(c_2).$$

D'après la formule du binôme, $(15,708)^3 = 15^3 + 3\cdot 15^2\cdot(0,708) + 3\cdot 15\cdot(0,708)^2 + (0,708)^3$ et en utilisant les calculs déjà effectués : $15^2 = 225$, $(7,08)^2 = 50,1264$, ainsi que la minoration $(0,708)^3 < 0,35$, on obtient $3875 < (15,708)^3 < 3876 = 6\cdot 646$ d'où :

$$0,000646 - \frac{1}{6}10^{-6} < \frac{b_0^3}{6} < 0,000646.$$

Comme $b_0 - 0,000646 - \alpha = 0,15708000 - 0,00064637 = 0,15643363$, on obtient donc :

(†) $$0,15643363 < b_0 - \frac{b_0^3}{6} - \alpha < \sin(b).$$

D'autre part, $b^3 > (b_0-\alpha)^3 = b_0^3 - 3b_0^2\alpha + 3b_0\alpha^2 - \alpha^3$ et ceci est $> b_0^3 - 3b_0^2\alpha$ puisque $3b_0 > \alpha$. Comme $b_0^2 < 2,5\cdot 10^{-2}$ et $\alpha < 4\cdot 10^{-7}$ on obtient que :

$$\frac{b^3}{6} > \frac{b_0^3}{6} - \frac{b_0^2}{2}\alpha > \frac{b_0^3}{6} - \frac{1}{2}10^{-9}.$$

Et comme $(1/6)10^{-6} + 10^{-9}/2 < 1,7\cdot 10^{-7}$ on obtient $b^3/6 > 0,000646 - 1,7\cdot 10^{-7} > 0$. Multipliant ceci par l'inégalité $\cos(c_2) > 1-0,124$, on obtient

$$\frac{b^3}{6}\cos(c_2) > 0,000646 - (0,124)(0,000646) - 1,7\cdot 10^{-7} > 0,000646 - (124\cdot 65+17)10^{-8}.$$

Comme $124\cdot 65 + 17 = 8077 < 8,1\cdot 10^3$, on obtient en tenant compte de (5) et de (†) :

(6) $$0,15643363 < \sin(\pi/20) < b_0 - 0,000646 + 8,1\cdot 10^{-5} = 0,156515.$$

(La calculatrice donne $\sin(\pi/20) = 0,156434465$, donc en fait $\cos(c_2)$ est plus proche de 1 que de $\cos(b)$.)

Enfin, des arguments analogues (nous laissons les détails aux lecteurs intéressés) donnent :

$$1-\frac{b_0^2}{2}+\frac{b_0^4}{4!}(1-0,124)-\frac{b_0^3}{6}\alpha<1-\frac{b_0^2}{2}+\frac{b^4}{4!}\cos(c_1)<1-\frac{b^2}{2}+\frac{b^4}{4!}\cos(c_1)=\cos(b)$$

et

$$\cos(b)=1-\frac{b^2}{2}+\frac{b^4}{4!}\cos(c_1)<1-\frac{b^2}{2}+\frac{b_0^4}{4!}<1-\frac{b_0^2}{2}+\frac{b^4}{4!}+b_0\alpha.$$

On calcule que $C=1-\dfrac{b_0^2}{2}+\dfrac{b_0^4}{4!}$ égale : $0,987688304$. Puis $(b_0^4/4!)\cdot 0,124=3,1455\cdot 10^{-6}$ et $(b_0^3/6)\alpha<2,4\cdot 10^{-10}$ donc la somme est $<0,31458\cdot 10^{-6}$ et donc

$$\cos(b)>0,987688304-0,0000031458=0,9876851582.$$

D'autre part, $b_0\alpha=0,581196\cdot 10^{-7}$ donc

$$\cos(b)<0,9876883\mathbf{04}+0,0000000\mathbf{58}2=0,9876883\mathbf{62}2.$$

On obtient donc l'encadrement

$$\mathbf{0,98768}51582<\cos(\pi/20)<\mathbf{0,98768}83622 \tag{7}$$

qui améliore l'encadrement (4) obtenu précédemment. En soustrayant (6) de (7) on obtient

$$0,83117<\cos(b)-\sin(b)<0,83126$$

soit un encadrement à $9\cdot 10^{-5}\simeq 10^{-4}$ près. On peut alors prendre l'encadrement de $\sqrt{2}$ suivant : $1,414<\sqrt{2}<1,41422$ d'où $0,707<\sqrt{2}/2<0,70711$. On obtient alors que

$$0,587637<\sin(\pi/5)<0,587793.$$

(La calculatrice donne $\sin(\pi/5)=0,587785252$. )